NHỮNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG COSI.

Cho n nguyên và $n \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

$$A = \underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + ... + \frac{x}{n}}_{n\ so\ \frac{x}{n}} + \frac{1}{x^n} \ge (n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{n}\right)^n \frac{1}{x^n}} \ge \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{n} = \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x = \sqrt[n+1]{n}$

Giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$

Cho n nguyên và $n \ge 2$ và $x \ge k > \sqrt[n+1]{n}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

Với $x \ge k > \sqrt[n+1]{n}$

$$f(x) \ge f(k) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x^n} - k - \frac{1}{k^n} \ge 0 \Leftrightarrow x - k + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + ... + \frac{1}{k^{n-1}}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-k)\left[1 - \frac{1}{xk}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + ... + \frac{1}{k^{n-1}}\right)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-k)}{xk}\left[xk - \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + ... + \frac{1}{k^{n-1}}\right)\right] \ge 0$$

Ta có: $\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + ... + \frac{1}{k^{n-1}} \le \frac{n}{k^{n-1}} < \frac{n}{\sqrt[n+1]{n^{n-1}}} = \sqrt[n+1]{n^2} < xk$

Suy ra $f(x) \ge f(k)$ đúng với mọi $x \ge k > \sqrt[n+1]{n}$

Giá trị nhỏ nhất của $A = k + \frac{1}{k^n}$ khi $x = k$.

Cách 2 :

Nháp : $A = \underbrace{\frac{x}{m} + ... + \frac{x}{m}}_{n\ so\ \frac{x}{m}, m>0} + \frac{1}{x^n} + x - \frac{nx}{m} \ge (n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{m}\right)^n \frac{1}{x^n}} + x\left(1 - \frac{n}{m}\right)$

Ta chọn m sao cho: $\begin{cases} x = k \\ \dfrac{x}{m} = \dfrac{1}{x^n} \end{cases} \Rightarrow m = x^{n+1} = k^{n+1}$

Bài giải: $A = \underbrace{\dfrac{x}{k^{n+1}} + \ldots + \dfrac{x}{k^{n+1}} + \dfrac{1}{x^n}}_{n \ so \ \frac{x}{k^{n+1}}} + x - \dfrac{nx}{k^{n+1}} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\left(\dfrac{x}{k^{n+1}}\right)^n \dfrac{1}{x^n}} + x\left(1 - \dfrac{n}{k^{n+1}}\right)$

Vì $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$ nên $n < k^{n+1}$ suy ra: $A \geq \dfrac{(n+1)}{k^n} + k\left(1 - \dfrac{n}{k^{n+1}}\right) = k + \dfrac{1}{k^n} = f(k)$

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $\left(x+y\right)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$

Đề thi Đại học khối A năm 2006

Giải:

Xét $\left(x+y\right)xy = x^2 + y^2 - xy \ \left(*\right)$.

Đặt $u = \dfrac{1}{x}, v = \dfrac{1}{y}$.

Ta được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{xy} \Rightarrow u + v = u^2 + v^2 - uv \Rightarrow \left(u+v\right)^2 - (u+v) = 3uv \leq \dfrac{3(u+v)^2}{4}$.

$\Rightarrow \left(u+v\right)^2 - 4(u+v) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u + v \leq 4$

Khi đó : $A = \dfrac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \dfrac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^3y^3} = \dfrac{(x+y)(x+y)xy}{x^3y^3} = \dfrac{x^2+y^2+2xy}{x^2y^2}$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2}{xy} = (u+v)^2 \leq 16$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v = 2$ hay $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = x\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{yz}\right) + y\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{zx}\right) + z\left(\dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{xy}\right)$

Đề thi Đại học khối B năm 2007

Giải:

$P = x\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{yz}\right) + y\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{zx}\right) + z\left(\dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{xy}\right) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{x}{yz} + \dfrac{y}{zx} + \dfrac{z}{xy}$

$$P=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{xyz}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(1+\frac{1}{xyz}+\frac{1}{xyz}\right)$$

$$P\ge\frac{1}{2}9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}=\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{9}{2}$

Đề thi Đại học khối A năm 2009

Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi và thoả mãn điều kiện $x.y.z=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2\left(y+z\right)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2\left(z+x\right)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2\left(x+y\right)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2007

Giải:

$$P\ge\frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}\sqrt{xyz}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}\sqrt{xyz}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\ge\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đặt: $\begin{cases}a=y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}\\ b=z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}\\ c=x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\sqrt{x}=\dfrac{1}{9}(-2a+4b+c)\\ y\sqrt{y}=\dfrac{1}{9}(a-2b+4c)\\ z\sqrt{z}=\dfrac{1}{9}(4a+b-2c)\end{cases}$

Khi đó: $P\ge\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{-2a+4b+c}{a}+\dfrac{a-2b+4c}{b}+\dfrac{4a+b-2c}{c}\right)\ge\dfrac{2}{9}\left(-6+4\left[\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}\right]+\left[\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\right]\right).$

Hay $P\ge\dfrac{2}{9}\left(-6+4.3+3\right)=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức của $P=2$ khi $a=b=c=1$.

Cho các số thực không âm x,y thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$.

Đề thi Cao đẳng khối B năm 2009

Giải:

Nhận xét: vai trò giống nhau (đối xứng) của x,y.

$S = 12\left(x^3 + y^3\right) + 16x^2y^2 + 34xy = 12\left(x+y\right)\left(x^2 + y^2 - xy\right) + 16x^2y^2 + 34xy$

Hay $S = 12\left(x+y\right)\left(\left(x+y\right)^2 - 3xy\right) + 16x^2y^2 + 34xy = \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16}$

Vì x, y không âm và thỏa mãn $x + y = 1$ suy ra $0 \le xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4} \le 4xy - \frac{1}{4} \le \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \le \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} \le \frac{25}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $S = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của $S = 0$ khi $x = 0, y = 1$.

Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $\left(x+y\right)^3 + 4xy \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$

Đề thi Đại học khối B năm 2009

Giải:

$$\left.\begin{array}{l}\left(x+y\right)^3 + 4xy \ge 2\\ \left(x+y\right)^2 \ge 4xy\end{array}\right\} \Rightarrow \left(x+y\right)^3 + \left(x+y\right)^2 \ge 2 \Rightarrow x + y \ge 1 .$$

$A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1 = \frac{3}{2}\left(x^4 + y^4 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$

$A = \frac{3}{2}\left(x^4 + y^4\right) + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$

Mà $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 \ge \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^4 + y^4\right) \Rightarrow x^4 + y^4 \ge \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2$

Khi đó $A \ge \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$ hay $A \ge \frac{9}{4}\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$

Đặt $t = \left(x^2 + y^2\right)^2, t \ge \frac{(x+y)^2}{2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \text{A} \ge \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \ge \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ xác định và liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right) = \frac{9}{2}t - 2 \ge \frac{9}{4} - 1 > 0$, $t \ge \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(t\right)$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Khi đó $\min A = \min\limits_{t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)} f\left(t\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{1}{2}$

ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC COSI

Bài toán mở đầu : Cho $a,b > 0$ và thỏa mãn $a + b \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{1 + a^2 + b^2} + \dfrac{1}{2ab}$.

Giải:

Lời giải 1. Ta có: $P = \dfrac{1}{1 + a^2 + b^2} + \dfrac{1}{2ab} \ge \dfrac{4}{a^2 + 2ab + b^2 + 1} = \dfrac{4}{(a+b)^2 + 1} \ge \dfrac{4}{2} = 2$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a^2 + b^2 = 2ab \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + 1 = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm. Vậy không tồn tại $\min P$.

Lời giải 2. Ta có: $P = \dfrac{1}{1 + a^2 + b^2} + \dfrac{1}{6ab} + \dfrac{1}{3ab} \ge \dfrac{4}{a^2 + 6ab + b^2 + 1} + \dfrac{1}{3ab} = \dfrac{4}{(a+b)^2 + 1 + 4ab} + \dfrac{1}{3ab}$

Mặt khác $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Vậy $P \ge \dfrac{4}{2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{6\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} \ge \dfrac{8}{3}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a^2 + b^2 = 3ab \\ a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$.

Lời bình: lời giải 1. và ***lời giải 2*** gần như tương tự nhau, cùng áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$. Tại sao trong cùng một bài toán mà có đến hai đáp số ? Do đâu mà lời giải 2 tại sao lại tách $\dfrac{1}{2ab} = \dfrac{1}{6ab} + \dfrac{1}{3ab}$?. ***Đó chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.***

Các bất đẳng thức trong các đề thi đại học thông thường là đối xứng với các biến và ta dự đoán dấu bằng xảy ta khi các biến bằng nhau và xảy ra tại biên.

Cho $a,b > 0$ và thỏa mãn $a + b \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{a^2 + b^2} + \dfrac{1}{ab} + 4ab$.

Giải:

Do P là biểu thức đối xứng với a,b, ta dự đoán $\min P$ đạt tại $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Ta có: $P = \dfrac{1}{a^2 + b^2} + \dfrac{1}{2ab} + \left(4ab + \dfrac{1}{4ab}\right) + \dfrac{1}{4ab} \ge \dfrac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab.\dfrac{1}{2ab}} + \dfrac{1}{4\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} \ge 7$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \dfrac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Thao khảo hai lời giải khác :

Lời giải 1:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \ge \frac{4}{\left(a + b\right)^2} 2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4ab} \ge 4 + 2 + \frac{1}{4ab} = 6 + \frac{1}{4ab}$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \dfrac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$. Thay $a = b = \dfrac{1}{2}$ vào ta được $P \ge 7$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Lời bình 1:

Qua cách giải trên ta đã chọn đúng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$ nên dẫn đến việc tách các số hạng và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \dfrac{1}{2}$ là đúng , nhưng bước cuối cùng ta đã làm sai , ví dụ $\left(1 - a\right)^2 + a \ge a$, đẳng thức xảy ra khi $a = 1 \Rightarrow \min\left[\left(1 - a\right)^2 + a\right] = a$?.

Lời giải 2:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab \ge \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab = \frac{4}{\left(a + b\right)^2} + \left(\frac{1}{2ab} + 4ab\right).$$

Mặt khác $\dfrac{1}{2ab} + 4ab \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{2ab}.4ab} = 2\sqrt{2}$. Vậy $P \ge 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \min P = 2\left(2 + \sqrt{2}\right)$

Lời bình 2:

Thoạt nhìn thấy bài toán đã giải đúng . Thực tế thì sao? . Việc tách $\dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{2ab} + \dfrac{1}{2ab}$ để làm xuất hiện đẳng thức $a^2 + b^2 + 2ab = \left(a + b\right)^2$.

$\min P = 2\left(2 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \dfrac{1}{2ab} = 4ab \\ a + b = 1 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm. Đẳng thức không xảy ra , do đó không tồn tại $\min P$.

Cho 3 số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c \le \dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng :

1. $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{15}{2}$.
2. $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge \frac{3\sqrt{17}}{2}$.
3. $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Giải:

1. $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{15}{2}$

Ta có thể phạm sai lầm: $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{abc}+3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge 6\sqrt{\sqrt[3]{abc}.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}}=6$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ nhưng khi đó $a+b+c=3>\frac{3}{2}$ (trái giả thiết) .

<u>Phân tích bài toán</u> :

Từ giả thiết a,b,c dương thoả mãn $a+b+c\le \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân. $\frac{3}{2}\ge a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow \sqrt[3]{abc}\le \frac{1}{2}$. Đặt: $x=\sqrt[3]{abc}\le \frac{1}{2}$

Khi đó : $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{abc}+3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=3\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$

Ta chọn $\alpha>0$ sao cho: $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ \frac{x}{\alpha}=\frac{1}{x} \end{cases}\Rightarrow \alpha=x^2=\frac{1}{4}$.

<u>Bài giải</u>:

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\left(x+\frac{1}{x}\right)\ge 3\left(4x+\frac{1}{x}-3x\right)\ge 3.2\sqrt{4x.\frac{1}{x}}-9x=12-\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

2. $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

<u>Phân tích bài toán</u> :

Từ giả thiết a,b,c dương thoả mãn $a+b+c\le \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân. $\frac{3}{2}\ge a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow \sqrt[3]{abc}\le \frac{1}{2}$. Đặt: $x=\sqrt[3]{abc}\le \frac{1}{2}$,đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$.

Xét $x^2+\frac{1}{x^2}$, chọn $\alpha>0$ sao cho: $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x^2=\frac{1}{\alpha x^2} \end{cases}\Rightarrow \alpha=\frac{1}{x^4}=16$.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16x^2}$ và số x^2:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+16.\frac{1}{16x^2}\ge 17\sqrt[17]{x^2\left(\frac{1}{16x^2}\right)^{16}}\Rightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\ge\frac{\sqrt{17}x^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}.$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{\sqrt{17}a^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}};\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}\ge\frac{\sqrt{17}b^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}};\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{\sqrt{17}c^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}\left(a^{\frac{-15}{17}}+b^{\frac{-15}{17}}+c^{\frac{-15}{17}}\right)\ge\frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}.3\left(a^{\frac{-15}{17}}b^{\frac{-15}{17}}c^{\frac{-15}{17}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}\left(abc\right)^{\frac{-5}{17}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}.2^{\frac{15}{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách khác :

Chọn : $\vec{u}=\left(a;\frac{1}{a}\right),\vec{v}=\left(b;\frac{1}{b}\right),\vec{w}=\left(c;\frac{1}{c}\right)$

Dùng bất đẳng thức vecto $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|$

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge\sqrt{\left(a+b+c\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}\ge3\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

Tương tự trên , ta đặt $x=\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\le\frac{1}{4}$.

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge3\sqrt{x+\frac{1}{x}}=3\sqrt{x+\frac{1}{16x}+\frac{15}{16x}}\ge3\sqrt{2\sqrt{\frac{x}{16}.\frac{1}{x}}+\frac{15}{16x}}$$

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\ge3\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16x}}\ge3\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{4}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

3. $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Tương tự trên . Xét $x^2+\frac{1}{y^2}$, chọn $\alpha>0$ sao cho: $\begin{cases}x=y=\frac{1}{2}\\x^2=\frac{1}{\alpha y^2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{x^2y^2}=16$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16y^2}$ và số x^2:

$$x^2+\frac{1}{y^2}=x^2+16.\frac{1}{16y^2}\ge 17\sqrt[17]{x^2\left(\frac{1}{16y^2}\right)^{16}}\Rightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}\ge\frac{\sqrt{17}x^{\frac{1}{17}}y^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}.$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\ge\frac{\sqrt{17}a^{\frac{1}{17}}b^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}};\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{\sqrt{17}b^{\frac{1}{17}}c^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}};\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{\sqrt{17}c^{\frac{1}{17}}a^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}$$

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}\left(a^{\frac{1}{17}}b^{\frac{-16}{17}}+b^{\frac{1}{17}}c^{\frac{-16}{17}}+c^{\frac{1}{17}}a^{\frac{-16}{17}}\right)\ge\frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}\left(abc\right)^{\frac{-5}{17}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}}2^{\frac{15}{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cho $x,y,z>0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$$

Đề thi Đại học khối D năm 2007

Giải:

Cho các số không âm a,b,x,y thỏa các điều kiện $\begin{cases}a^{2005}+b^{2005}\le 1\\ x^{2005}+y^{2005}\le 1\end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^{1975}.x^{30}+b^{1975}.y^{30}\le 1$$

Toán tuổi thơ 2 – số 27

Giải:

Nhận xét : Các đa thức tham gia trong bài toán cùng bậc $2005=1975+30$, đồng thời số mũ của các biến tương ứng bằng nhau.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân cho 1975 số a^{2005} và 30 số x^{2005}

$$\frac{1975.a^{2005}+30.x^{2005}}{\left(1975+30\right)} \ge \sqrt[2005]{\left(a^{2005}\right)^{1975}.\left(x^{2005}\right)^{30}} = a^{1975}.x^{30} \quad \left(1\right)$$

Tương tự $\dfrac{1975.b^{2005}+30.y^{2005}}{\left(1975+30\right)} \ge \sqrt[2005]{\left(b^{2005}\right)^{1975}.\left(y^{2005}\right)^{30}} = b^{1975}.y^{30} \quad \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $1975.\left(a^{2005}+b^{2005}\right)+30.\left(x^{2005}+y^{2005}\right) \ge 2005.\left(a^{1975}.x^{30}+b^{1975}.y^{30}\right) \quad \left(3\right)$

Từ $\begin{cases} a^{2005}+b^{2005} \le 1 \\ x^{2005}+y^{2005} \le 1 \end{cases} \Rightarrow 2005 \ge 1975.\left(a^{2005}+b^{2005}\right)+30.\left(x^{2005}+y^{2005}\right) \quad \left(4\right)$

Từ $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ suy ra $2005 \ge 2005.\left(a^{1975}.x^{30}+b^{1975}.y^{30}\right) \Rightarrow a^{1975}.x^{30}+b^{1975}.y^{30} \le 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^{1975}=x^{30}, b^{1975}=y^{30}$.

Tổng quát : Cho các số không âm a,b,x,y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{m+n}+b^{m+n} \le 1 \\ x^{m+n}+y^{m+n} \le 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$a^m.x^n+b^m.y^n \le 1$.

Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$.

Giải:

Ta có : $A^2=\left(\dfrac{xy}{z}\right)^2+\left(\dfrac{yz}{x}\right)^2+\left(\dfrac{zx}{y}\right)^2+2\left(y^2+z^2+x^2\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức: $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$

Ta được: $A^2 \ge (y^2+z^2+x^2)+2(y^2+z^2+x^2)=3(y^2+z^2+x^2)=3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{xy}{z}=\dfrac{yz}{x}=\dfrac{xz}{y} \Rightarrow x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\min A=\sqrt{3}$ đạt được khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng :

$\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Phân tích bài toán :

● Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, vậy ta có thể suy ra $0 < a \le b \le c < 1$ hay không?. Như vậy điều kiện a,b,c không chính xác vì dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a,b,c \in \left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

● Ta thấy mối liên hệ gì của bài toán ?. Dễ thấy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $b^2 + c^2, c^2 + a^2, a^2 + b^2$. Gợi ý ta đưa bài toán về dạng cần chứng minh : $\dfrac{a}{1-a^2} + \dfrac{b}{1-b^2} + \dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

● Vì vai trò a,b,c như nhau và 2 ý phân tích trên gợi ý ta đưa đến cách phân tích

$\dfrac{a}{1-a^2} + \dfrac{b}{1-b^2} + \dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ và cần chứng minh $\begin{cases} \dfrac{a}{1-a^2} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 \\ \dfrac{b}{1-b^2} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}b^2 \\ \dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}c^2 \end{cases}$.

● Ta thử đi tìm lời giải :

$$\frac{a}{1-a^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}a \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \ge a(1-a^2) \Leftrightarrow \frac{4}{27} \ge a^2(1-a^2)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{27} \ge 2a^2(1-a^2)^2$$

Dễ thấy $\begin{cases} 2a^2(1-a^2)^2 = 2a^2(1-a^2)(1-a^2) \\ 2a^2 + (1-a^2) + (1-a^2) = 2 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$2 = 2a^2 + (1-a^2) + (1-a^2) \ge 3\sqrt[3]{2a^2(1-a^2)(1-a^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \ge \sqrt[3]{2a^2(1-a^2)(1-a^2)} \Leftrightarrow \frac{8}{27} \ge 2a^2(1-a^2)^2$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại.

Giải :

Cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng : $\dfrac{a^3}{b(c+a)} + \dfrac{b^3}{c(a+b)} + \dfrac{c^3}{a(b+c)} \ge \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

Phân tích bài toán :

● Đẳng thức cần chứng minh đưa về dạng :

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + m(a+c) + nb + \frac{b^3}{c(a+b)} + k(b+a) + pc + \frac{c^3}{a(b+c)} + i(b+c) + ja \ge 0.$$

● Giả sử $0 < a \le b \le c$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Từ đó gợi mở hướng giải : $\frac{a^3}{b(c+a)}+m(a+c)+nb\ge 3\sqrt[3]{mn}a$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}\frac{a^3}{b(c+a)}=m(a+c)=nb\\ a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow \frac{a^3}{a(a+a)}=m(a+a)=na\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{4}\\ n=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp khác .

Giải :

$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}(c+a)\ge\frac{3}{2}a$. Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a^3}{b(c+a)}=\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}(c+a)$.

$\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}(b+a)\ge\frac{3}{2}b$. Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{b^3}{c(a+b)}=\frac{1}{2}c=\frac{1}{4}(b+a)$.

$\frac{c^3}{a(b+c)}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}(b+c)\ge\frac{3}{2}c$. Đẳng thức xảy ra khi: $\frac{c^3}{a(b+c)}=\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}(b+c)$.

Cộng vế theo vế ta được : $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$a=b=c>0$

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$a.\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}<\frac{7}{2}$

$b.\ \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$.

$c.\ \sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\sqrt[3]{18}$.

$d.\ a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 10$

Giải:

$a.\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}<\frac{7}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a+1}=\sqrt{1.(a+1)}\le\frac{(a+1)+1}{2}=\frac{a}{2}+1\\ \sqrt{b+1}=\sqrt{1.(b+1)}\le\frac{(b+1)+1}{2}=\frac{b}{2}+1\\ \sqrt{c+1}=\sqrt{1.(c+1)}\le\frac{(c+1)+1}{2}=\frac{c}{2}+1\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\le\frac{a+b+c}{2}+3=\frac{7}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a+1=b+1=c+1=1\Leftrightarrow a=b=c=0\Rightarrow a+b+c=0\ne 1$

Vậy $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}<\frac{7}{2}$

$b.\ \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$.

<u>Phân tích bài toán</u> :

● Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$. Hằng số cần thêm là $\dfrac{1}{3}$.

● Từ giả thiết gợi ý ta đưa đến cách phân tích $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}\left(a+b+c\right)$ hay

$$S = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{\frac{3}{2}}\,.\left[\frac{a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{3}}{2} + \frac{b+\frac{1}{3}+c+\frac{1}{3}}{2} + \frac{c+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{3}}{2}\right].$$

● Ta thử đi tìm lời giải : Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{(a+b)+\frac{2}{3}}{2}\right) \ge \sqrt{\frac{3}{2}}\,.\sqrt{(a+b).\frac{2}{3}} = \sqrt{a+b}$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại .

Cách khác :

Giả sử với mọi $m > 0$, ta luôn có : $\sqrt{a+b} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{(a+b)m} \le \dfrac{1}{\sqrt{m}}\left(\dfrac{a+b+m}{2}\right)$. Vấn đề bây giờ ta dự đoán $m > 0$ bao nhiêu là phù hợp?.

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a + b = m \\ a = b = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}$.

<u>Giải</u> :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,.\sqrt{(a+b).\dfrac{2}{3}} \overset{AM-GM}{\le} \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,.\dfrac{(a+b)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,.\sqrt{(b+c).\dfrac{2}{3}} \overset{AM-GM}{\le} \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,.\dfrac{(b+c)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,.\sqrt{(c+a).\dfrac{2}{3}} \overset{AM-GM}{\le} \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,.\dfrac{(c+a)+\dfrac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{\frac{3}{2}}\,.\frac{2\left(a+b+c\right)+3.\frac{2}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,.2 = \sqrt{6} \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

c. $\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \le \sqrt[3]{18}$.

• Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{2}{3} \\ b+c=\dfrac{2}{3} \\ c+a=\dfrac{2}{3} \end{cases}$. Hằng số cần thêm là $\dfrac{2}{3}$

• Từ giả thiết gợi ý ta đưa đến cách phân tích $\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a} \le \sqrt[3]{18}\left(a+b+c\right)$ hay

$$T=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a} \le \frac{\left(a+b\right)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}+\frac{\left(b+c\right)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}+\frac{\left(c+a\right)+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

.

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\sqrt[3]{\left(a+b\right).\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}} \le \dfrac{\left(a+b\right)+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\sqrt[3]{\left(b+c\right).\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}} \le \dfrac{\left(b+c\right)+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\sqrt[3]{\left(c+a\right).\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}} \le \dfrac{\left(c+a\right)+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a} \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{2\left(a+b+c\right)+4}{3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{6}{3}=\sqrt[3]{18} \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

$d.\ a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b} \ge 10$

<u>Phân tích bài toán</u> :

• Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \le b \le c$ thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

• Từ điều cần chứng minh ,gợi ý ta đưa đến cách phân tích với mọi $m > 0$, ta luôn có : $ma+\dfrac{1}{a} \ge 2\sqrt{m}$.

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} ma=\dfrac{1}{a} \\ a=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=9$.

• Vì thế mà $T=a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}=9\left(a+b+c\right)+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}-8\left(a+b+c\right)$

Giải :
Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} 9a + \dfrac{1}{a} \ge 6 \\ 9b + \dfrac{1}{b} \ge 6 \\ 9c + \dfrac{1}{c} \ge 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow T = 9(a+b+c) + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{b} - 8(a+b+c) \ge 3.6 - 8(a+b+c) = 10$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi : $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

Cho các số thực dương x, y, z và thỏa mãn $mx + ny + pz \ge d$ trong đó $m, n, p, d \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $A = ax^2 + by^2 + cz^2$

Hướng dẫn : Thực hiện việc chọn điểm rơi : $ax^2 = by^2 = cz^2 = \beta$

Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 5$ thì $3x^2 + 3y^2 + z^2 \ge 10$

<u>Phân tích bài toán</u> :

● Trước hết ta để ý mối liên hệ giữa $3x^2, 3y^2, z^2, xy, yz, zx$ cho ta điều gì ?, phải chăng những hằng đẳng thức có dạng : $(ax - by)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (ax)^2 + (by)^2 \ge 2axby$?.

● Phân tích :

$ax^2 + ay^2 \ge 2axy$.Đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$by^2 + cz^2 \ge 2\sqrt{bc}yz$.Đẳng thức xảy ra khi $by^2 = cz^2$

$cz^2 + bx^2 \ge 2\sqrt{cb}zx$. Đẳng thức xảy ra khi $cz^2 = bx^2$

Bây giờ ta chọn a, b, c sao cho : $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2c = 1 \\ a = \sqrt{bc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Giải :

$x^2 + y^2 \ge 2xy$.Đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$2y^2 + \dfrac{1}{2}z^2 \ge 2yz$.Đẳng thức xảy ra khi $2y^2 = \dfrac{1}{2}z^2$

$\dfrac{1}{2}z^2 + 2x^2 \ge 2zx$. Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1}{2}z^2 = 2x^2$

Cộng vế theo vế ta được : $3x^2+3y^2+z^2\ge 2(xy+yz+zx)\Rightarrow 3x^2+3y^2+z^2\ge 10$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} x=y \\ 2y^2=\dfrac{1}{2}z^2 \\ \dfrac{1}{2}z^2=2x^2 \\ xy+yz+zx=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Cho 3 số thực dương x,y,z thoả mãn $x+y+z=\dfrac{47}{12}$. Chứng minh rằng : $3x^2+4y^2+5z^2\ge\dfrac{235}{12}$

Phân tích bài toán :

● Trước hết ta để ý mối liên hệ giữa $3x^2,4y^2,5z^2,x,y,z$ cho ta điều gì ?, gợi ý : $3x^2+4y^2+5z^2\ge\dfrac{235}{12}$ được biến đổi về dạng $3x^2+m+4y^2+n+5z^2+p\ge k,\left(0<m\le n\le p\le k=const\right)$

● Phân tích :

$3x^2+m\ge 2\sqrt{3m}x, m>0$. Đẳng thức xảy ra khi $3x^2=m$

$4y^2+n\ge 2\sqrt{4n}y, n>0$. Đẳng thức xảy ra khi $4y^2=n$

$5z^2+p\ge 2\sqrt{5p}z, p>0$. Đẳng thức xảy ra khi $5z^2=p$

Bây giờ ta chọn x,y,z sao cho : $\begin{cases} 3x^2=m \\ 4y^2=n \\ 5z^2=p \\ \sqrt{3m}=\sqrt{4n}=\sqrt{5p} \\ x+y+z=\dfrac{47}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{5}{4} \\ z=1 \\ m=\dfrac{25}{3} \\ n=\dfrac{25}{4} \\ p=5 \end{cases}$

Giải :

$3x^2+\dfrac{25}{3}\ge 2\sqrt{3.\dfrac{25}{3}}x$. Đẳng thức xảy ra khi $3x^2=\dfrac{25}{3}$.

$4y^2+\dfrac{25}{4}\ge 2\sqrt{4.\dfrac{25}{4}}y$. Đẳng thức xảy ra khi $4y^2=\dfrac{25}{4}$.

$5z^2+5\ge 2\sqrt{5.5}z$. Đẳng thức xảy ra khi $5z^2=5$.

Cộng vế theo vế ta được $3x^2+4y^2+5z^2\ge 10(x+y+z)-\dfrac{235}{12}=\dfrac{235}{12}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{5}{4} \\ z = 1 \end{cases}$.

Cho 3 số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng : $1+\sqrt[3]{abc} \le \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$

Giải :

$1+\sqrt[3]{abc} \le \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{1.1.1}+\sqrt[3]{abc} \le \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}+\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \le 1$

Đặt : $T = \sqrt[3]{\dfrac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}+\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

$T \le \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\right]+\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}\right]$

$T \le \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{a+1}{1+a}+\dfrac{b+1}{1+b}+\dfrac{c+1}{1+c}\right] = \dfrac{1}{3}.3 = 1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c\ge 0$.

Tổng quát :

Chứng minh rằng với mọi $a_i, b_i > 0\left(i=\overline{1,n}\right)$ thì ta luôn có :

$\sqrt[n]{a_1a_2.......a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2.......b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_1+b_2)........(a_n+b_n)}$

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng : $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right) \ge 8$.

Giải :

$VT = \left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right) = \left(\dfrac{1-a}{a}\right).\left(\dfrac{1-b}{b}\right).\left(\dfrac{1-c}{c}\right) = \dfrac{b+c}{a}.\dfrac{c+a}{b}.\dfrac{a+b}{c}$

$VT \overset{\text{AM\_GM}}{\ge} \dfrac{2\sqrt{bc}}{a}.\dfrac{2\sqrt{ca}}{b}.\dfrac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$ (đpcm)

Tổng quát :

Cho $\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,...............,x_n > 0 \\ x_1+\ x_2+\ x_3+........+x_n = 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)\left(\frac{1}{x_3}-1\right)........\left(\frac{1}{x_n}-1\right) \ge (n-1)^n$.

Cho 4 số thực dương a,b,c,d thoả mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d} \ge 3$. Chứng minh rằng : $abcd \le \frac{1}{81}$.

Giải :

$$\frac{1}{1+a} \ge \left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)+\left(1-\frac{1}{1+d}\right)= \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}$$

$$\frac{1}{1+a} \overset{AM\_GM}{\ge} 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Vậy: $$\begin{cases} \frac{1}{1+a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \\ \frac{1}{1+b} \ge 3\sqrt[3]{\frac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \ge 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \Rightarrow abcd \le \frac{1}{81}$$

Tổng quát :

Cho : $\begin{cases} x_1,\ x_2,\ x_3,............,x_n > 0 \\ \frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+.........+\frac{1}{1+x_n} \ge n-1 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $x_1x_2x_3..........x_n \le \frac{1}{(n-1)^n}$.

Bài tương tự

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$a.$ $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$.

$b.\ \dfrac{a}{a+b^2}+\dfrac{b}{b+c^2}+\dfrac{c}{c+a^2}\ge\dfrac{3}{2}$.

$c.\ \dfrac{a^2}{a+2b^2}+\dfrac{b^2}{b+2c^2}+\dfrac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$.

Hướng dẫn :

$$a.\ \begin{cases} a+b+c=3 \\ 3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2 \Rightarrow ab+bc+ca\le 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+b^2}=\dfrac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{1+b^2} \\ 1+b^2\ge 2b \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{1+b^2}\ge a-\dfrac{ab}{2}$$

Tương tự : $\dfrac{b}{1+c^2}=b-\dfrac{bc^2}{1+c^2}\ge b-\dfrac{bc}{2},\dfrac{c}{1+a^2}=c-\dfrac{ca^2}{1+a^2}\ge c-\dfrac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế : $\dfrac{a}{1+b^2}+\dfrac{b}{1+c^2}+\dfrac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\dfrac{ab+bc+ca}{2}\ge 3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a.b.c=1$. Chứng minh rằng :

$a.\ \dfrac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\dfrac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\dfrac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\dfrac{3}{4}$.

$b.\ \dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}\le 1$

Hướng dẫn :

$a.$

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}$$

Giải :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\Big(\frac{a^2}{b+c}+a\Big)+\Big(\frac{b^2}{c+a}+b\Big)+\Big(\frac{c^2}{a+b}+c\Big)\ge\frac{1}{2}+(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}\ge \frac{1}{2}+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(b+c+a)}{c+a}+\frac{c(c+a+b)}{a+b}\ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge \frac{3}{2} \text{ vì } a+b+c=1.$$

Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$a.$ $\dfrac{ab}{a+b+2c}+\dfrac{bc}{b+c+2a}+\dfrac{ca}{c+a+2b}\le \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn :

$a.$ Dùng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge \dfrac{4}{a+b}$.

Cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng :

$a.$ $\dfrac{a^3}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{b^3}{(b+c)(c+a)}+\dfrac{c^3}{(c+a)(a+b)}\ge \dfrac{1}{4}(a+b+c)$

$b.$ $\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c^3}{a(b+c)}\ge \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

Hướng dẫn :

$a.$ Cách 1 : $\begin{cases}\dfrac{a^3}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{a+b}{8}+\dfrac{b+c}{8}\ge \dfrac{3}{4}a\\ \dfrac{b^3}{(b+c)(c+a)}+\dfrac{b+c}{8}+\dfrac{c+a}{8}\ge \dfrac{3}{4}b\\ \dfrac{c^3}{(c+a)(a+b)}+\dfrac{c+a}{8}+\dfrac{a+b}{8}\ge \dfrac{3}{4}c\end{cases}$ Cách 2: $\begin{cases}\dfrac{8a^3}{(a+b)(b+c)}+(a+b)+(b+c)\ge 6a\\ \dfrac{8b^3}{(b+c)(c+a)}+(b+c)+(c+a)\ge 6b\\ \dfrac{8c^3}{(c+a)(a+b)}+(c+a)+(a+b)\ge 6c\end{cases}$

$b.$ Cách 1: $\begin{cases}\dfrac{4a^3}{b(c+a)}+2b+(c+a)\ge 6a\\ \dfrac{4b^3}{c(a+b)}+2c+(a+b)\ge 6b\\ \dfrac{4c^3}{a(b+c)}+2a+(b+c)\ge 6c\end{cases}$ Cách 2: $\begin{cases}\dfrac{a^3}{b(c+a)}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c+a}{4}\ge \dfrac{3}{2}a\\ \dfrac{b^3}{c(a+b)}+\dfrac{c}{2}+\dfrac{a+b}{4}\ge \dfrac{3}{2}b\\ \dfrac{c^3}{a(b+c)}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b+c}{4}\ge \dfrac{3}{2}c\end{cases}$

Cho 3 số thực dương x,y,z thoả : $x+y+z \ge 3$ .Tìm GTNN của

$$A=\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}$$

$$\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}} \ge \frac{\left(x+y+z\right)^2}{x+y+z+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}.$$

Ta có : $\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy} \le x+y+z$.

Suy ra : $\dfrac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\dfrac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\dfrac{z^2}{z+\sqrt{xy}} \ge \dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{x+y+z+x+y+z}=\dfrac{x+y+z}{2} \ge \dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x=y=z \\ \dfrac{x}{x+\sqrt{yz}}=\dfrac{y}{y+\sqrt{zx}}=\dfrac{z}{z+\sqrt{xy}} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{x^5}{y^3+z^3}+\frac{y^5}{z^3+x^3}+\frac{z^5}{x^3+y^3}+x^4+y^4+z^4$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số ta có :

$$\frac{x^5}{y^3+z^2}+\frac{y^3+z^2}{4}+\frac{x^4}{2} \ge \frac{3}{2}x^3$$

tương tự $\dfrac{y^5}{z^3+x^2}+\dfrac{z^3+x^2}{4}+\dfrac{y^4}{2} \ge \dfrac{3}{2}y^3, \dfrac{z^5}{x^3+y^2}+\dfrac{x^3+y^2}{4}+\dfrac{z^4}{2} \ge \dfrac{3}{2}z^3$

$\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{1}{2} \ge x^2$ tương tự $\dfrac{y^4}{2}+\dfrac{1}{2} \ge y^2, \dfrac{z^4}{2}+\dfrac{1}{2} \ge z^2$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$S=\frac{x^5}{y^3+z^2}+\frac{y^5}{z^3+x^2}+\frac{z^5}{x^3+y^2}+x^4+y^4+z^4 \ge \frac{5}{4}\left(x^3+y^3+z^3\right)+\frac{3}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{3}{2}$$

Mà $x^3+x^3+1 \ge 3x^2$ hay $2x^3+1 \ge 3x^2$ tương tự $2y^3+1 \ge 3y^2$, $2z^3+1 \ge 3z^2$

Do đó , $2\left(x^3+y^3+z^3\right) \ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)-3=6 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 \ge 3 \Rightarrow S \ge \dfrac{9}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Cho 3 số thực dương x,y,z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)}+\frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)}+\frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)}.$$

Giải :

$$(2y+3z)(2z+3y)=6\left(y^2+z^2\right)+13yz\le 6\left(y^2+z^2\right)+\frac{13}{2}\left(y^2+z^2\right)=\frac{25}{2}\left(y^2+z^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)}\ge\frac{2x^2}{25(y^2+z^2)}$$

Tương tự : $\dfrac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)}\ge\dfrac{2y^2}{25(z^2+x^2)},\dfrac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)}\ge\dfrac{2z^2}{25(x^2+y^2)}$.

$$M\ge\frac{2x^2}{25(y^2+z^2)}+\frac{2y^2}{25(z^2+x^2)}+\frac{2z^2}{25(x^2+y^2)}\Rightarrow f\left(x;y;z\right)\ge\frac{1}{25}\Rightarrow \min M=\frac{1}{25}.$$

Với x,y,z là số dương và $x.y.z\ge 1$ .Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}}+\dfrac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}}+\dfrac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn.

Đặt $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y},c=\sqrt{z}$

Bài toán trở thành : a,b,c là số dương và $a.b.c\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Dễ thấy : $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+ac}}+\dfrac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}}\ge\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab}}$ $\left(*\right)$

Bình phương hai vế bất đẳng thức:

$$VT^2\left(*\right)\ge\left[\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab}}\right]^2=\frac{\left(a+b+c\right)^4}{\left[\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab}\right]^2}$$

$$\ge\frac{\left(a+b+c\right)^4}{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^4}{3\left[\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ac\right)\right]}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^4}{3\left[\left(a+b+c\right)^2-3\right]}$$

(Vì $ab+bc+ac\ge 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}\ge 3\Rightarrow t=\left(a+b+c\right)^2\ge 9$)

Ta có: $\dfrac{t^2}{3(t-3)}=\dfrac{3t+15}{12}+\dfrac{t-3}{12}+\dfrac{3}{t-3}\ge\dfrac{3.9+15}{12}+2\sqrt{\dfrac{t-3}{12}.\dfrac{3}{t-3}}=\dfrac{9}{2}\Rightarrow VT^2\left(*\right)\ge\dfrac{9}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1\Rightarrow$ điều phải chứng minh

Tổng quát : ta có bài toán sau: với $x_1,x_2,\dots,x_n\left(n\ge 2\right)$ là số dương và $x_1.x_2\dots x_n\le 1$

Cmr: $\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1+\sqrt{x_2.x_3...x_n}}}+\dfrac{x_2}{\sqrt{x_2+\sqrt{x_3.x_4...x_n}}}+...+\dfrac{x_n}{\sqrt{x_n+\sqrt{x_1.x_2...x_{n-1}}}}\ge\dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

Cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng :

$a.\ \dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{1}{b+3c}+\dfrac{1}{c+3a}\le\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{4c}$.

$b.\ \dfrac{1}{a+b+2c}+\dfrac{1}{b+c+2a}+\dfrac{1}{c+a+2b}\le\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{4b}+\dfrac{1}{4c}$.

$c.\ \dfrac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\dfrac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\dfrac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

$d.\ \dfrac{a-d}{d+b}+\dfrac{b-b}{b+c}+\dfrac{b-c}{c+a}+\dfrac{c-a}{a+d}\ge 0$

Cho $x;y;z\in[0;1]$. Chứng minh rằng : $\left(2^x+2^y+2^z\right)\left(\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}\right)<\dfrac{81}{8}$

Giải :

Đặt $a=2^x,b=2^y,c=2^z\Rightarrow a,b,c\in[1;2]$

Bài toán trở thành : Cho $a,b,c\in[1;2]$. Chứng minh rằng : $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)<\dfrac{81}{8}$.

Thật vậy :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)<\frac{81}{8}\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)<\frac{81}{4}\Leftrightarrow\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)}<\frac{9}{2}$$

$$1\le a\le 2\Leftrightarrow(a-1)(a-2)\le 0\Leftrightarrow a^2-3a+2\le 0\Leftrightarrow a^2+2\le 3a\Leftrightarrow a+\frac{2}{a}\le 3$$

Tương tự : $b+\dfrac{2}{b}\le 3, c+\dfrac{2}{c}\le 3$

$$\Rightarrow(a+b+c)+\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)\le 9\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân :

$$\Rightarrow(a+b+c)+\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)\ge 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2\sqrt{(a+b+c)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}\right)}\le 9\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}\right)\le\dfrac{81}{4}\quad(3)$

Đẳng thức không xảy ra . $(3)\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)<\dfrac{81}{8}$ (đpcm).

Cho a,b,c là 3 số dương thoả mãn $ab+bc+ca=3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}+\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}+\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\le\frac{3}{4}$$

Trích http://www.maths.vn

Giải :

$$ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$$

Với $a,b>0$ ta luôn có $a^3+b^3\ge ab(a+b), \frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

và với mọi a,b ta luôn có $a^2+b^2\ge 2ab$.

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}\le\frac{ab}{ab(a+b)+(a^2+b^2)c}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{(a^2+b^2)c}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{ab(a+b)+(a^2+b^2)c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{ab}{(a^2+b^2)c}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2c}\right)$$

$$\frac{ab}{a^3+b^3+a^2c+b^2c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{8}.\frac{1}{c} \quad (1)$$

Tương tự :

$$\frac{bc}{b^3+c^3+b^2a+c^2a}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{8}.\frac{1}{a} \quad (2)$$

$$\frac{ca}{c^3+a^3+c^2b+a^2b}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{8}.\frac{1}{b} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế đẳng thức $(1),(2)$ và (3) ta được đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Cho tam giác ABC có 3 cạnh : $AB=c, BC=a, AC=b$ thoả mãn $a^3=b^3+c^3$. Chứng minh rằng : A là góc nhọn và thoả : $60^0<A<90^0$.

Giải :

$$\begin{cases}a,b,c>0\\ a^3=b^3+c^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<b<a\\ 0<c<a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\frac{b}{a}<1\\ 0<\frac{c}{a}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{b}{a}\right)^3<\left(\frac{b}{a}\right)^2\\ \left(\frac{c}{a}\right)^3<\left(\frac{c}{a}\right)^2\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{b}{a}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3<\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{b^3+c^3}{a^3}<\frac{b^2+c^2}{a^2}\Rightarrow 1<\frac{b^2+c^2}{a^2}\Rightarrow a^2<b^2+c^2\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0\Rightarrow A<90^0$$

$$a^3=b^3+c^3=(b+c)\left(b^2-bc+c^2\right)>a\left(b^2-bc+c^2\right)\Rightarrow a^2>b^2-bc+c^2$$

$$\Rightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}<1\Rightarrow\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<\frac{1}{2}\Rightarrow A>60^0$$

Vậy $60^0<A<90^0$.

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện : $15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=10\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2007$

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$

Áp dụng đẳng thức : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

$5a^2+2ab+2b^2=(2a+b)^2+(a-b)^2\geq(2a+b)^2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\leq\frac{1}{2a+b}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b$

Tương tự : $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\leq\frac{1}{2b+c}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\leq\frac{1}{2c+a}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\end{cases}$

Do đó $P\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Mặt khác : $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\end{cases}$

Mà giả thiết : $15\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=10\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2007$

Do đó : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\sqrt{\frac{6021}{5}}$

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases}a=b=c\\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\sqrt{\frac{6021}{5}}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$

Vậy max $P=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$, khi $a=b=c=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$