Mục lục

Chương 1. ĐẠI CƯƠNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Mặt phẳng

Mặt phẳng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng, mặt sàn nhà,... cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng.

2. Điểm thuộc mặt phẳng

Cho điểm A và mặt phẳng (α). Khi điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta nói A nằm trên (α) hay mặt phẳng (α) chứa A, hay mặt phẳng (α) đi qua điểm A và kí hiệu $A \in (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 2.

Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3. Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt. thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì có một điểm chung thì chúng còn một điểm chung khác nữa.

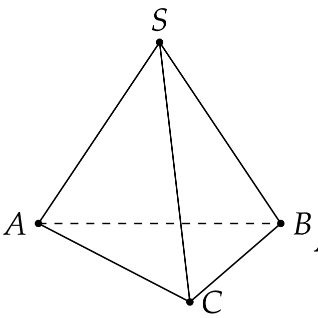
3. Cách xác định một mặt phẳng

Có ba cách xác định một mặt phẳng:

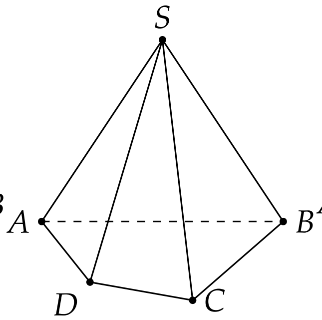
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết mặt phẳng đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết mặt phẳng đi chứa hai đường thẳng cắt nhau.

4. Hình chóp và tứ diện

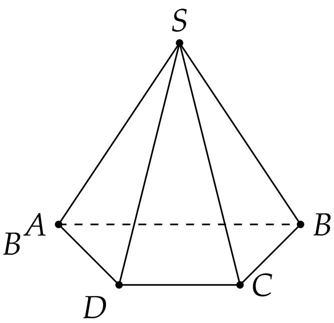
- Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Lấy một điểm S không thuộcmặt phẳng (α) và lần lượt nối điểm S với các đỉnh A_1, A_2, A_3,..., A_n ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2A_3\ldots A_n$.
- S được gọi là đỉnh của hình chóp, đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$, các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1 được gọi là các mặt bên của hình chóp, SA_1, SA_2, SA_3,..., SA_n được gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Tên của hình chóp gọi theo tên của đa giác đáy. Hình chóp tam giác còn gọi là hình tứ diện.
  Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là tứ diện đều.



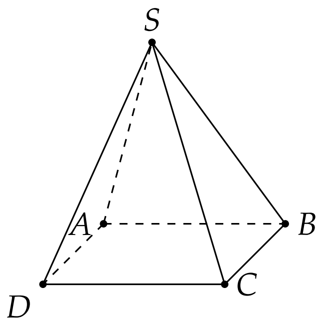
Hình chóp tam giác (hình tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

B. Bài tập rèn luyện

DẠNG 0.1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải: Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt thuộc cả hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

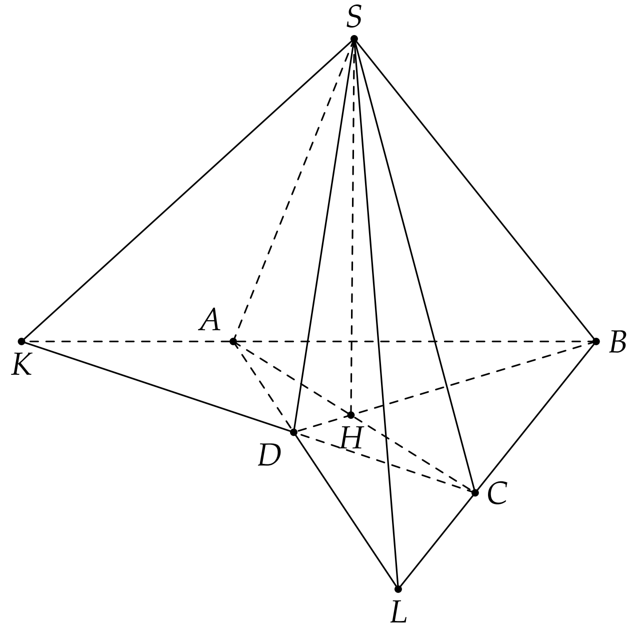
Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

1. Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).
2. Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).
3. Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải.

1. Gọi H là giao điểm của AC với BD.

Khi đó $\begin{cases} H \in AC \\ H \in BD \end{cases} \Rightarrow H \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).
Dễ thấy $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra SH là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC).



2. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng CD và AB.

   Khi đó $\begin{cases} K \in AB \\ K \in CD \end{cases} \Rightarrow K \in (SAB) \cap (SCD)$ (3).
   Dễ thấy $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra SK là giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

3. Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

   Khi đó $\begin{cases} L \in AD \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow L \in (SAD) \cap (SBC)$ (5).
   Dễ thấy $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (6).
   Từ (5) và (6) suy ra SL là giao tuyến hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

□

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (JAD).
2. Lấy điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (DMN).

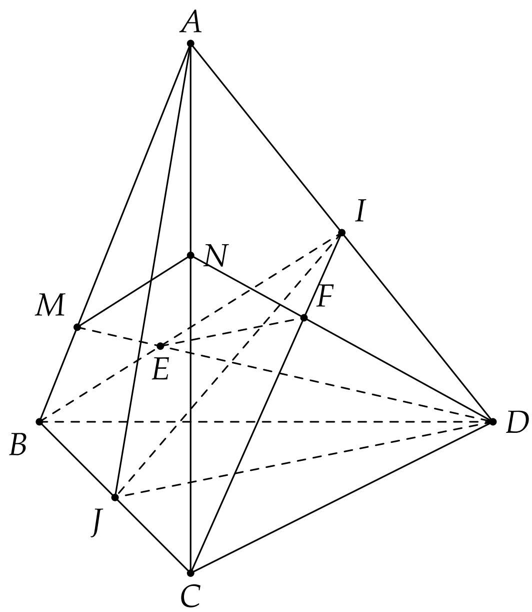
Lời giải.

1. Do giả thiết $I \in AD$ nên $I \in (JAD)$.

   Suy ra $I \in (BCI) \cap (ADJ)$ (1).
   Tương tự, ta có $J \in (BCI) \cap (ADJ)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCI) và (ADJ).

2. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BI.

   Khi đó $\begin{cases} E \in BI \\ E \in DM \end{cases} \Rightarrow E \in (MND) \cap (IBC)$ (3).
   Tương tự, gọi F là giao điểm của DN và CI suy ra $F \in (BCI) \cap (MND)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra EF là giao tuyến hai mặt phẳng (BCI) và (MND).



□

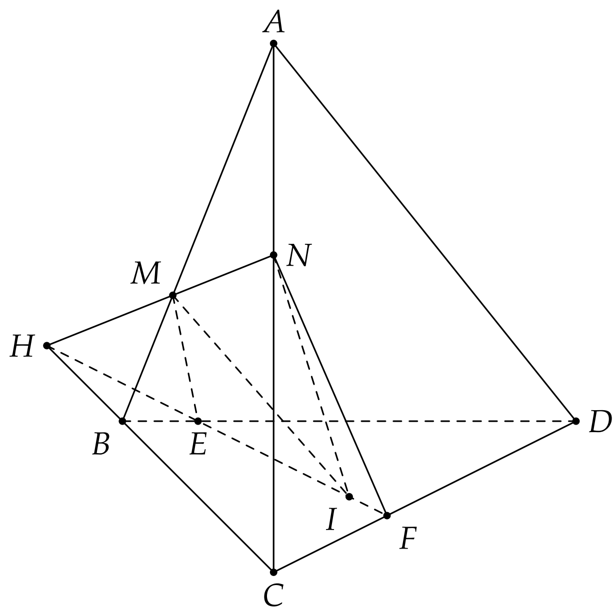
Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC. Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của

1. Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (BCD).
2. Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (ABD).
3. Mặt phẳng (MNI) và mặt phẳng (ACD).

Lời giải.

1. Gọi H là giao điểm của MN và BC.

   Suy ra $H \in (MNI) \cap (BCD)$ (1).
   Do I là điểm trong $\triangle BCD$ nên $I \in (MNI) \cap (BCD)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra IH là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNI) và (BCD).



2. Giả sử E là giao điểm của hai đường thẳng IH và BD.

   Vì $H \in MN$ và $\begin{cases} E \in BD \\ E \in IH \end{cases} \Rightarrow E \in (MNI) \cap (ABD)$ (3).
   Dễ thấy $M \in (ABD) \cap (MNI)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra ME là giao tuyến hai mặt phẳng (ABD) và (MNI).

3. Tương tự, gọi F là giao điểm của hai đường thẳng IH và CD. Ta suy ra $\begin{cases} F \in CD \\ F \in IH \end{cases} \Rightarrow F \in (MNI) \cap (ACD)$ (5).
   Do $N \in AC$ nên $N \in (ACD)$.
   Khi đó $N \in (MNI) \cap (ACD)$ (6).
   Từ (5) và (6) suy ra NF là giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (MNI).

□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang có cạnh AB song song với CD. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Lấy điểm M thuộc cạnh SC. Tìm giao tuyến của

1. Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).
2. Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).
3. Mặt phẳng (ADM) và mặt phẳng (SBC).

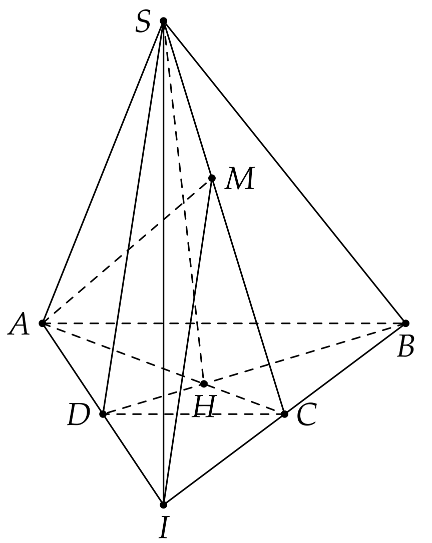
Lời giải.

1. Gọi H là giao điểm của AC và BD.

Suy ra $H \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).
Dễ thấy $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra SH là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

2. Do I là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.
   Nên $\begin{cases} I \in AD \\ I \in BC \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$ (3).
   Dễ thấy $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra SI là giao tuyến hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

3. Do giả thiết ta có $\begin{cases} I \in AD \\ I \in BC \end{cases} \Rightarrow I \in (ADM) \cap (SBC)$ (5).
   Vì $M \in SC$ nên $M \in (SBC)$. Do đó $M \in (ADM) \cap (SBC)$ (6).
   Từ (5) và (6) suy ra IM là giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SBC).



□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của

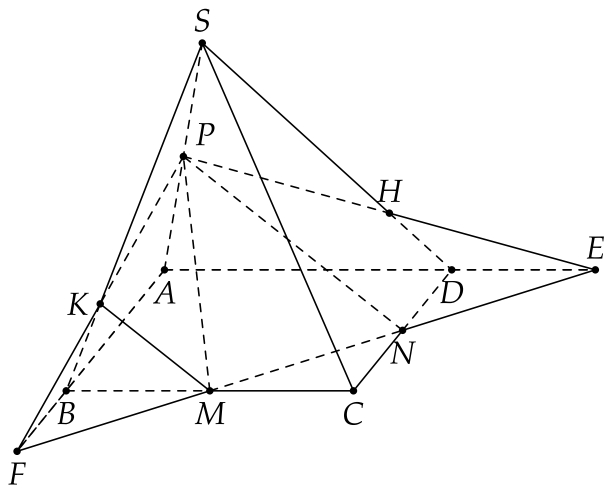
a) (MNP) và (SAB). b) (MNP) và (SBC).

c) (MNP) và (SAD). d) (MNP) và (SCD).

Lời giải.

1. $(MNP) \cap (SAB)$.
   Gọi $F = MN \cap AB$, $E = MN \cap AD$ (vì $MN, AB, AD \subset (ABCD)$)
   Vì $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SA \subset (SAB) \end{cases}$ nên $P \in (MNP) \cap (SAB)$ (1).
   Mặt khác $\begin{cases} F \in MN \subset (MNP) \\ F \in AB \subset (SAB) \end{cases}$ nên $F \in (MNP) \cap (SAB)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (SAB) = PF$.

2. $(MNP) \cap (SAD)$.
   Ta có $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MNP) \cap (SAD)$ (3).
   Mặt khác $\begin{cases} E \in MN \subset (MNP) \\ E \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (SAD)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SAD) = PE$.



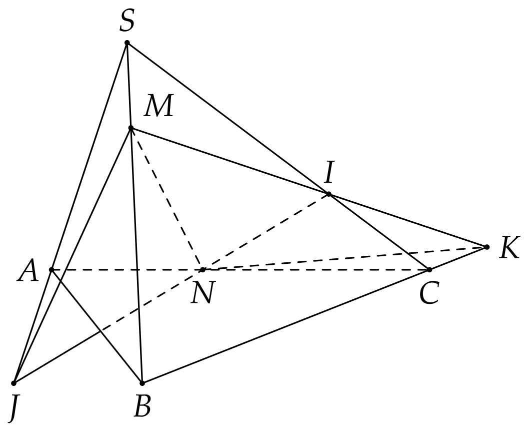
3. Tìm $(MNP) \cap (SBC)$.
   Trong (SAB). Gọi $K = PF \cap SB$. Ta có $\begin{cases} K \in PF \subset (MNP) \\ K \in SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in (MNP) \cap (SBC)$ (5).
   Mặt khác $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (SBC)$ (6).
   Từ (5) và (6) suy ra $(MNP) \cap (SBC) = MK$.

4. Tìm $(MNP) \cap (SCD)$.
   Trong mặt phẳng (SAD). Gọi $H = PE \cap SD$. Ta có $\begin{cases} H \in PE \subset (MNP) \\ H \in SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNP) \cap (SCD)$ (7).
   Mặt khác $\begin{cases} N \in (MNP) \\ N \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNP) \cap (SCD)$ (8).
   Từ (7) và (8) suy ra $(MNP) \cap (SCD) = NH$.

□

Bài 6. Cho tứ diện $SABC$. Lấy $M \in SB$, $N \in AC$, $I \in SC$ sao cho MI không song song với BC, NI không song song với SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt (ABC) và (SAB).

Lời giải.



1. Tìm $(MNI) \cap (ABC)$.
   Vì $\begin{cases} N \in (MNI) \\ N \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ nên $N \in (MNI) \cap (ABC)$ (1).
   Trong (SBC), gọi $K = MI \cap BC$.
   Vì $\begin{cases} K \in MI \subset (MNI) \\ K \in BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow K \in (MNI) \cap (ABC)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $(MNI) \cap (ABC) = NK$.

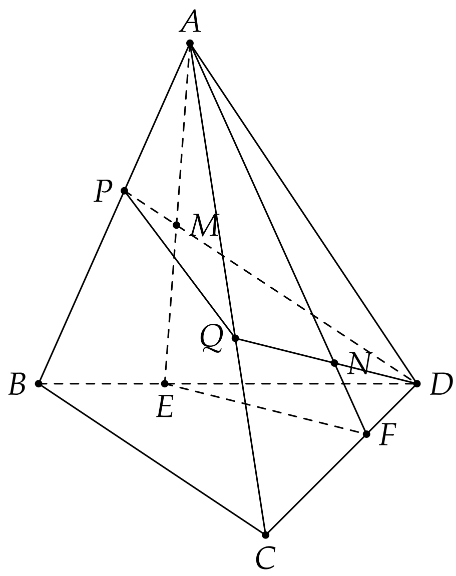
2. Tìm $(MNI) \cap (SAB)$.
   Trong (SAC), gọi $J = NI \cap SA$.
   Ta có $\begin{cases} M \in (MNI) \\ M \in SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNI) \cap (SAB)$ (3).
   Mặt khác $\begin{cases} J \in NI \subset (MNI) \\ J \in SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow J \in (MNI) \cap (SAB)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra $(MNI) \cap (SAB) = MJ$.

□

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) (AMN) và (BCD).
b) (DMN) và (ABC).

Lời giải.



1. Tìm $(AMN) \cap (BCD)$.
   Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$.
   Ta có $\begin{cases} E \in AM \subset (AMN) \\ E \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BCD)$ (1).
   Trong (ACD), gọi $F = AN \cap CD$.
   Ta có $\begin{cases} F \in AN \subset (AMN) \\ F \in CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BCD)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (BCD) = EF$.

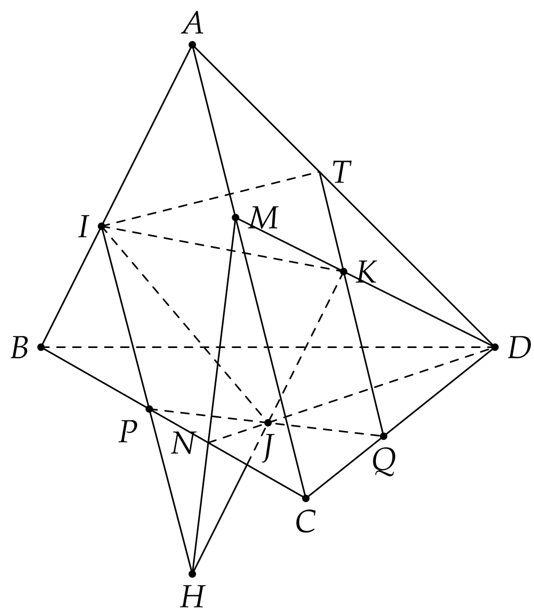
2. Tìm $(DMN) \cap (ABC)$.
   Trong (ABD), gọi $P = DM \cap AB$.
   Ta có $\begin{cases} P \in DM \subset (DMN) \\ P \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (DMN) \cap (ABC)$ (3).
   Trong (ACD), gọi $Q = DN \cap AC$.
   Ta có $\begin{cases} Q \in DN \subset (DMN) \\ Q \in AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (DMN) \cap (ABC)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra $(DMN) \cap (ABC) = PQ$.

□

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy $I \in AB$, J là điểm trong tam giác BCD, K là điểm trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện.

Lời giải.

Gọi $M = DK \cap AC$, $N = DJ \cap BC$, $H = MN \cap KJ$.
Vì $H \in MN \subset (ABC) \Rightarrow H \in (ABC)$.
Gọi $P = HI \cap BC$, $Q = PJ \cap CD$, $T = QK \cap AD$.
Theo cách dựng điểm ở trên ta có
$\begin{cases} (IJK) \cap (ABC) = IP \\ (IJK) \cap (BCD) = PQ \\ (IJK) \cap (ACD) = QT \\ (IJK) \cap (ABD) = TI. \end{cases}$



□

DẠNG 0.2. Tìm thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (P)

Thiết diện là phần chung của mặt phẳng (P) và hình (H).
Xác định thiết diện là xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình (H).
Thường ta tìm giao tuyến đầu tiên của mặt phẳng (P) với một mặt phẳng (α) nào đó thuộc hình (H), giao tuyến này dễ tìm được. Sau đó kéo dài giao tuyến này cắt các cạnh

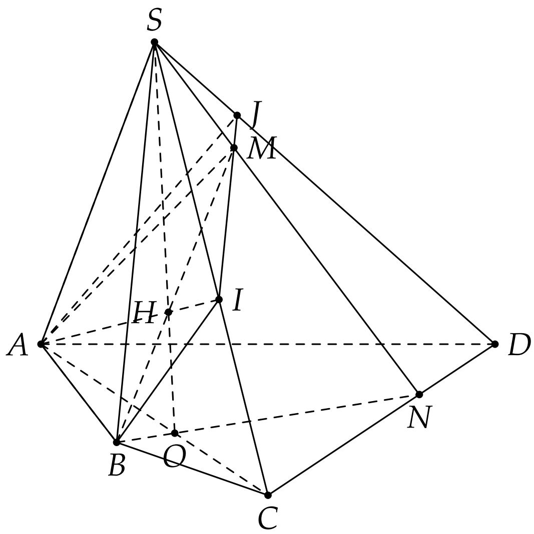
khác của hình (H), từ đó ta tìm được các giao tuyến tiếp theo.
Đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này khép kín thành một thiết diện cần tìm.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là một điểm trong tam giác SCD.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
2. Tìm giao điểm của đường thẳng BM và (SAC).
3. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Lời giải.

1. Tìm $(SBM) \cap (SAC)$.
   Trong (SCD), gọi $N = SM \cap CD$.
   Trong $(ABCD)$, gọi $AC \cap BN = O$.
   Ta có $\begin{cases} O \in BN \subset (SBN) \\ O \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBN)$ (1).
   Mặt khác $S \in (SAC) \cap (SBN)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBN) = SO$.
2. Tìm $BM \cap (SAC)$.
   Gọi $H = BM \cap SO$.
   Ta có $\begin{cases} H \in BM \\ H \in SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow H = BM \cap (SAC)$.



3. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (ABM).
   Trong (SAC), gọi $I = AH \cap SC$. Ta có $\begin{cases} I \in AH \subset (ABM) \\ I \in SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SCD) \cap (ABM)$ (3).
   Mặt khác $M \in (SCD) \cap (ABM)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra $(SCD) \cap (ABM) = IM$.
   Trong (SCD), gọi $J = IM \cap SD$. Khi đó $(SAC) \cap (ABM) = AJ$ và $(SBC) \cap (ABM) = BI$.
   Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $ABIJJ$.

□

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song BC. Gọi O là một điểm trong tam giác BCD.

1. Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD).
2. Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN).
3. Tìm thiết diện của (OMN) với hình chóp.

Lời giải.

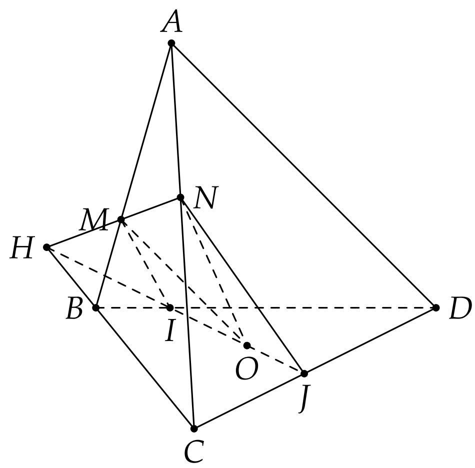
1. Tìm $(OMN) \cap (BCD)$.

Trong (ABC), gọi $H = MN \cap BC$.

Ta có $\begin{cases} H \in MN \subset (MNO) \\ H \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (BCD) \cap (MNO)$ (1).

Mặt khác $O \in (BCD) \cap (MNO)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(BCD) \cap (MNO) = HO$.



2. Tìm $DC \cap (OMN)$ và $BD \cap (OMN)$.

   Trong (BCD), gọi $I = BD \cap HO$.

   Ta có $\begin{cases} I \in BD \\ I \in HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow I = BD \cap (MNO)$.

   Trong (BCD), gọi $J = CD \cap HO$.

   Ta có $\begin{cases} J \in CD \\ J \in HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow J = CD \cap (MNO)$.

3. Tìm thiết diện của (OMN) và hình chóp.

   Ta có $\begin{cases} (ABC) \cap (MNO) = MN \\ (ABD) \cap (MNO) = MI \\ (ACD) \cap (MNO) = NJ \\ (BCD) \cap (MNO) = IJ \end{cases}$. Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNJI$.

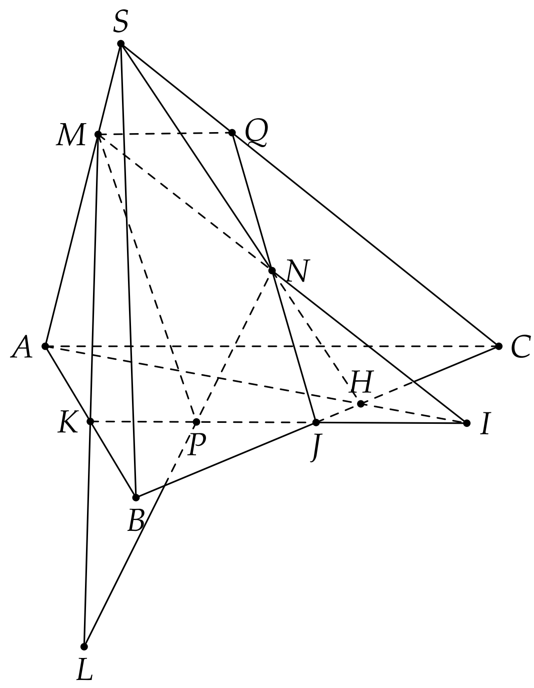
□

Bài 11. Cho tứ diện $SABC$. Gọi $M \in SA$, $N \in (SBC)$, $P \in (ABC)$, không có đường thẳng nào song song.

1. Tìm giao điểm của MN với (ABC), suy ra giao tuyến của (MNP) và (ABC).
2. Tìm giao điểm của AB với (MNP).
3. Tìm giao điểm của NP với (SAB).
4. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

1. Tìm $MN \cap (ABC)$.



Chọn mặt phẳng phụ (SAH) chứa MN.
Tìm $(SAH) \cap (ABC)$.
Ta có $A \in (ABC) \cap (SAH)$ (1).
Trong (SBC), gọi $H = SN \cap BC$.
Ta có $\begin{cases} H \in SN \subset (SAH) \\ H \in BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAH) \cap (ABC)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $(SAH) \cap (ABC) = AH$.
Trong (SAH), gọi $I = MN \cap AH$.
Ta có $\begin{cases} I \in MN \\ I \in AHH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow I = MN \cap (ABC)$.
Tìm $(MNP) \cap (ABC)$.
Ta có $P \in (MNP) \cap (ABC)$ (3).
Mặt khác $I \in (MNP) \cap (ABC)$ (4).
Từ (3) và (4) $\Rightarrow (MNP) \cap (ABC) = PI$.

2. Tìm $AB \cap (MNP)$.
Trong (ABC), gọi $K = AB \cap PI$.
Ta có $\begin{cases} K \in AB \\ K \in PI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K = AB \cap (MNP)$.

3. Tìm $NP \cap (SAB)$.
Trong (MNK), gọi $L = PN \cap MK$. Ta có $\begin{cases} L \in PN \\ L \in MK \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow L = PN \cap (SAB)$.

4. Trong (ABC), gọi $J = BC \cap PI$. Khi đó $(MNP) \cap (SBC) = JN$.
Trong (SBC), gọi $Q = SC \cap JN$. Ta có $\begin{cases} (MNP) \cap (SAB) = MK \\ (MNP) \cap (SBC) = IQ \\ (MNP) \cap (SAC) = MQ \\ (MNP) \cap (ABC) = KJ. \end{cases}$
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MQJK$.

□

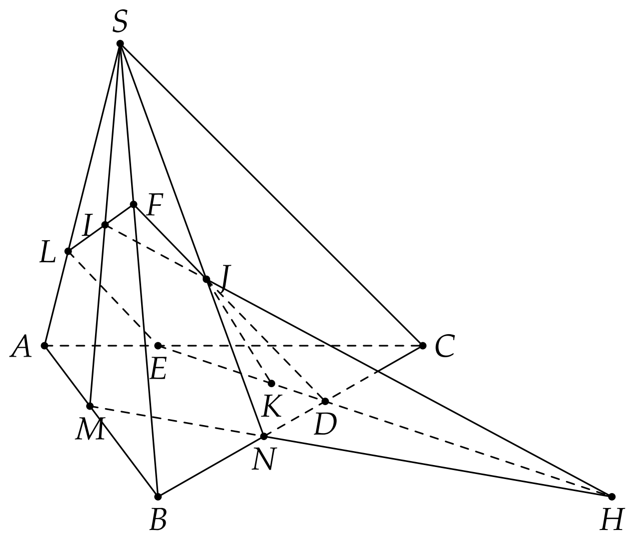
Bài 12. Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, J, K lần lượt là 3 điểm nằm trong ba mặt phẳng (SAB), (SBC), (ABC).

1. Tìm giao điểm của IJ với (ABC).
2. Tìm giao tuyến của (IJK) với các mặt của hình chóp. Từ đó suy ra thiết diện của (IJK) cắt bởi hình chóp.

Lời giải.

1. Tìm giao điểm của IJ với (ABC).

Trong (SAB), gọi $M = SI \cap AB$.
Trong (SBC), gọi $N = SJ \cap BC$.
Suy ra $(SIJ) \cap (ABC) = MN$.
Trong (SIJ), gọi $H = IJ \cap MN$.
Ta có $\begin{cases} H \in IJ \\ H \in MN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H = IJ \cap (ABC)$.



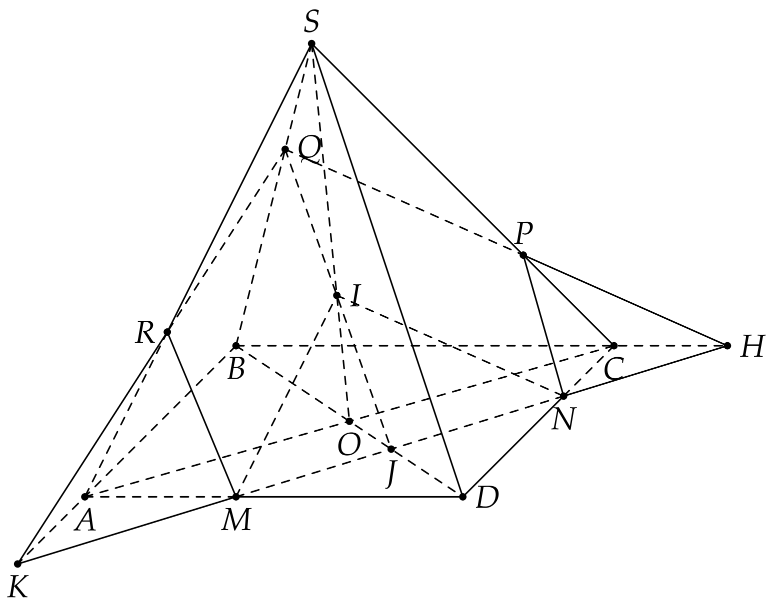
2. Tìm giao tuyến của (IJK) và (ABC).
   Ta có $\begin{cases} K \in (IJK) \cap (ABC) \\ H \in (IJK) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow HK = (IJK) \cap (ABC)$.
   Trong (ABC), gọi $D = HK \cap BC$ và $E = HK \cap AC$.
   + Tìm $(IJK) \cap (SBC)$.
   Ta có $J \in (IJK) \cap (SBC)$ (1). Mặt khác $\begin{cases} D \in HK \subset (IJK) \\ D \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow D \in (IJK) \cap (SBC)$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $DJ = (IJK) \cap (SBC)$.
   + Tìm $(IJK) \cap (SAB)$.
   Ta có $I \in (IJK) \cap (SAB)$ (3).
   Trong (SBC), gọi $F = DJ \cap SB$. Ta có $\begin{cases} F \in DJ \subset (IJK) \\ F \in SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJK) \cap (SAB)$ (4).
   Từ (3) và (4) suy ra $FI = (IJK) \cap (SAB)$.
   + Tìm $(IJK) \cap (SAC)$.
   Trong (SAB), gọi $L = FI \cap SA$. Ta có $\begin{cases} L \in FI \subset (IJK) \\ L \in SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L = (IJK) \cap (SAC)$ (5).
   Trong (ABC), gọi $E = HK \cap AC$. Ta có $\begin{cases} E \in HK \subset (IJK) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJK) \cap (SAC)$ (6).
   Từ (5) và (6) suy ra $LE = (IJK) \cap (SAC)$.
   Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $DFLE$.

$\square$

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I lần lượt nằm trên ba cạnh AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

Lời giải.

Trong $(ABCD)$, gọi $J = BD \cap MN, K = MN \cap AB, H = MN \cap BC$.
Trong (SBD), gọi $Q = IJ \cap SB$.
Trong (SAB), gọi $R = KQ \cap SA$.
Trong (SBC), gọi $P = QH \cap SC$.
Vậy thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.

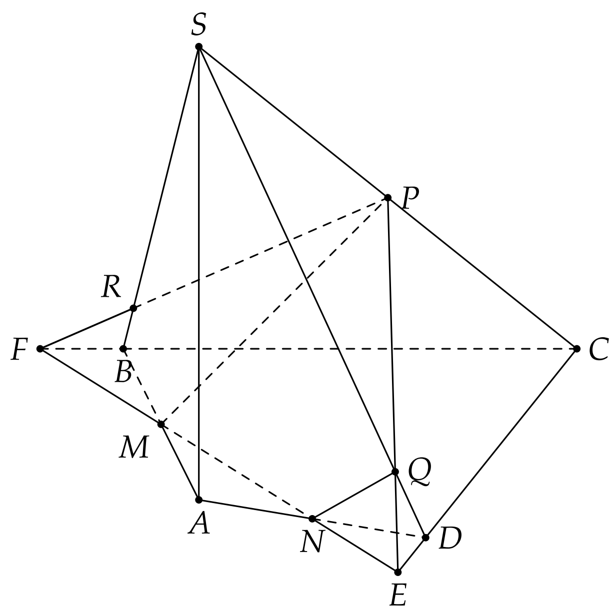


□

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm lấy trên AB, AD và SC. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

Trong $(ABCD)$, gọi $E = MN \cap DC$, $F = MN \cap BC$.
Trong (SCD), gọi $Q = EP \cap SD$.
Trong (SBC), gọi $R = EP \cap SB$.
Vậy thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.



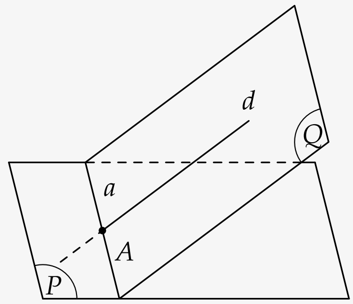
□

DẠNG 0.3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta có hai có hai cách làm như sau

Cách 1: Những bài toán đơn giản, có sẵn một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P). Giao điểm của hai đường thẳng không song song d và a chính là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Cách 2: Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d, sao cho dễ dàng tìm giao tuyến a với mặt phẳng (P). Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) chính là giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến a vừa tìm.

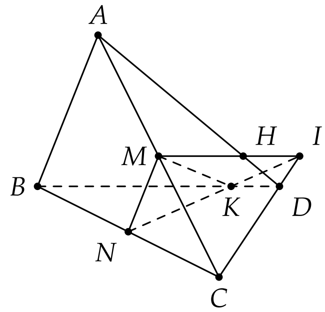


Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm nằm trên BD sao cho $KD < KB$. Tìm giao điểm của CD và AD với mặt phẳng (MNK).

Lời giải.

Tìm giao điểm của CD với mp(MNK).
Các bạn để ý CD và NK cùng thuộc mặt phẳng (BCD) và chúng không song song nên hai đường thẳng này sẽ cắt nhau tại một điểm I, nhưng NK lại thuộc mp(MNK) suy ra I thuộc mp(MNK). Vậy I chính là giao điểm của CD và mp(MNK).
Ta có thể trình bày lời giải như sau:
Trong mặt phẳng (BCD), gọi $I = CD \cap NK$.

Vì $\begin{cases} I \in CD \\ I \in NK, NK \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow I = CD \cap (MNK)$.



Tìm giao điểm của AD và (MNK).
Chọn mặt phẳng (ADC) chứa AD. Sau đó tìm giao tuyến của (ACD) và (MNK), ta trình bày như sau:

$\begin{cases} M \in (MNK) \\ M \in AC, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNK) \cap (ACD)$.

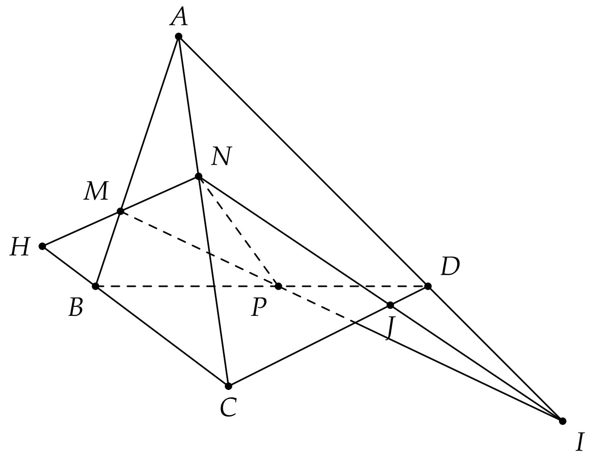
$\begin{cases} I \in NK, NK \subset (MNK) \\ I \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNK) \cap (ACD)$.

Vậy $(MNK) \cap (ACD) = MI$. Gọi $H = MI \cap AD$. Suy ra $H = AD \cap (MNK)$. □

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC, BD lấy lần lượt ba điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC, MP khong song song với AD. Xác định giao điểm của các đường thẳng BC, AD, CD với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

Tìm giao điểm của BC và (MNP).
Trong (ABC), gọi $H = MN \cap BC$.
$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H \in BC \cap (MNP)$.
Tìm giao điểm của AD và (MNP).
Trong (ACD), gọi $I = MP \cap AD$.
$\begin{cases} I \in AD \\ I \in MP, MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I \in AD \cap (MNP)$.
Tìm giao điểm của CD và (MNP).
$\begin{cases} I \in AD, AD \subset (ACD) \\ N \in AC, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow IN \subset (ACD)$.
Trong (ACD) gọi $J = NI \cap CD$.
$\begin{cases} J \in CD \\ I \in NI, NI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow J = CD \cap (MNP)$.



□

Bài 17. Cho tứ diện $ABCD$. trên AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là điểm bên trong tam giác (BCD).

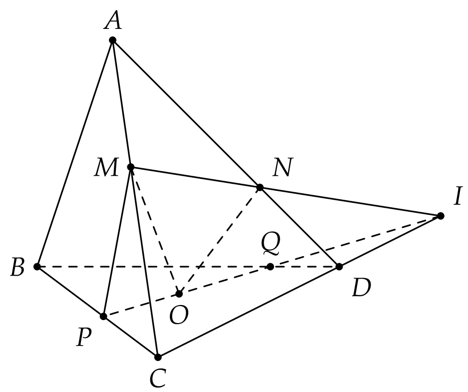
1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và (BCD).
2. Tìm giao điểm của BC với (OMN).
3. Tìm giao điểm của BD với (OMN).

Lời giải.

1. **Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và (BCD).**
Ta có $O \in (OMN) \cap (BCD)$. (1)
Trong (ACD), gọi $I = MN \cap CD$.
$\begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNO) \\ I \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (OMN) \cap (BCD)$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $OI = (OMN) \cap (BCD)$.

2. **Tìm giao điểm của BC với (OMN).**
Trong (BCD), gọi $P = BC \cap OI$. Ta có $P = BC \cap (OMN)$.

3. **Tìm giao điểm của BD với (OMN).**
Trong (BCD), gọi $Q = BD \cap OI$. Ta có $Q = BD \cap (OMN)$.

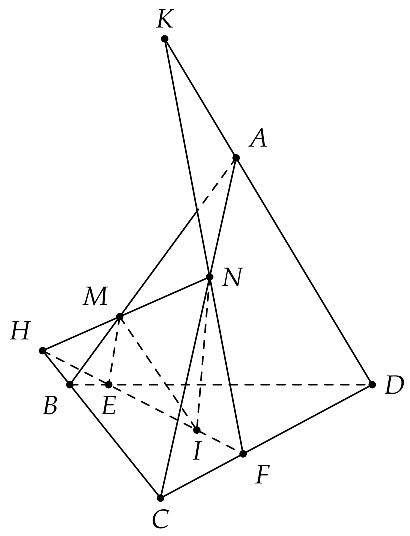


□

Bài 18. Cho tứ diện $ABCD$, lấy $M \in AB$, $N \in AC$ sao cho MN không song song với BC, I là điểm thuộc miền trong $\triangle BCD$. Xác định giao điểm của các đường thẳng BC, BD, CD với (MNI).

Lời giải.

Tìm giao điểm của BC với (MNI).
Trong (ABC), gọi $H = MN \cap BC$.
$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNI) \end{cases} \Rightarrow H = BC \cap (MNI)$.
Tìm giao tuyến của (BCD) với (MNI).
$\begin{cases} H \in MN, MN \in (MNI) \\ H \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNI) \cap (ACD)$. (1)
Lại có $I \in (MNI) \cap (BCD)$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $HI = (MNI) \cap (BCD)$.
Tìm giao điểm của BD với (MNI).
Trong (BCD), gọi $E = HI \cap BD$.
$\begin{cases} E \in BD \\ E \in HI, HI \subset (MNI) \end{cases} \Rightarrow E = BD \cap (MNI)$.
Tìm giao điểm của CD với (MNI).
Trong (BCD), gọi $F = HI \cap CD$.
$\begin{cases} F \in CD \\ F \in HI, HI \subset (MNI) \end{cases} \Rightarrow F = CD \cap (MNI)$. □

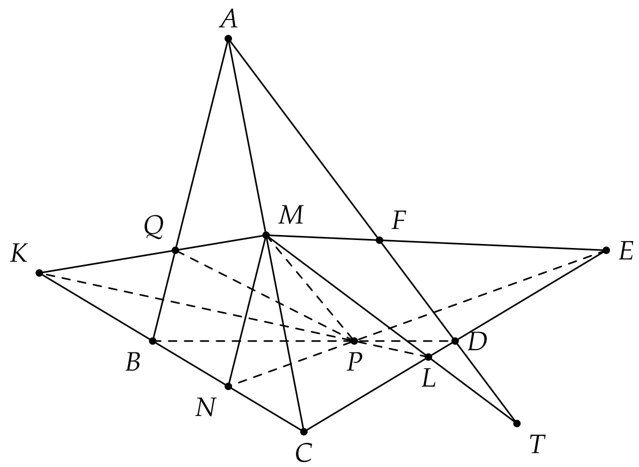


Bài 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của các cạnh AC, BC. Trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Lấy Q thuộc AB sao cho QM cắt BC. Tìm

1. giao điểm của CD và (MNP).
2. giao điểm của AD và (MNP).
3. giao tuyến của (MPQ) và (BCD).
4. giao điểm của CD và (MPQ).
5. giao điểm của AD và (MPQ).

Lời giải.

1. **Tìm giao điểm của CD và (MNP).**
   Trong (BCD), gọi $E = CD \cap NP$.
   $\begin{cases} E \in CD \\ E \in NP, NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E = CD \cap (MNP)$.
2. **Tìm giao điểm của AD và (MNP).**
   Tìm giao tuyến của (ACD) và (MNP).
   $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in AC, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (ACD)$. (1)
   $\begin{cases} E \in NP, NP \subset (MNP) \\ E \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (ACD)$. (2)
   Từ (1) và (2) ta có $EM = (MNP) \cap (ACD)$.
   Trong (ACD), gọi $F = AD \cap EM$.
   Suy ra $F = AD \cap (MNP)$.



3. **Tìm giao tuyến của (MPQ) và (BCD).**
Trong (ABC), gọi $K = QM \cap BC$.
$$\begin{cases} K \in BC, BC \subset (BCD) \\ K \in QM, QM \subset (MPQ) \end{cases} \Rightarrow K \in (MPQ) \cap (BCD). \quad (3)$$
$$\begin{cases} P \in BD, BD \subset (BCD) \\ P \in (MPQ) \end{cases} \Rightarrow P \in (MPQ) \cap (BCD). \quad (4)$$
Từ (3) và (4) ta có $KP = (MPQ) \cap (BCD)$.

4. **Tìm giao điểm của CD và (MPQ).**
Trong (BCD) gọi $L = KP \cap CD$.
$$\begin{cases} L \in CD \\ L \in KP, KP \subset (MPQ) \end{cases} \Rightarrow L = CD \cap (MPQ).$$

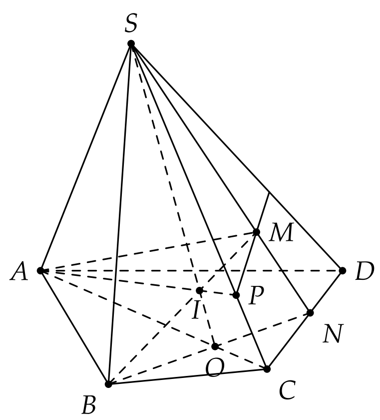
5. **Tìm giao điểm của AD và (MPQ).**
Tương tự như trên, ta tìm được $ML = (PQ) \cap (ACD)$.
Trong (ACD), gọi $T = AD \cap ML$. Suy ra $T = AD \cap (MPQ)$.

□

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong tam giác SCD.

1. Tìm giao điểm N của CD và (SBM).
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).
3. Tìm giao điểm I của BM và (SAC).
4. Tìm giao điểm P của SC và (ABM). Từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).

Lời giải.



1. **Tìm giao điểm N của CD và (SBM).**
Trong (SCD), gọi $N = SM \cap CD$.
$$\begin{cases} N \in CD \\ N \in SM, SM \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow N = CD \cap (SBM).$$

2. **Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).**
Ta có một lưu ý rằng $(SBN) \equiv (SBM)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BN$.
$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BN, BN \subset (SBN) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBN). \quad (1)$$
Lại có $S \in (SAC) \cap (SBN)$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $SO = (SAC) \cap (SBN)$.

3. **Tìm giao điểm I của BM và (SAC).**
Trong (SBN), gọi $I = BM \cap SO$.
$$\begin{cases} I \in BM \\ I \in SO, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I = BM \cap (SAC).$$

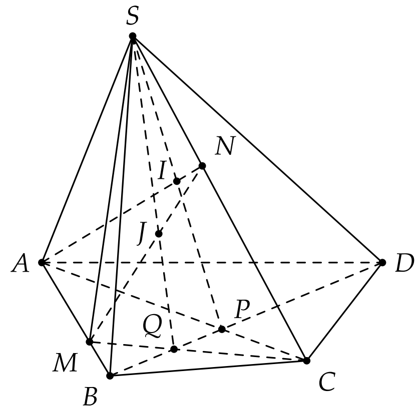
4. **Tìm giao điểm P của SC và (ABM). Từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).** Ta có $(ABM) \cap (SAC) = AI$.
Trong (SAC), gọi $P = AI \cap SC$. Suy ra $P = SC \cap (ABM)$. Khi đó $(SCD) \cap (ABM) = MP$.

□

Bài 21. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn AB lấy một điểm M, trên đoạn SC lấy một điểm N (M, N không trùng với các đầu mút).

1. Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD).
2. Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

Lời giải.



1. **Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD).**
   - Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset AN$. Ta tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).
     Trong $(ABCD)$ gọi $P = AC \cap BD$. Suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SP$.
   - Trong (SAC) gọi $I = AN \cap SP$.
     $\begin{cases} I \in AN \\ I \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$.
2. **Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).**
   - Chọn mặt phẳng phụ $(SMC) \supset MN$. Ta tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD).
     Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MC \cap BD$. Suy ra $(SMC) \cap (SBD) = SQ$.
   - Trong (SMC) gọi $J = MN \cap SQ$.
     $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SQ, SQ \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$.

□

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB, SD.

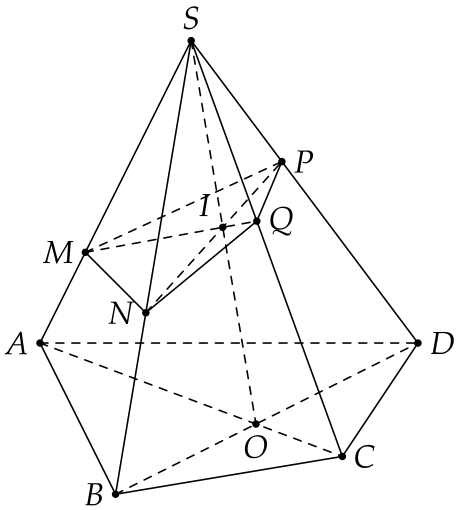
1. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP).
2. Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

1. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP).

Trong mặt phẳng (SBD), gọi $I = SO \cap NP$, có

$$\begin{cases} I \in SO \\ I \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP).$$



2. Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP).
   - Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset SC$.
   - Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP).

   Ta có $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in SA,\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (SAC)$. (1)

   Và $\begin{cases} I \in SP,\ SP \subset (MNP) \\ I \in SO,\ SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNP) \cap (SAC)$. (2)

   Từ (1) và (2) có $(MNP) \cap (SAC) = MI$.

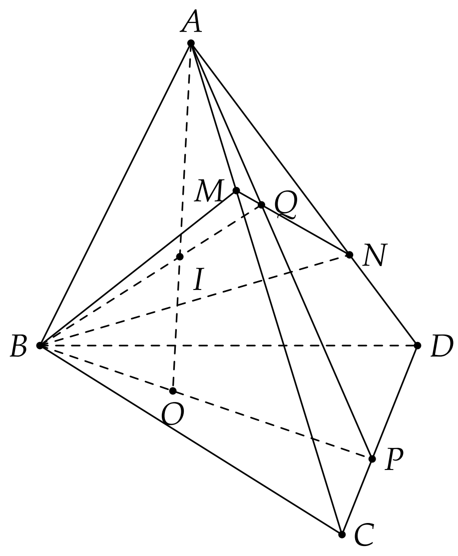
   - Trong mặt phẳng (SAC) gọi $Q = SC \cap MI$, có $\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in MI,\ MI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (MNP)$.

□

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên AC và AD. O là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao điểm của

1. MN và mặt phẳng (ABO).
2. AO và mặt phẳng (BMN).

Lời giải.



1. Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng (ABO).
   • Chọn mặt phẳng phụ $(ACD) \supset MN$.
   • Tìm giao tuyến của (ACD) và (ABO).
   Ta có A là điểm chung của (ACD) và (ABO). (1)
   Trong mặt phẳng (BCD), gọi $P = BO \cap CD$, ta có
   $\begin{cases} P \in BO,\ BO \subset (ABO) \\ P \in CD,\ CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow P \in (ABO) \cap (ACD).$
   (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(ACD) \cap (ABO) = AP$.
   • Trong (ACD), gọi $Q = AP \cap MN$, có

   $$\begin{cases} Q \in MN \\ Q \in AP,\ AP \subset (ABO) \end{cases} \Rightarrow MN \cap (ABO) = Q.$$

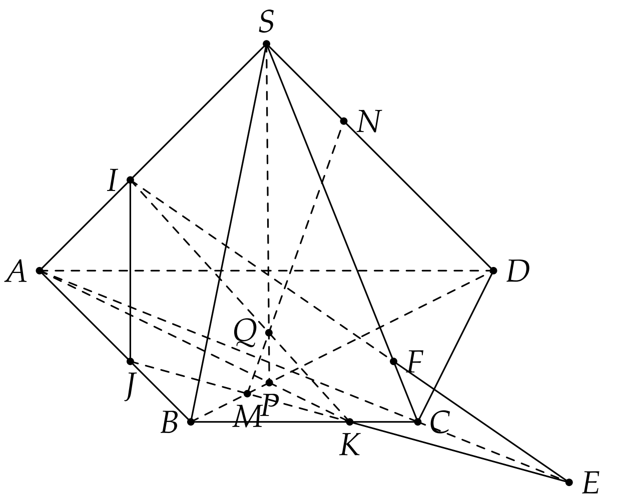
2. Tìm giao điểm của AO và mặt phẳng (BMN).
   • Chọn mặt phẳng $(ABP) \supset AO$.
   • Tìm giao tuyến của (ABP) và (BMN).
   Ta có B là điểm chung của (ABP) và (BMN). (3)
   $\begin{cases} Q \in MN,\ MN \subset (BMN) \\ Q \in AP,\ AP \subset (ABP) \end{cases} \Rightarrow Q \in (ABP) \cap (BMN).$ (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $(ABP) \cap (BMN) = BQ$.
   Gọi $I = BQ \cap AO$ (vì $BQ,\ AO \in (ABP)$), có
   $\begin{cases} I \in AO \\ I \in BQ,\ BQ \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow I = AO \cap (BMN).$

□

Bài 24. Trong mặt phẳng (α) cho hình thang $ABCD$, đáy lớn AD. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm trên SA, AB, BC (K không là trung điểm BC). Tìm giao điểm của

1. IK và (SBD).
2. SD và (IJK).
3. SC và (IJK).

Lời giải.



1. Tìm giao điểm của IK và mặt phẳng (SBD).
   • Chọn mặt phẳng phụ $(SAK) \supset IK$.
   • Tìm giao tuyến của (SAK) và (SBD).
   Ta có S là điểm chung của (SAK) và (SBD). (1)
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $P = AK \cap BD$, ta có
   $\begin{cases} P \in AK,\ AK \subset (SAK) \\ P \in BD,\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow P \in (SAK) \cap (SBD)$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(SAK) \cap (SBD) = SP$.
   • Trong (SAK), gọi $Q = IK \cap SP$, có

$$\begin{cases} Q \in IK \\ Q \in SP,\ SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow Q = IK \cap (SBD).$$

2. Tìm giao điểm của SD và mặt phẳng (IJK).
   • Chọn mặt phẳng phụ $(SBD) \supset SD$.
   • Tìm giao tuyến của (SBD) và (IJK).
   Ta có Q là điểm chung của (SBD) và (IJK). (3)
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = JK \cap BD \Rightarrow M$ là điểm chung của (IJK) và (SBD). (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $(IJK) \cap (SBD) = QM$. • Trong mặt phẳng (SBD), gọi $N = QM \cap SD$.
   Ta có $\begin{cases} N \in SD \\ I \in QM,\ QM \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (IJK)$.

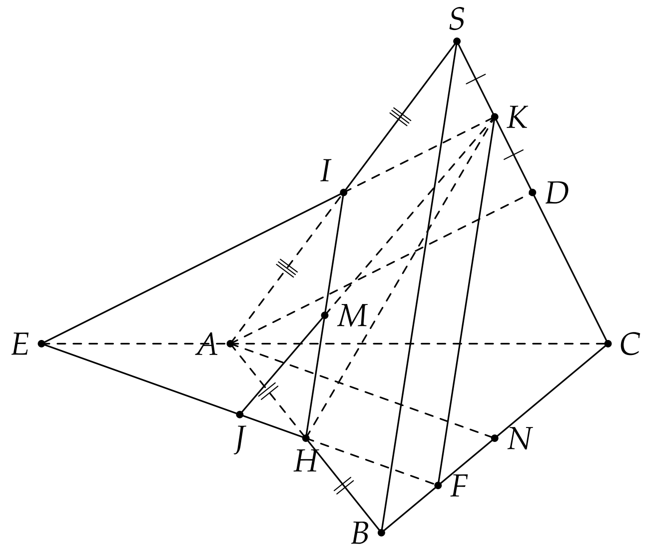
3. Tìm giao điểm của SC và mặt phẳng (IJK).
   • Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset SC$.
   • Tìm giao tuyến của (SAC) và (IJK).
   Ta có $\begin{cases} I \in (IJK) \\ I \in SA,\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (IJK) \cap (SAC)$. (5)
   Gọi $E = AC \cap JK$ (vì $AC,\ JK \subset (ABCD)$). Vậy $E \in (IJK) \cap (SAC)$. (6)
   Từ (5) và (6) suy ra $(IJK) \cap (SAC) = IE$.
   • Trong mặt phẳng (SAC), gọi $F = IE \cap SC$. Ta có $\begin{cases} F \in SC \\ F \in IE,\ IE \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow F = SC \cap (IJK)$.

□

Bài 25. Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên cạnh SC lấy điểm K sao cho $CK = 3SK$.

1. Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK). Tính tỉ số $\dfrac{FB}{FC}$.
2. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng IH. Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải.



1. Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK). Tính tỉ số $\dfrac{FB}{FC}$.
   - Ta tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK) trước.
   Gọi $E = AC \cap KI$ $(AC, KI \subset (SAC))$, ta có
   $\begin{cases} E \in AC, AC \subset (ABC) \\ E \in KI, KI \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow E \in (ABC) \cap (IHK).$ (1)
   $\begin{cases} H \in (IHK) \\ H \in AB, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (IHK).$ (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $EH = (ABC) \cap (IHK)$.
   - Gọi $F = EH \cap BC$ $(EH, BC \subset (ABC))$, có

   $$\begin{cases} F \in BC \\ F \in EH, EH \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow F = BC \cap (IHK).$$

   Gọi D là trung điểm của SC, ta có IK là đường trung bình của $\triangle SAD$.
   Trong $\triangle CEK$ có $\dfrac{CA}{AE} = \dfrac{CD}{DK} = 2 \Rightarrow CA = 2CK$.
   Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $AN \parallel EF$ $(N \in BC)$. Ta có

   $$HF \parallel AN \Rightarrow \frac{BH}{HA} = \frac{BF}{FN} = 1 \Rightarrow BF = FN.$$
   $$EF \parallel AN \Rightarrow \frac{CA}{AE} = \frac{CN}{NF} = 2 \Rightarrow CN = 2NF.$$

   Do đó $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{FB}{FN + NC} = \dfrac{FB}{3FB} = \dfrac{1}{3}$.

2. Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC).
   Ta có $KM \subset (IHK)$. Gọi $J = KM \cap EH$ $(EH, KM \subset (IHK))$.
   Ta có $\begin{cases} J \in KM \\ J \in EH, EH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow J = KM \cap (ABC)$.

□

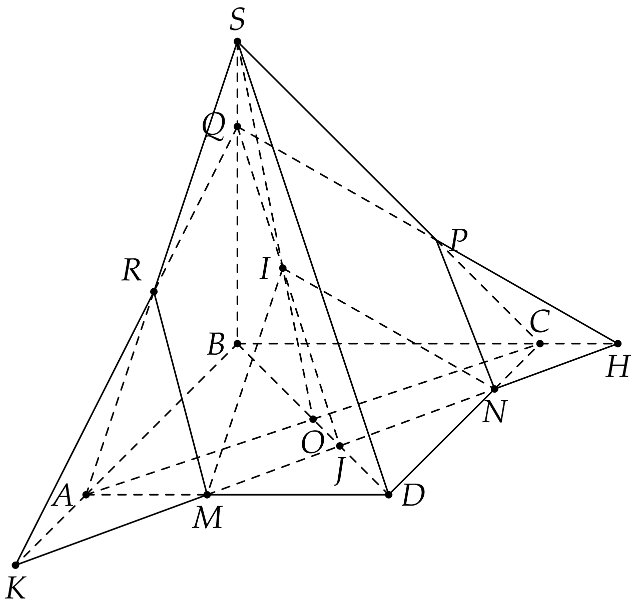
DẠNG 0.4. Tìm thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (P).

Phương pháp giải

Bài 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I lần lượt nằm trên ba cạnh AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $J = BD \cap MN$, $K = MN \cap AB$, $H = MN \cap BC$.
Trong mặt phẳng (SBD), gọi $Q = IJ \cap SB$.
Trong mặt phẳng (SAB), gọi $R = KQ \cap SA$.
Trong mặt phẳng (SBC), gọi $P = QH \cap SC$.
Vậy, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNI) là ngũ giác $MNPQR$.

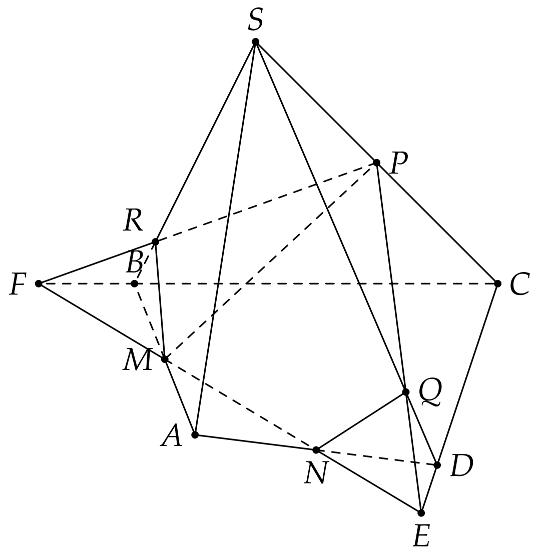


□

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm lấy trên AB, AD và SC. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = MN \cap DC$, $F = MN \cap BC$.
Trong mặt phẳng (SCD), gọi $Q = EP \cap SD$.
Trong mặt phẳng (SBC), gọi $R = FP \cap SB$.
Vậy, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNQPR$.

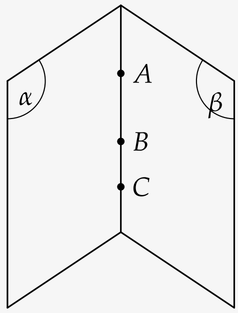


□

DẠNG 0.5. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui, chứng minh một điểm thuộc một đường thẳng cố định.

- Phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng:

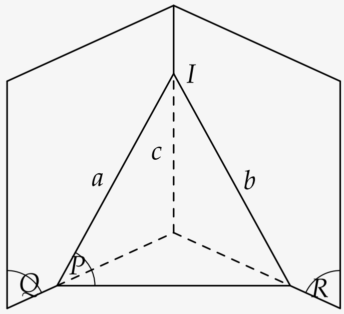
Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì suy ra ba điểm A, B, C nằm trên giao tuyến của (α) và (β), nên chúng thẳng hàng.



• Phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy:
Ta tìm giao điểm của hai đường thẳng trong ba đường thẳng đã cho, rồi chứng minh giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ ba. Cụ thể như sau:
Chọn một mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (a) và (b). Gọi $I = (a) \cap (b)$.

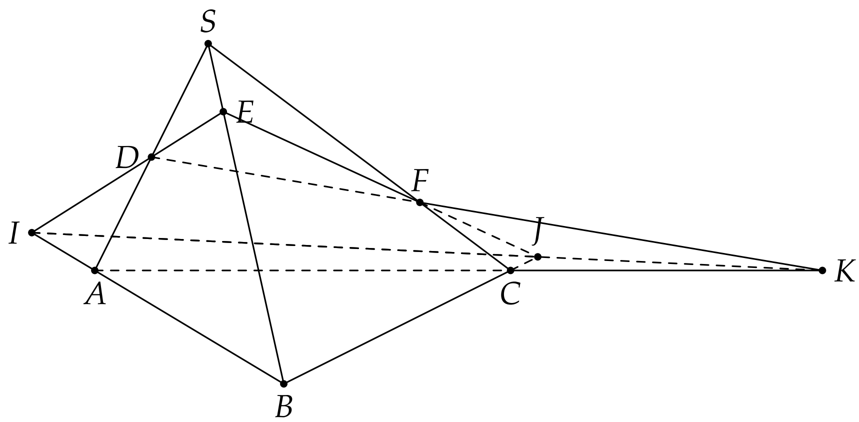
Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (a), tìm một mặt phẳng (R) chứa đường thẳng (b), sao cho $(c) = (Q) \cap (R) \Rightarrow I \in (c)$.
Vậy, ba đường thẳng (a), (b), (c) đồng quy tại điểm I.

$$\begin{cases} (a),\ (b) \subset (P) \\ (a) \cap (b) = I \\ (P) \cap (Q) = (a) \\ (P) \cap (R) = (b) \\ (Q) \cap (R) = (c) \end{cases} \Rightarrow (a) \cap (b) \cap (c) = I.$$



Bài 28. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có

• $\begin{cases} I = AB \cap DE\,(AB,\ DE \subset (SAB)) \\ I \in AB,\ AB \subset (ABC) \\ I \in DE,\ DE \subset (DEF) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC) \cap (DEF).$ (1)

• $\begin{cases} K = AC \cap DF\,(AC,\ DF \subset (SAC)) \\ I \in AC,\ AC \subset (ABC) \\ K \in DF,\ DF \subset (DEF) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABC) \cap (DEF).$ (2)

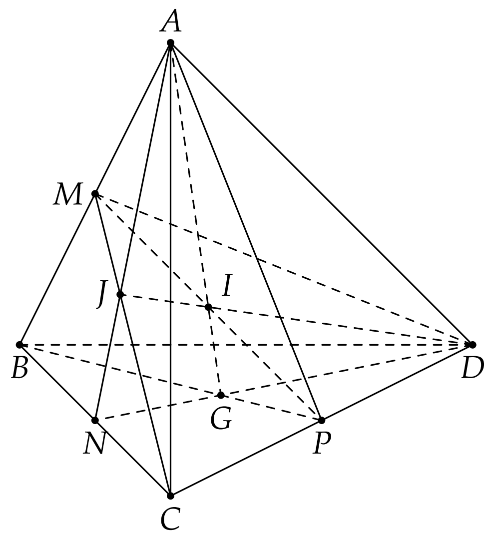
• $\begin{cases} J = BC \cap EF\,(BC,\ EF \subset (SBC)) \\ J \in BC,\ BC \subset (ABC) \\ J \in EF,\ EF \subset (DEF) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABC) \cap (DEF).$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba điểm I, J, K thẳng hàng. □

Bài 29. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD, Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

1. Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).
2. Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải.



1. Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).
   $A \in (ABP) \cap (ADN)$. (1)
   Ta có $G = BP \cap DN$, có $\begin{cases} G \in BP,\ BP \subset (ABP) \\ G \in DN,\ DN \subset (ADN) \end{cases} \Rightarrow G \in (ABP) \cap (ADN)$. (2)
   Từ (1) và (2) ta có $AG = (ABP) \cap (ADN)$.

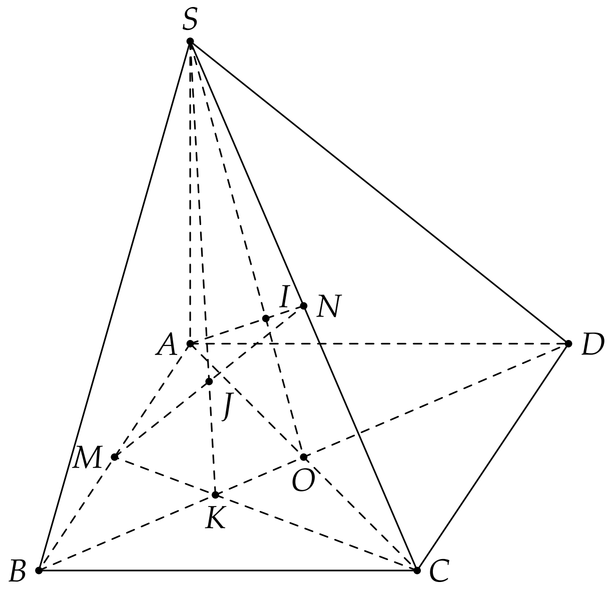
2. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.
   $I = AG \cap MP$, $AG \subset (ADG)$, $MP \subset (DMN) \Rightarrow I \in (ADG) \cap (DMN)$. (3)
   $J = CM \cap AN$, $AN \subset (ADG)$, $CM \subset (DMN) \Rightarrow J \in (ADG) \cap (DMN)$. (4)
   $D \in (ADG) \cap (DMN)$. (5)
   Từ (3), (4), (5) suy ra ba điểm D, I, J thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ADG) và (DMN).
   Vậy ba điểm D, I, J thẳng hàng.

□

Bài 30. Cho hình bình hành $ABCD$. S là điểm không thuộc $(ABCD)$, M và N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và SC.

1. Xác định giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.
2. Xác định giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.
3. Chứng minh ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Lời giải.



1. Xác định giao điểm $I = AN \cap (SBD)$.
   • Chọn mặt phẳng phụ (SAC) chứa AN. Ta tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi O là giao điểm của AC và BD. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung là S và O.
   Vậy $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
   • Trong mặt phẳng (SAC) gọi $I = AN \cap SO$. Ta có $I = AN \cap (SBD)$.

2. Xác định giao điểm $J = MN \cap (SBD)$.
   • Chọn mặt phẳng phụ (SMC) chứa MN. Ta tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD).
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi K là giao điểm của MC và BD. Hai mặt phẳng (SMC) và (SBD) có hai điểm chung là S và K.
   Vậy $(SMC) \cap (SBD) = SK$.
   • Trong mặt phẳng (SMC) gọi $J = MN \cap SK$. Ta có $J = MN \cap (SBD)$.

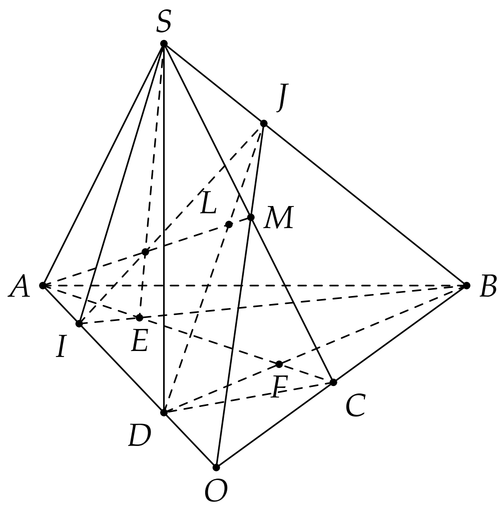
3. Chứng minh ba điểm I, J, B thẳng hàng.
   • Ta có B là điểm chung của (ABN) và (SBD). (1)
   • $\begin{cases} I \in SO,\ SO \subset (SBD) \\ I \in AN,\ AN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD).$ (2)
   • $\begin{cases} J \in SK,\ SK \subset (SBD) \\ J \in MN,\ MN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABN) \cap (SBD).$ (3)
   Từ (1), (2) và (3) suy ra ba điểm I, J, B thẳng hàng.

□

Bài 31. Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB, AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M.

1. Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.
2. Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.
3. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

Lời giải.



1. Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.
Chọn mặt phẳng phụ (SIB) chứa IJ.
Tìm giao tuyến của (SIB) và (SAC).
có $S \in (SBI) \cap (SAC)$ (1)
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap BI$, ta có:
$$\begin{cases} E \in AC,\ AC \subset (SAC) \\ E \in BI,\ BI \subset (SBI) \end{cases} \Rightarrow E = (SAC) \cap (SBI) \quad (2)$$
Từ (1) và (2) suy ra $SE = (SBI) \cap (SAC)$.
Trong mặt phẳng (SIB), gọi $K = IJ \cap SE$.
Ta có $\begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE, SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$
2. Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.
Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa DJ. Tìm giao tuyến của (SBD) với (SAC).
Ta có $S \in (SBD) \cap (SAC)$ (3)

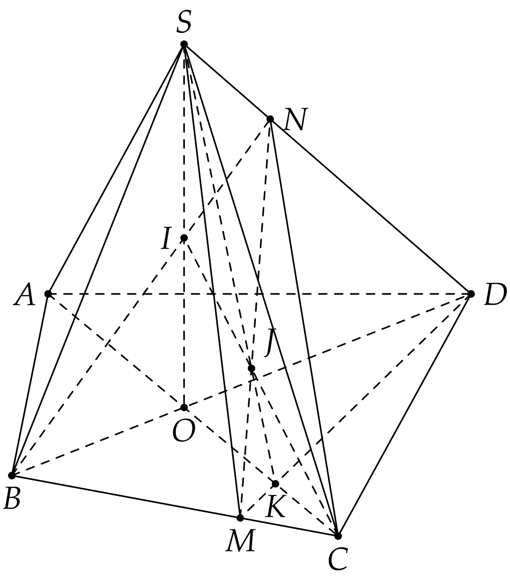
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $F = AC \subset BD$. Suy ra F là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC). (4)
Từ (3) và (4) suy ra $SF = (SBD) \subset (SAC)$. Trong mặt phẳng (SBD) gọi $L = DJ \cap SF$.
Vậy $\begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF,\ SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$
3. Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.
Ta có $A \in (SAC) \cap (AJO)$ (3)
và $\begin{cases} K \in IJ,\ IJ \subset (AJO) \\ K \in SE,\ SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (AJO).$ (4)
có $\begin{cases} L \in DJ,\ DJ \subset (AJO) \\ L \in SF,\ SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in (SAC) \cap (AJO)$ (5)
có $\begin{cases} M \in JO,\ JO \subset (AJO) \\ M \in SC,\ SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (AJO)$ (6)
Từ (3), (4), (5) và (6) suy ra bốn điểm A, K, L, M cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (AJO). Vậy A, K, L, M thẳng hàng. □

Bài 32. Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm trên BC và SD.

1. Tìm giao điểm $J = BN \cap (SAC)$
2. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$
3. Chứng minh rằng C, I, J thẳng hàng.

Lời giải.

1. Tìm giao điểm $I = BN \cap (SAC)$
Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa BN.
Tìm giaio tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC). Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$.
Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung là S và O. Vậy giao tuyến của chúng là SO.
Trong mặt phẳng (SBD) gọi $I = BN \cap SO$.
Ta có $\begin{cases} I \in BN \\ I \in SO,\ SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I = BN \cap (SAC)$.
2. Tìm giao điểm $J = MN \cap (SAC)$.
Chọn mặt phẳng phụ (SMD) chứa MN. Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAC).
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $K = AC \cap DM$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SMD) có hai điểm chung là S và K.
Vậy giao tuyến của chúng là SK.
Trong mặt phẳng SMD, gọi $J = MN \cap SK$. Ta có $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SK,\ SK \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SAC)$
3. Chứng minh C, I, J thẳng hàng.

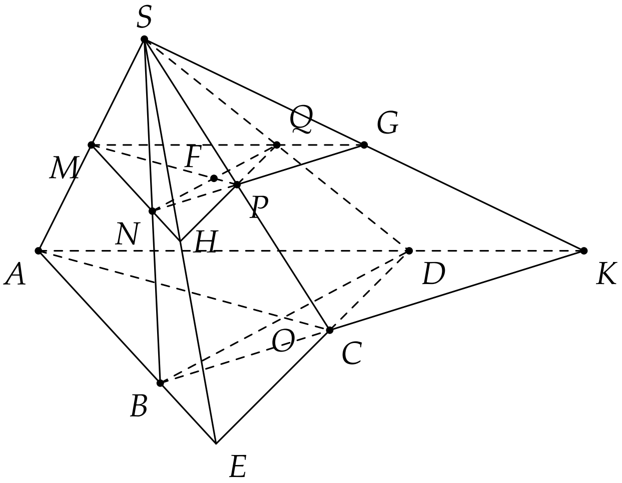


Theo cách tìm điểm ở những câu trên, ta có ba điểm C, I, J là điểm chung của hai mặt phẳng (BCN) và (SAC) $\Rightarrow$ Ba điểm C, I, J cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (BCN) và (SAC). Kết luận C, I, J thẳng hàng. □

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Gọi $E = AB \cap CD$, $K = AD \cap BC$

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(SAC) \cap (SBD)$, $(MNP) \cap (SBD)$.
2. Tìm giao điểm Q của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNP).
3. Gọi $H = NM \cap PQ$. Chứng minh ba điểm S, H, E thẳng hàng.
4. Chứng minh ba đường thẳng SK, QM, NP đồng quy.

Lời giải.

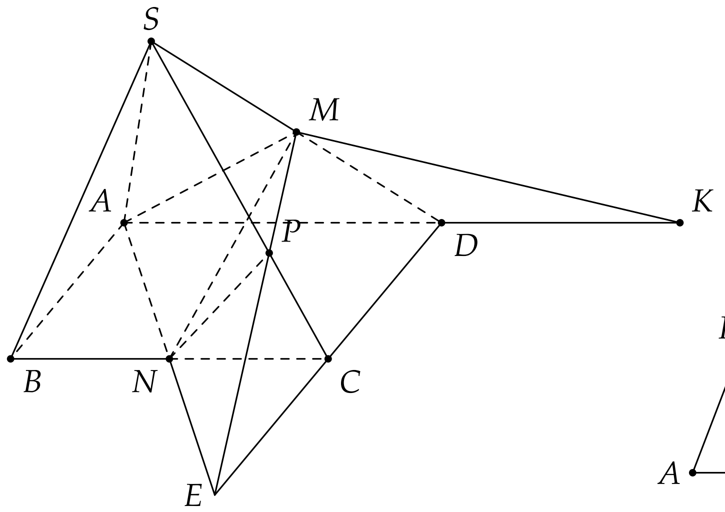


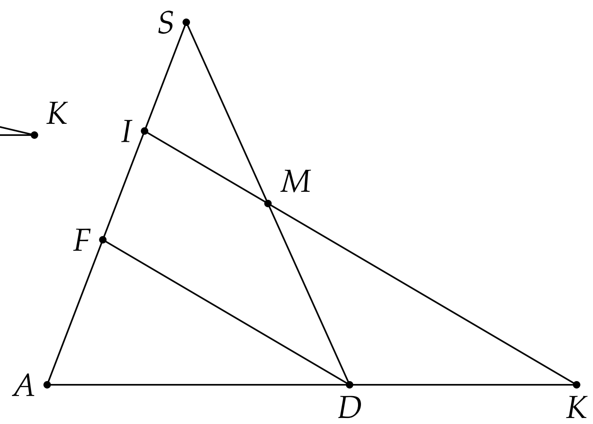
1. Tìm giao tuyến của $(SAC) \cap (SBD)$.
Trong mặt phẳng $ABCD$ gọi $O = AC \cap BD$, có:
$\begin{cases} O \in AC,\ AC \subset (SAC) \\ O \in BD,\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$
$S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Tìm giao tuyến của $(MNP) \cap (SBD)$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi $F = MP \cap SO$, có
$\begin{cases} F \in MP,\ MP \subset (MNP) \\ F \in SO,\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNP) \cap (SBD) \quad (3)$
có: $\begin{cases} N \in (MNP) \\ N \in SB,\ SB \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNP) \cap (SBD) \quad (4)$
Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SBD) = NF$.
2. Tìm giao điểm Q của đường thẳng SD với (MNP).
Gọi $Q = NF \cap SD$ (vì $NF,\ SD \subset (SBD)$).
Ta có $\begin{cases} Q \in SD \\ Q \in NF,\ NF \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$.

3. Gọi $H = NM \cap PQ$. Chứng minh ba điểm $S,\ H,\ E$ thẳng hàng.
Ta có
$$\begin{cases} H = MN \cap PQ,\ MN \subset (SAB),\ PQ \subset (SCD) \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD) \quad (*) \\ E = AB \cap CD,\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \quad (**) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (***) \end{cases}$$
Từ (*), (**), (***) suy ra ba điểm $S,\ H,\ E$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên ba điểm $S,\ H,\ E$ thẳng hàng.
4. Chứng min ba đường thẳng $SK,\ QM,\ NP$ đồng quy.
Gọi $G = MQ \cap NP$ (vì $MQ,\ NP \subset (MNP)$) (5)
có
$\begin{cases} G \in MQ,\ MQ \subset (SAD) \\ G \in NP,\ NP \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow G \in (SAD) \cap (SBC) \quad (6)$
Ngoài ra $(SAD) \cap (SBC) = SK \Rightarrow G \in SK$. (7)
Từ (5),(6),(7) suy ra ba đường thẳng $SK,\ QM,\ NP$ đồng quy. □

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi Mlà trung điểm của cạnh SD, I là điểm trên cạnh SA sao cho $AI = 2IS$. Gọi K là giao điểm của IM với mặt phẳng $ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{KD}{KA}$. Gọi N là trung điểm của BC. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Lời giải.





Trong mặt phẳng (SAD) gọi $K = IM \cap AD$.
Vì
$$\begin{cases} K \in IM \\ K \in AD,\ AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K = IM \cap (ABCD).$$
Dựng $DF \parallel KI\,(F \in SA)$. Trong ΔSDF có IM là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow SI = IF = FA$.
Từ đó suy ra FD là đường trung bình của tam giác $\Delta AIK \Rightarrow D$ là trung điểm của AK.
Kết luận $\dfrac{KD}{KA} = \dfrac{1}{2}$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AN \cap CD$.
Trong mặt phẳng (SCD), gọi $P = EM \cap SC$. Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác $AMPN$. □

Bài 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là những điểm nằm trên hai đoạn thẳng BC và BD, M là một điểm nằm trên AC. Giả sử không tồn tại song song trong hình vẽ của bài toán

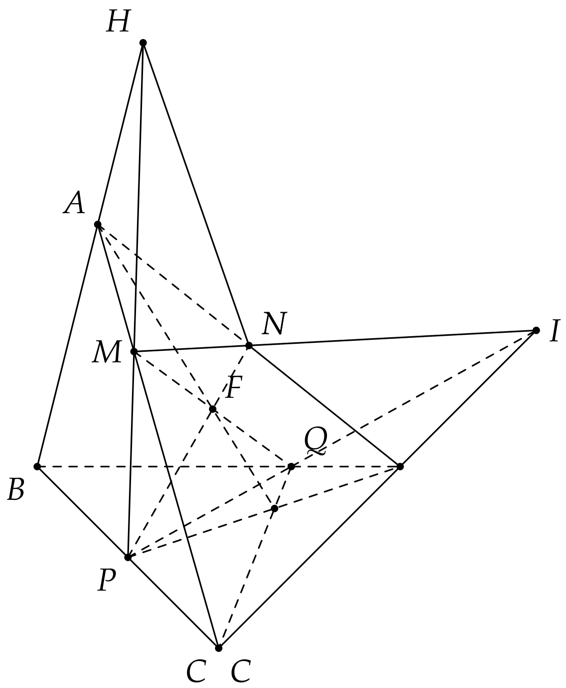
1. Tìm giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (MPQ). Suy ra giao điểm N của đường thẳng AD và mặt phẳng (MPQ).

2. PQ cắt CD tại điểm I. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MPQ) với mặt phẳng (ACD). Nhận xét gì về vị trí của M, N, I?

3. DP và CQ cắt nhau tại E, MQ và NP cắt nhau tại F. Chứng tỏ rằng A, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

a. Trong mặt phẳng (ABC), gọi $H = AB \cap MP$. Có $\begin{cases} H \in AB \\ H \in PM,\ PM \subset (MPQ) \end{cases} \Rightarrow H = AB \cap (MPQ)$.
Ta có H và Q là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MPQ) và (ABD) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng HQ. HQ cắt AD tại N, thì N là giao điểm của AD và (MPQ).
b. M và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MPQ) và (ACD). Vậy giao tuyến của (ACD) và (MPQ) là đường thẳng MI.
Vì $N \in (MPQ) \cap (ACD) \Rightarrow N \in MI$. Vậy ba điểm M, N, I thẳng hàng.
c. Vì ba điểm A, E, F là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ADP) và (ACQ) nên chúng thuộc giao tuyến của hai mặt (ADP) và (ACQ).
Kết luận ba điểm A, E, F thẳng hàng.



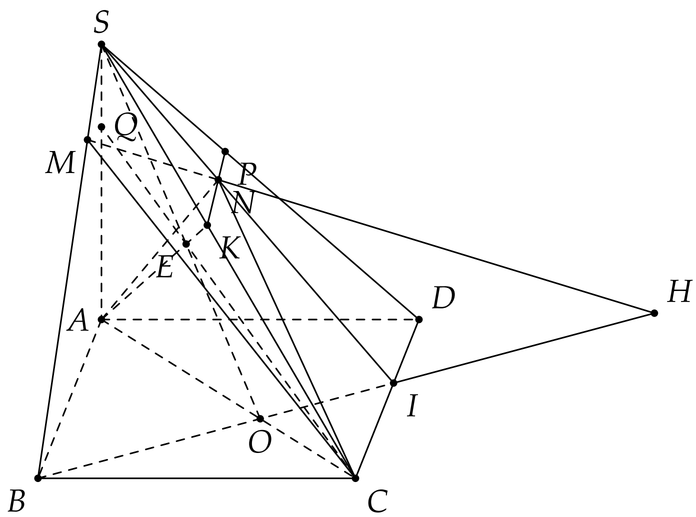
□

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG I

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB, N thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.

1. Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$
2. Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$
3. Tìm $SA \cap (CMN)$

Lời giải.
a. Tìm giao điểm của MN và $(ABCD)$.
Gọi $I = SN \cap CD$ (vì $SN, CD \subset (SCD)$). Chọn mặt phẳng (SBI) chứa MN. Ta có B và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SBI) và $(ABCD)$. Vậy $(SBI) \cap (ABCD) = BI$.
Gọi $H = MN \cap BI$ (vì $MN, BI \subset (SBI)$) Ta có $\begin{cases} H \in MN \\ H \in BI,\ BI \subset (ABCD) \end{cases}$
$\Rightarrow H = MN \cap (ABCD)$
b. Tìm $SC \cap (MAN)$.
Đầu tiên ta tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBI). Gọi $O = AC \cap BI$ (vì $AC, BI \subset (ABCD)$).
Ta có S và O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBI).
Vậy $SO = (SAC) \cap (SBI)$.
Gọi $E = SO \cap MN$ (vì $SO, MN \subset (SBI)$). Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (AMN)



□

1. M và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MPQ) và (ACD).
   Vậy giao tuyến của (ACD) và (MPQ) là đường thẳng MI.
   Vì $N \in (MQP) \cap (ACD) \Rightarrow N \in MI$. Vậy ba điểm M, N, I thẳng hàng.

2. Vì ba điểm A, E, F là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ADP) và (ACQ). Nên chúng thuộc giao tuyến của (ADP) và (ACQ).
   Kết luận ba điểm A, E, F thẳng hàng.

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG I

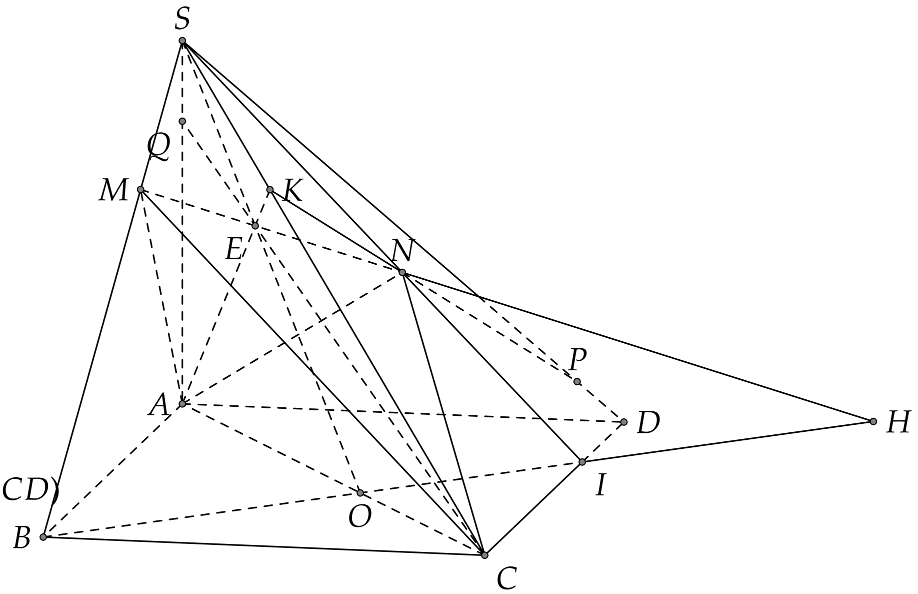
Bài 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB, N thuộc miền trong tam giác SCD.

1. Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$.
2. Tìm $SC \cap (AMN)$, $SD \cap (AMN)$.
3. Tìm $SA \cap (CMN)$.

Lời giải.

1. Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$.
   Gọi $I = SN \cap CD$ (vì $SN, CD \subset (SCD)$). Chọn mặt phẳng (SBI) chứa MN.

Ta có B và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SBI) và $(ABCD)$. Vậy $(SBI) \cap (ABCD) = BI$. Gọi $H = MN \cap BI$ (vì $MN, BI \subset (SBI)$). Ta có $\begin{cases} H \in MN \\ H \in BI, BI \subset (ABCD) \end{cases}$ $\Rightarrow H = MN \cap (ABCD)$.



2. Tìm $SC \cap (AMN)$, $SD \cap (AMN)$. Đầu tiên ta tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBI). Gọi $O = AC \cap BI$ (vì $AC, BI \subset (ABCD)$). Ta có S và O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBI). Vậy $(SBI) \cap (SAC) = SO$. Gọi $E = SO \cap MN$ (vì $SO, MN \subset (SBI)$).

   Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SC. Tìm giao tuyến của (SAC) và (AMN). $A \in (SAC) \cap (AMN)$. (1)

   Và $\begin{cases} E \in SO, SO \subset (SAC) \\ E \in MN, MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAC) \cap (AMN)$. (2)

   Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (AMN) = AE$.

   Gọi $K = SC \cap AE$ (vì $AE, SC \subset (SAC)$), có $\begin{cases} K \in SC \\ K \in AE, AE \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (AMN)$.

   Tìm giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN): Ta có K và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD). Vậy $(AMN) \cap (SCD) = KN$. Gọi $P = KN \cap SD$. Suy ra P cũng là giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN).

3. Tìm $SA \cap (CMN)$.

   Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SA. Tìm $(SAC) \cap (CMN)$. Ta có $C \in (SAC) \cap (CMN)$. (3)

   Theo câu 2, $E = SO \cap MN$ (vì $SO, MN \subset (SBI)$), có $\begin{cases} E \in SO, SO \subset (SAC) \\ E \in MN, MN \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow E \in$

$(SAC) \cap (CMN)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(SAC) \cap (CMN) = CE$. Gọi $Q = SA \cap CE$ (vì $SA, CE \cap (SAC)$).

Ta có $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in CE, CE \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow Q = SA \cap (CMN)$.

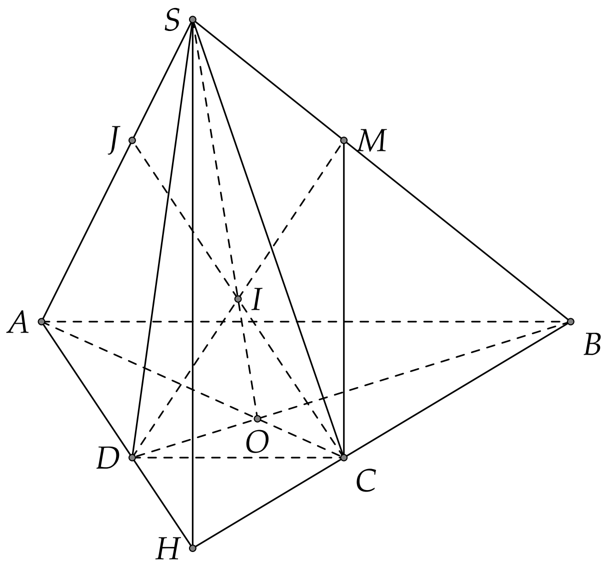
□

Bài 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB song song với CD. O là giao điểm của hai đường chéo, M thuộc SB.

1. Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD); (SAD) và (SBC).

2. Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.

Lời giải.



1. Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD).
   Ta có S là điểm chung thứ nhất và O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
   Vậy $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
   Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC).
   Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$. (1)
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $H = AD \cap BC$, có $\begin{cases} H \in AD, AD \subset (SAD) \\ H \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAD) \cap (SBC)$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SH$.

2. Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.
   Gọi $I = SO \cap DM$ (vì $SO, DM \subset (SBD)$).
   Ta có $\begin{cases} I \in SO \\ I \in DM, DM \subset (MCD) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MCD)$.
   Gọi $J = SA \cap CI$ (vì $SA, CI \subset (SAC)$).
   Ta có $\begin{cases} J \in SA \\ J \in CI, CI \subset (MCD) \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (MCD)$.

□

Bài 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC.

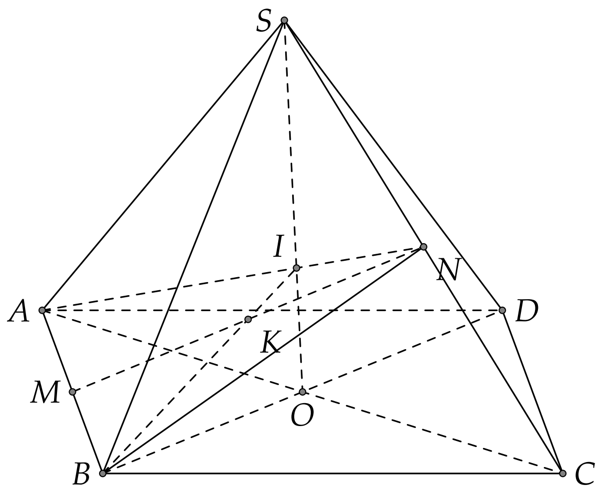
1. Tìm $I = AN \cap (SBD)$.

2. Tìm $K = MN \cap (SBD)$.

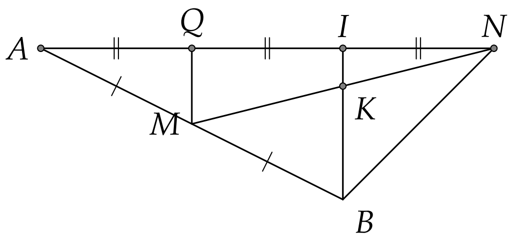
3. Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.

4. Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{IB}{IK}$.

Lời giải.



1. Tìm $I = AN \cap (SBD)$.
Trước hết ta tìm giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD). Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)
Có $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.
Gọi $I = SO \cap AN$ (vì $SO, AN \subset (SAC)$). Suy ra $I = AN \cap (SBD)$.
2. Tìm $K = MN \cap (SBD)$.
Chọn mp(ABN) chứa MN. Tìm giao tuyến của mp(ABN) và mp(SBD).
Có $\begin{cases} I \in SO, SO \subset (SBD) \\ I \in AN, AN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$. (3)
Có $B \in (ABN) \cap (SBD)$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $BI = (ABN) \cap (SBD)$; $K = BI \cap MN$. Khi đó $K = MN \cap (SBD)$.



3. Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.
Gọi Q là trung điểm của AI. Ta có $AQ = QI = IN$ (vì I là trọng tâm tam giác SAC). Có MQ là đường trung bình của tam giác ABI. Suy ra $MQ \parallel BI$. Ta có IK là đường trung bình tam giác MNQ. Vậy K là trung điểm MN. Suy ra $\dfrac{KM}{KN} = 1$.
4. Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{IB}{IK}$.
Theo cách tìm giao tuyến của câu 2 thì ba điểm B, K, I thẳng hàng.
Trong tam giác ABI, có $QM = \dfrac{1}{2}BI \Rightarrow IB = 4IK \Leftrightarrow \dfrac{IB}{IK} = 4$.

□

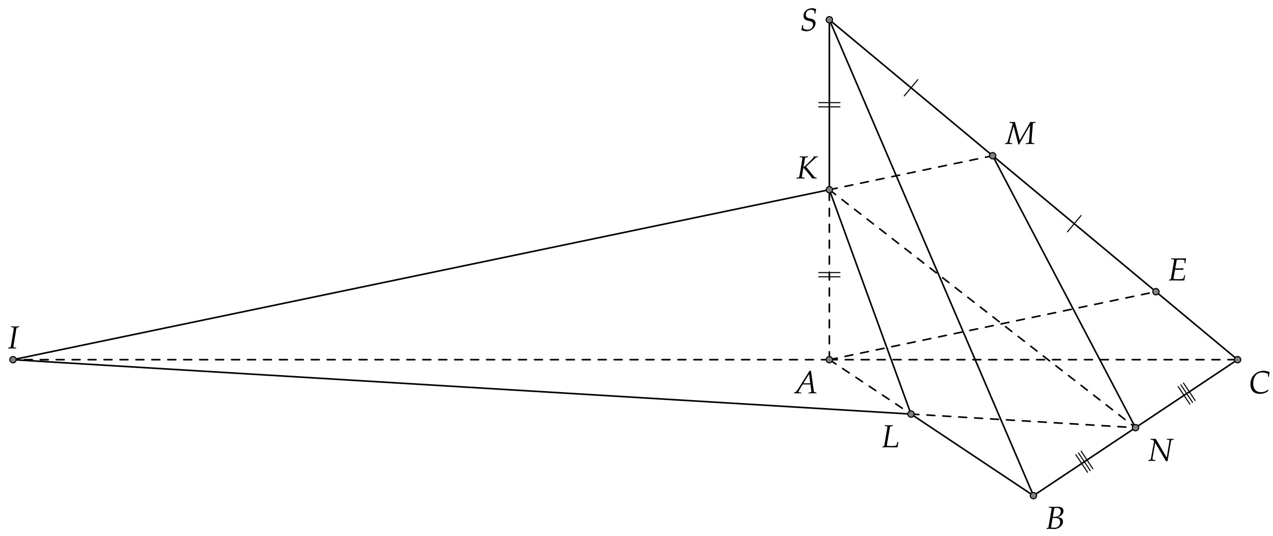
Bài 40. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Điểm M thuộc SC, $SM = \dfrac{2}{3}MC$.

1. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(KMN).
2. Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại L. Tính tỉ số $\dfrac{LA}{LB}$.

Lời giải.

1. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(KMN).
   Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của KM và AC. Trong mặt phẳng (ABC), L là giao điểm của IN và AB. Kết luận thiết diện cần tìm là tứ giác $MNLK$.

2. Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại L. Tính tỉ số $\dfrac{LA}{LB}$.



Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $AE \parallel KM$ với E thuộc SC. Ta có KM là đường trung bình của tam giác SAE nên M là trung điểm SE. Đoạn SC được chia làm 5 phần, MC chiếm 3 phần suy ra CE chiếm 1 phần.
Trong tam giác CIM có $\dfrac{CE}{EM} = \dfrac{CA}{AI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CA = \dfrac{1}{2}AI$.
Trong tam giác ABC, kẻ $DN \parallel AB\, (\in AC)$. Vậy DN là đường trung bình của ΔABC nên $DN = \dfrac{1}{2}AB$. (1)
Trong tam giác IDN có $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{AL}{DN} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow DN = \dfrac{4}{5}AL$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{1}{2}AB = \dfrac{4}{5}AL \Leftrightarrow 2AB = 5AL \Leftrightarrow 2(LA + LB) = 5LA \Leftrightarrow 2LB = 3LA \Rightarrow \dfrac{LA}{LB} = \dfrac{2}{3}$.

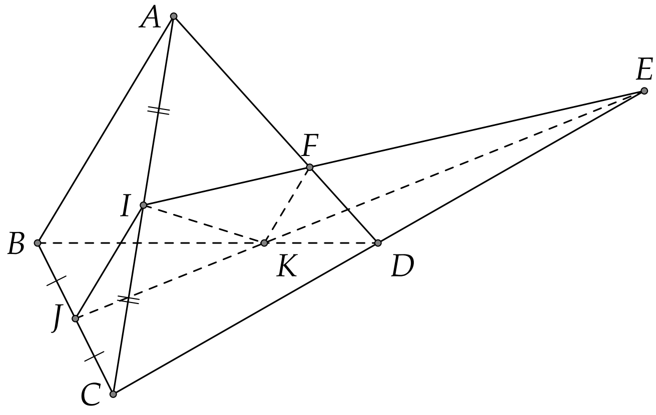
□

Bài 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Lấy K thuộc cạnh BD sao cho $BK = 2KD$.

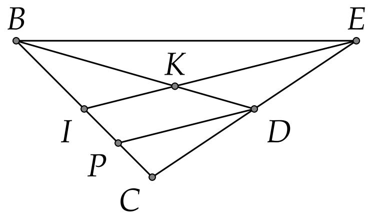
1. Tìm $E = CD \cap (IJK)$. Chứng minh $DE = DC$.
2. Tìm giao điểm $F = AD \cap (IJK)$. Chứng minh $FA = 2FD$.
3. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (IJK). Xác định hình tính của thiết diện.

Lời giải.

1. Tìm $E = CD \cap (IJK)$. Chứng minh $DE = DC$.
   Gọi $E = CD \cap JK$ (vì $CD, JK \subset (BCD)$),
   có $\begin{cases} E \in CD \\ E \in JK, JK \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = CD \cap (IJK)$.



   Chứng minh $DE = DC$.
   Trong ΔBCE, kẻ $DP \parallel EJ$. Trong tam giác BDP, có $JK \parallel PD$ nên
   $\dfrac{BJ}{JP} = \dfrac{BK}{KD} = 2 \Rightarrow BJ = 2JP \Rightarrow CI = 2JP$. Từ đó suy ra DP là đường trung bình của tam giác CEJ. Suy ra D là trung điểm CE. Vậy $DE = DC$.



2. Tìm giao điểm $F = AD \cap (IJK)$. Chứng minh $FA = 2FD$.
   Vì $IE, AD \subset (ACD)$. Gọi $F = IE \cap AD$. Mà $IE \subset (IJK) \Rightarrow F = AD \cap (IJK)$. Xét trong tam giác ACE có F là giao điểm của hai đường trung tuyến AD và EI. Suy ra F là trọng tâm của ΔACE. Vậy $FA = 2FD$.

3. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (IJK). Xác định hình tính của thiết diện.
   Ta có $\begin{cases} (IJK) \cap (ABC) = IJ; (IJK) \cap (BCD) = JK \\ (IJK) \cap (ABD) = KF; (IJK) \cap (ACD) = FI \end{cases}$. Thiết diện cần tìm là tứ giác $IJKF$.
   Trong tam giác ABD, có $\dfrac{DK}{DB} = \dfrac{DF}{DC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KF \parallel AB$. (1)
   Trong tam giác ABC, có IJ là đường trung bình nên $IJ \parallel AB$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $IJKF$ là hình thang.

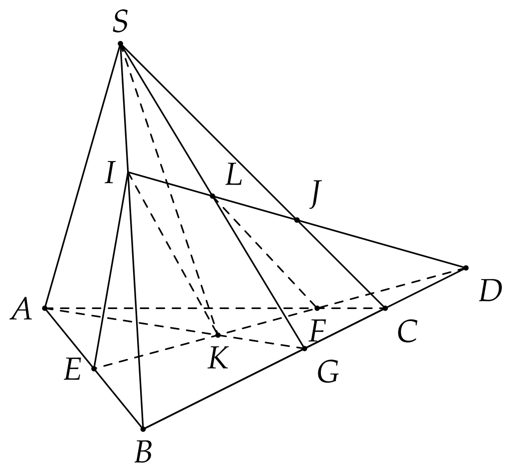
□

Bài 42. Cho tứ diện $S.ABC$. Trên SB, SC lần lượt lấy hai điểm I, J sao cho IJ không song song với BC. Trong tam giác ABC lấy một điểm K.

1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IJK).
2. Xác định giao điểm của AB, AC với (IJK).
3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJK).
4. Tìm giao điểm của BC, IJ với mặt phẳng (SAK).
5. Xác định thiết diện của mặt phẳng (IJK) với tứ diện $S.ABC$.

Lời giải.

1. **Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng** (ABC) **và** (IJK)**.**
   Gọi $D = IJ \cap BC$ (vì $IJ, BC \subset (SBC)$),
   có $\begin{cases} D \in IJ, IJ \subset (IJK) \\ D \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow D \in (IJK) \cap (ABC)$. (1)
   Có $K \in (IJK) \cap (ABC)$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(IJK) \cap (ABC) = DK$.



2. **Xác định giao điểm của** AB, AC **và** (IJK)**.**
   Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB, AC với DK (vì AB, AC, DK cùng thuộc mặt phẳng (ABC)). Ngoài ra DK nằm trong mặt phẳng (IJK). Vậy $AB \cap \text{mp}(IJK) = E$; $AC \cap \text{mp}(IJK) = F$.

3. **Tìm giao tuyến của** (SAB) **và** (IJK)**.**
   Ta có I và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (IJK) nên $(SAB) \cap (IJK) = IE$.

4. **Tìm giao điểm của** BC, IJ **với** (SAK)**.**
   Gọi $G = AK \cap BC$ (vì $AK, BC \subset (ABC)$). Ta có $\begin{cases} G \in BC \\ G \in AK, AK \subset (SAK) \end{cases} \Rightarrow G = BC \cap (SAK)$.
   Gọi $L = SG \cap IJ$ (vì $SG, IJ \subset (SBC)$). Ta có $\begin{cases} L \in IJ \\ L \in SG, SG \subset (SAK) \end{cases} \Rightarrow L = IJ \cap (SAK)$.

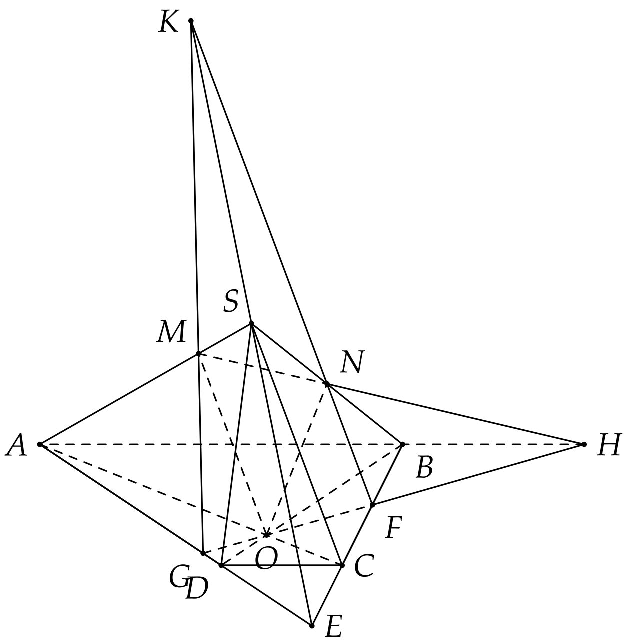
5. **Xác định thiết diện của mp**(IJK) **với tứ diện** $S.ABC$**.**
   Theo cách dựng điểm ở các câu trên ta có $\begin{cases} (IJK) \cap (ABC) = EF; (IJK) \cap (SAC) = FJ \\ (IJK) \cap (SAB) = IE; (IJK) \cap (SBC) = JI. \end{cases}$
   Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $IJFE$.

□

Bài 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là AB. Trên SA, SB lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song với AB. Gọi $O = AC \cap DB$.

1. Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mp(MNO).
2. Tìm giao tuyến của mp(MNO) với các mặt (SBC) và (SAD).
3. Xác định thiết diện của (M) với hình chóp $S.ABCD$.
4. Gọi K là giao điểm của hai giao tuyến ở câu thứ 2 và $E = AD \cap BC$. Chứng minh 3 điểm S, K, E thẳng hàng.

Lời giải.



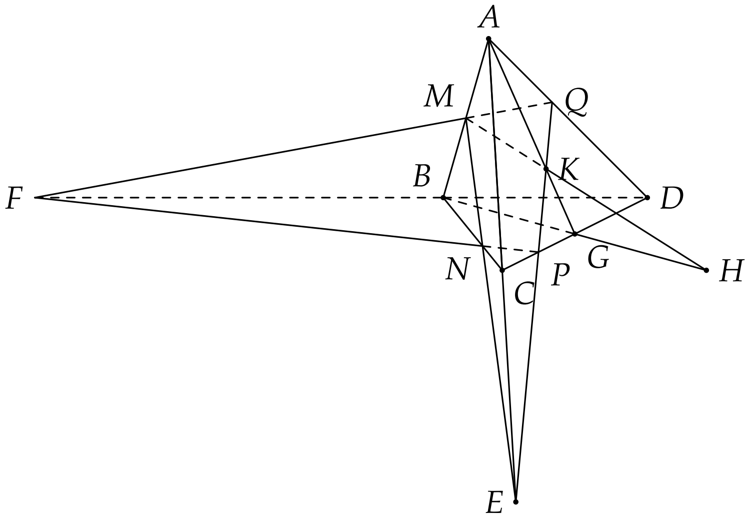
1. **Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mp(MNO).**
   Gọi $H = AB \cap MN$ (vì $AB, MN \subset (SAB)$).
   Ta có $\begin{cases} H \in AB \\ H \in MN, MN \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow H = AB \cap (MNO)$.
2. **Tìm giao tuyến của mp MNO với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).**
   Gọi $F = BC \cap HO$ $(BC, HO \subset (ABCD))$,
   ta có : $\begin{cases} F \in BC, BC \subset (SBC) \\ F \in HO, HO \subset (MNO) \end{cases}$
   $\Rightarrow F \in (MNO) \cap (SBC)$. (1)
   $N \in (MNO) \cap (SBC)$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(MNO) \cap (SBC) = FN$.
   Trong mp$(ABCD)$, gọi $G = AD \cap HO$,
   ta có $\begin{cases} G \in AD, AD \subset (SAD) \\ G \in HO, HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow G \in (MNO) \cap (SAD)$. (3)
   $M \in (MNO) \cap (SAD)$. (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $(MNO) \cap (SAD) = MG$.
3. **Xác định thiết diện của (MNO) với hình chóp $S.ABCD$.**
   Theo cách dựng điểm ở trên, ta có $\begin{cases} (MNO) \cap (ABCD) = GF; (MNO) \cap (SBC) = FN \\ (MON) \cap (SAB) = NM; (MNO) \cap (SAD) = MG. \end{cases}$
   Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNFG$.
4. **Chứng minh 3 điểm S, K, E thẳng hàng.**
   Ta có $E = AD \cap BC$, $AD \subset (SAD)$, $BC \subset (SBC)$ nên $E \in (SAD) \cap (SBC)$. $(*)$
   $K = GM \cap FN$, $GM \subset (SAD)$, $FN \subset (SBC)$ nên $K \in (SAD) \cap (SBC)$. $(**)$
   $S \subset (SAD) \cap (SBC)$. $(***)$
   Từ $(*)(**)(***)$ suy ra ba điểm E, K, S thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên ba điểm E, K, S thẳng hàng.

□

Bài 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB, K là trọng tâm của tam giác ACD.

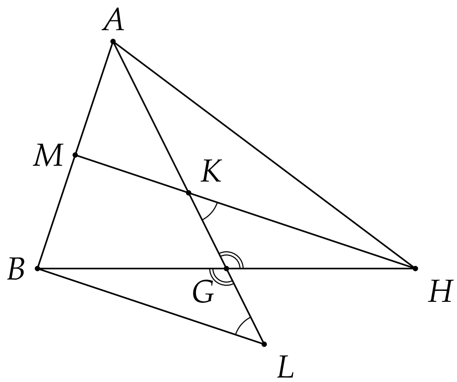
1. Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD).
2. Tìm giao điểm H của MK và mp(BCD). Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH.
3. Trên BC lấy điểm N. Tìm giao điểm P, Q của CD, AD với mp(MNK).
4. Chứng minh 3 đường thẳng MQ, NP, BD đồng quy.

Lời giải.



1. **Xác định giao tuyến của** (AKM) **và** (BCD)**.**
   Gọi $G = AK \cap CD$ (vì $AK, CD \subset (ACD)$).
   Ta có $\begin{cases} G \in AK, AK \subset (AKM) \\ G \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases}$
   $\Rightarrow G \in (AKM) \cap (BCD)$. (1)
   $B \in (ABG) \cap (BCD)$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(ABG) \cap (BCD) = BG$.

2. **Tìm giao điểm** H **của** MK **và** mp(BCD).
   Trong mp(ABG), gọi $H = MK \cap BG$,
   có $\begin{cases} H \in MK \\ H \in BG, BG \subset (BCD) \end{cases}$
   $\Rightarrow H = MK \cap (BCD)$.

   Chứng minh K **là trọng tâm của tam giác** ABH**.**
   Vì K là trọng tâm của tam giác ACD nên K chia đoạn AG thành ba phần bằng nhau.
   Gọi L là điểm đối xứng của K qua G thì K là trung điểm của AL.
   Trong $\triangle ABL$, MK là đường trung bình của tam giác.
   Ta có $\triangle BGL = \triangle HGK$(g.c.g) $\Rightarrow BG = HG$.
   Vậy K là trọng tâm của tam giác ABH.

3. **Tìm giao điểm** P, Q **của** CD, AD **với** mp(MNK).
   Trong mp(ABC) gọi $E = MN \cap AC$. Trong mp(ACD) đường thẳng EK cắt CD và AD lần lượt tại P, Q, thì P và Q chính là giao điểm của CD và AD với mp(MNK).

4. **Chứng minh** MQ, NP, BD **đồng quy.**
   Trong mp(MNK) gọi $F = MQ \cap NP$, vì $\begin{cases} F \in MQ \subset (ABD) \\ F \in NP \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABD) \cap (BCD)$.
   Tù đó suy ra F thuộc giao tuyến của BD và hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).
   Vậy ba đường thẳng MQ, NP, BD đồng quy tại điểm F.

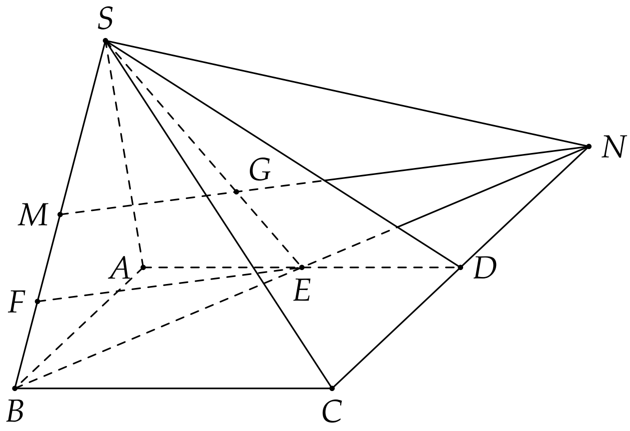
□

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD, M là trung điểm của SB.

1. Tìm giao điểm N của MG và mặt phẳng $(ABCD)$.

2. Chứng minh ba điểm C, D, N thẳng hàng và D là trung điểm của CN.

Lời giải.



1. Trong mặt phẳng chứa MG, gọi N là giao điểm của MG và BE. Vì BE thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, nên N thuộc $(ABCD)$. Vậy N là giao điểm của MG và mặt phẳng $(ABCD)$.

2. Trong mặt phẳng (SBN), kẻ $EF \parallel MN$ (F thuộc SB).
   Trong tam giác SEF có $MG \parallel EF$ nên

   $\dfrac{SM}{MF} = \dfrac{SG}{GE} = 2 \Rightarrow SM = 2MF \Leftrightarrow BM = 2MF.$

   Vậy F là trung điểm của BM.

Trong $\triangle BMN$ có $EF \parallel MN$ nên $\dfrac{BF}{FM} = \dfrac{BE}{EN} = 1 \Rightarrow BE = EN$. Vậy E là trung điểm của BN.

Dễ dàng chứng minh $\triangle AEB = \triangle DEN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{END}$.
Hai góc này bằng nhau theo trường hợp so le trong nên $AB \parallel DN$, mà $AB \parallel CD$ nên C, D, N thẳng hàng.

ED là đường trung bình của tam giác NBC suy ra D là trung điểm của CN.

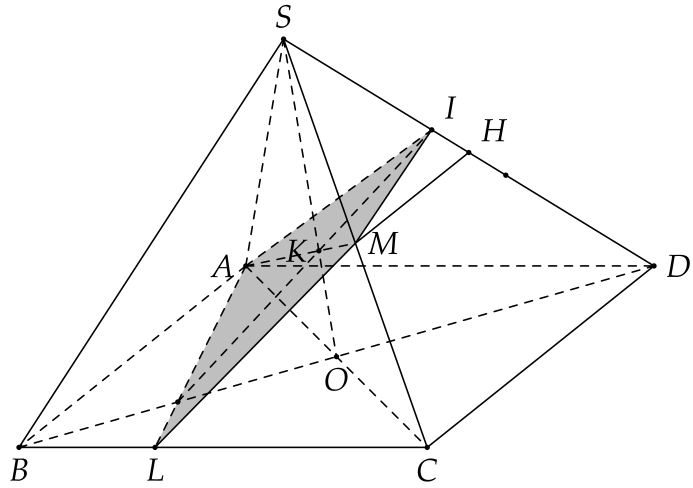
□

Bài 46. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC.

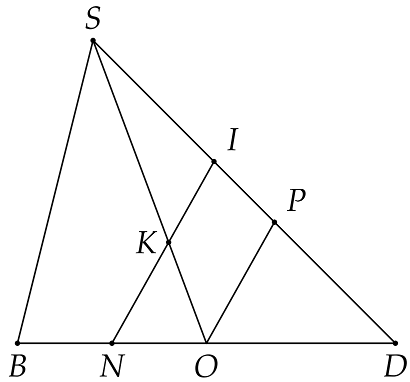
1. Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD).

2. Gọi N là trung điểm của BO. Xác định giao điểm I của (AMN) với SD. Chứng minh $\dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}$. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Lời giải.



1. **Xác định giao tuyến của** (ABM) **và** (SCD)**.**
   Ta có $\begin{cases} M \in (ABM) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (ABM), CD \subset (SCD) \end{cases}$
   $\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = MH$ $(MH \parallel AB \parallel CD.)$
2. **Xác định giao điểm** I **của** (AMN) **và** SD**.**
   Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SO$. Gọi $K = AM \cap SO$ $(AM, SO \subset (SAC))$.
   Tìm giao tuyến (AMN) **và** (SBD)**.**
   Ta có $\begin{cases} N \in (AMN) \\ N \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow$ $N \in (AMN) \cap (SBD)$. (1)
   $\begin{cases} K \in AM, AM \subset (AMN) \\ K \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow$ $K \in (AMN) \cap (SBD)$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (SBD) = NK$. NK cắt SD tại điểm I, thì I chính là giao điểm của (AMN) và SD.

   Trong mặt phẳng (SBD), từ O dựng $OP \parallel NI (P \in SD)$.
   Trong $\triangle DNI$, có $OP \parallel DI$ nên có $\dfrac{DO}{ON} = \dfrac{DP}{PI} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow DP = 2PI$. (3)
   Trong $\triangle SOP$ có $KI \parallel OP$ nên có $\dfrac{SK}{KO} = \dfrac{SI}{PI} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow SI = 2PI$. (4) (K) là trọng tâm của $\triangle SAC$. Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{IS}{ID} = \dfrac{2}{3}$.
   Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (AMN)**.**
   Gọi L là giao điểm của AN và BC. Kết luận thiết diện là tứ giác $ALMI$.

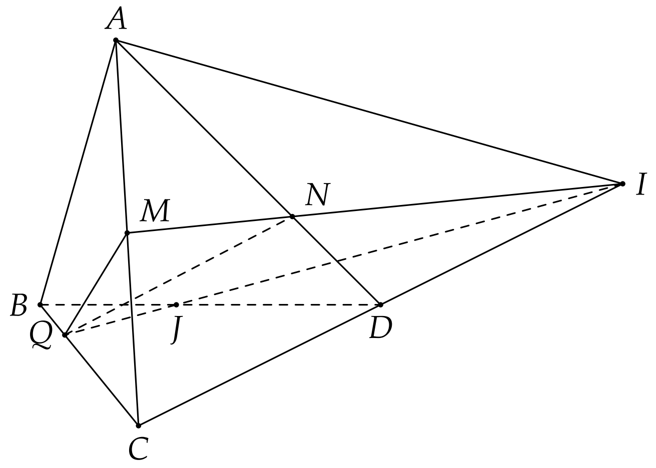
$\square$

Bài 47. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AD lấy điểm N sao cho $AN = 2ND$, M là trung điểm của AC, trên BC lấy điểm Q sao cho $BQ = \dfrac{1}{4}BC$.

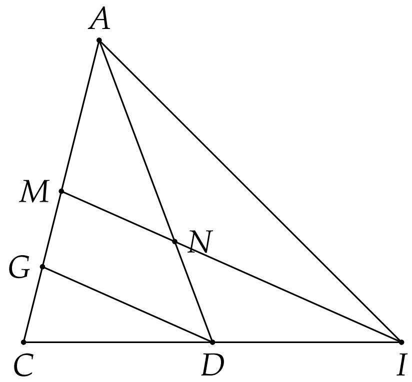
1. Tìm giao điểm I của MN với (BCD). Tính tỷ số $\dfrac{IC}{ID}$.
2. Tìm giao điểm J của BD với (MNQ). Tính tỷ số $\dfrac{JB}{JD}, \dfrac{JQ}{JI}$.

Lời giải.

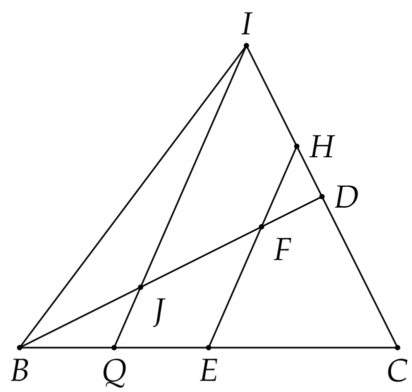
1. **Tìm giao điểm I của MN với (BCD).**
   Gọi $I = MN \cap CD$ $(MN, CD \subset (ACD))$.
   Vì $\begin{cases} I \in MN \\ I \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I = MN \cap (BCD)$.



Tính tỷ số $\dfrac{IC}{ID}$.
Từ D kẻ $DG \parallel IM$ $(G \in AC)$.
Trong $\triangle AGD$ có $\dfrac{AM}{MG} = \dfrac{AN}{ND} = 2 \Rightarrow AM = 2MG$.
Do G là trung điểm của CM suy ra DG là đường trung bình của tam giác CMI, suy ra D là trung điểm của CI. Vậy $\dfrac{IC}{ID} = 2$.



2. **Tìm giao điểm J của BD và (MNQ). Tính tỷ số $\dfrac{JB}{JD}$, $\dfrac{JQ}{JI}$.**
   Gọi $J = QI \cap BD$ $(QI, BD \subset (BCD))$.
   Vì $\begin{cases} J \in BD \\ J \in QI, QI \subset (MNQ) \end{cases} \Rightarrow J = BD \cap (MNQ)$.
   Gọi E là trung điểm của BC, từ E kẻ đường thẳng song song với QI cắt BD, IC lần lượt tại F và H. Ta có QJ là đường trung bình của tam giác $BEF \Rightarrow BJ = JF$. (1)
   Trong $\triangle CQI$ có $\dfrac{CE}{EQ} = \dfrac{CH}{HI} = 2 \Rightarrow CH = 2HI \Rightarrow CD + DH = 2HI \Rightarrow DI + DH = 2HI \Rightarrow DH + HI + DH = 2HI \Rightarrow HI = 2DH$.
   Trong $\triangle DIJ$ có $\dfrac{DF}{FJ} = \dfrac{DH}{HI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow DF = \dfrac{1}{2}FJ$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{JB}{JD} = \dfrac{2}{3}$.



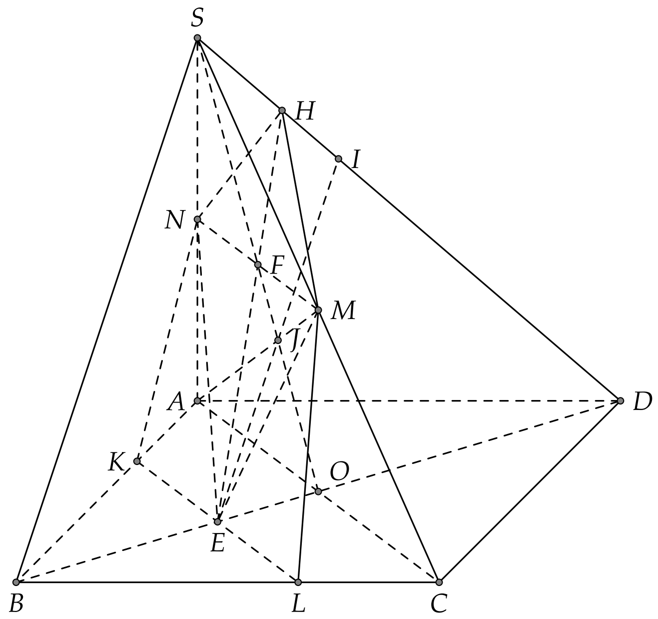
Ta có $EF = 2QJ$, $FH = \dfrac{1}{3}IJ$ và $EH = \dfrac{2}{3}IQ \Rightarrow EF + FH = \dfrac{2}{3}(IJ + JQ) \Rightarrow 2JQ + \dfrac{1}{3}IJ = \dfrac{2}{3}(IJ + JQ) \Rightarrow IJ = 4JQ$. Vậy $\dfrac{JQ}{IJ} = \dfrac{1}{4}$.

□

Bài 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SA, E là trọng tâm của tam giác ABC.

1. Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AME). Chứng minh $EI \parallel SB$.
2. Tìm giao điểm H của SD và mặt phẳng (MNE).
3. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNE).

Lời giải.
Ta có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Gọi $J = AM \cap SO$ $(AM, SO \subset (SAC))$



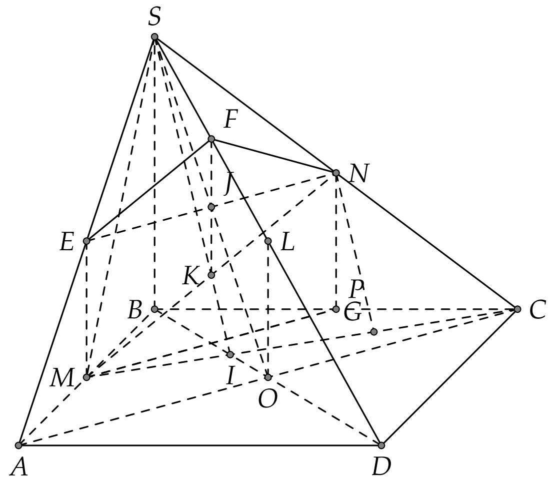
1. Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AME).
   Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD.
   Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AME) và (SBD).
   Có E là điểm chung thứ nhất, J là giao điểm của AM và SO. Mà AM, SO lần lượt thuộc hai mặt phẳng (AME) và (SBD).
   Vậy giao tuyến của chúng là EJ.
   Kéo dài EJ cắt SD tại một điểm thì đó là điểm I cần tìm.
   Chứng minh $EI \parallel SB$.
   Vì J là giao điểm của AM, SO là hai đường trung tuyến của tam giác SAC. Nên J là trọng tâm của tam giác SAC.
   Ta có $\dfrac{OJ}{OS} = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{1}{3}$
   $\Rightarrow EJ \parallel SB$ (theo định lý đảo Talet), hay $EI \parallel SB$.
2. Tìm giao điểm H của SD và mặt phẳng (MNE).
   Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD.
   Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (NME) và (SBD).
   Gọi $F = MN \cap SO$ $(MN, SO \subset (SAC))$.
   Ta có $\begin{cases} F \in MN, MN \subset (MNE) \\ F \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNE) \cap (SBD)$ (1)
   Ngoài ra $E \in (MNE) \cap (SBD)$ (2)
   Từ (1) và (2) thì $EF = (MNE) \cap (SBD)$.
   Gọi $H = EF \cap SD$ $(EF, SD \subset (SBD)) \Rightarrow H = SD \cap (MNE)$.
3. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNE).
   Đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNE) và $(ABCD)$.
   Ta có: E là điểm chung thứ nhất, có $MN \parallel AC$, mà hai đường thẳng MN, AC lần lượt thuộc hai mặt phẳng (MNE) và $(ABCD)$.
   Vậy giao tuyến của chúng qua E và song song với AC cắt AB, BC lần lượt tại K và L.
   Kết luận thiết diện cần tìm là đa giác $KLMHN$.

□

Bài 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và SC.

1. Tìm giao điểm K của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.
2. Gọi E là trung điểm của SA. Tìm giao điểm F của SD và mặt phẳng (EMN). Chứng minh tứ giác $MEFN$ là hình thang.
3. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (EMN).

Lời giải.



1. • Tìm giao điểm K của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).
   Chọn mặt phẳng (SMC) chứa MN. Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD).
   Ta có $S \in (SMC) \cap (SBD)$ (1)
   Gọi $I = MC \cap BD$ $(MC, BD \subset (ABCD))$, ta có:
   $\begin{cases} I \in MC, MC \subset (SMC) \\ I \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SMC) \cap (SBD)$ (2)
   Gọi $K = MN \cap SI$ $(MN, SI \subset (SMC)) \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$.
   • Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.
   Trong tam giác SMC kẻ $NG \parallel SI$ $(G \in CM)$.
   Trong $\triangle CIS$ có $NG \parallel SI \Rightarrow \dfrac{CN}{NS} = \dfrac{CG}{GI} = 1 \Rightarrow CG = GI$.
   Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên suy ra $MI = IG = GC$.
   Trong $\triangle MNG$ có: $IK \parallel NG \Rightarrow \dfrac{MK}{KN} = \dfrac{MI}{IG} = 1 \Rightarrow MK = KN$.
   Vậy $\dfrac{KM}{KN} = 1$.

2. • Tìm giao điểm F của SD và mặt phẳng (EMN).
   Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD, tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MNE).
   Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.
   Gọi $J = EN \cap SO$ $(EN, SO \subset (SAC))$. Ta có
   $\begin{cases} J \in EN, EN \subset (MNE) \\ J \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (MNE) \cap (SBD)$ (1)
   Theo câu 1) thì K là điểm chung thứ 2. (2)
   Từ (1) và (2) thì $(MNE) \cap (SBD) = KJ$.
   Gọi $F = KJ \cap SD \Rightarrow K = SD \cap (MNE)$.
   • Chứng minh tứ giác $MEFN$ là hình thang.
   Ta có EN là đường trung bình của tam giác SAC.
   Dễ dàng chứng minh J là trung điểm của EN.
   Trong tam giác MNE, KJ là đường trung bình của tam giác nên:
   $KJ = \dfrac{1}{2}EM$, $KJ \parallel EM$.
   Gọi L là trung điểm của SD có $OL = \dfrac{1}{2}SB$, $OL \parallel SB$. (3)
   Vì $KF \parallel EM$, mà $EM \parallel SB$ suy ra $KF \parallel SB$. (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $KF \parallel OL$.

Trong $\triangle SOL$ có JF là đường trung bình nên $JF = \frac{1}{2}OL$.

Mà $OL = \frac{1}{2}SB \Rightarrow JF = \frac{1}{4}SB$. (5)

Và $KJ = \frac{1}{2}ME$ mà $ME = \frac{1}{2}SB \Rightarrow KJ = \frac{1}{4}SB$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $KF = \frac{1}{2}SB \Rightarrow KF = EM$.

Vậy tứ giác $EMKF$ là hình bình hành.

Tứ giác $MNFE$ là hình thang vì có $EF \parallel MN$.

3. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (EMN).

Ta có:

$$\begin{cases} M \in (MNE) \cap (ABCD) \\ EN \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (MNE) \cap (ABCD) = MP\ (MP \parallel AC \parallel EN,\ P \in BD).$$

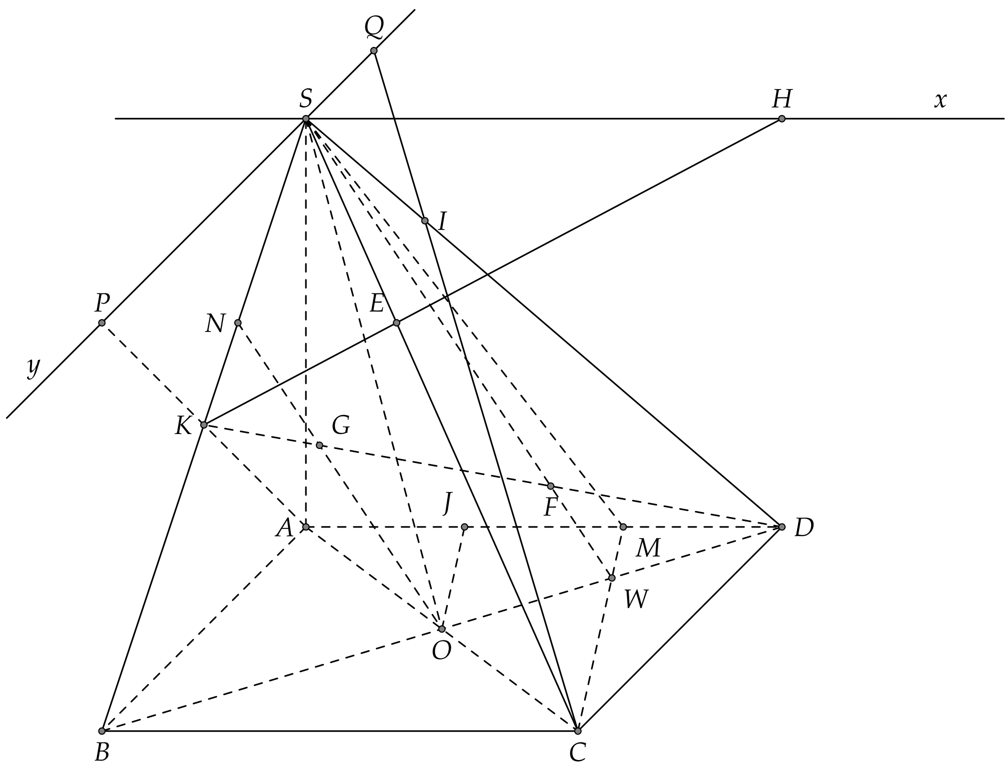
Thiết diện cần tìm là ngũ giác $MPNFE$.

□

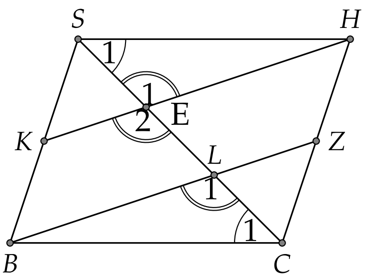
Bài 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = 2MD$, K là trung điểm cạnh SB.

1. Tìm giao điểm F của DK với mặt phẳng (SMC). Tính tỉ số $\dfrac{DF}{DK}$.
2. Gọi E là điểm trên SC sao cho $\dfrac{SE}{SC} = \dfrac{1}{3}$, gọi H là giao điểm của KE và mặt phẳng (SAD). Tính tỉ số $\dfrac{HE}{HK}$.
3. Gọi I là điểm trên cạnh SD $(DI > SI)$, P là giao điểm của AK và (SDC), Q là giao điểm của CI và (SAB). Chứng minh P, Q, S thẳng hàng.

Lời giải.



1. Tìm giao điểm F của DK với mặt phẳng (SMC). Tính tỉ số $\dfrac{DF}{DK}$.
   Gọi J là trung điểm của AM, W là trung điểm của $OD \Rightarrow MW$ là đường trung bình của $\triangle DJO$.
   Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng $d \parallel SW$ và d đi qua O. Đường thẳng d cắt DK và SB lần lượt tại G và N. WF là đường trung bình của $\triangle DGO \Rightarrow F$ là trung điểm của DG.
   Trong $\triangle BSW$ có: $ON \parallel WS$:
   $\dfrac{BN}{BS} = \dfrac{BO}{BW} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{BK+KN}{2KS} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{BK}{2KS} + \dfrac{KN}{2KS} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{KN}{2KS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{KN}{KS} = \dfrac{1}{3}$.
   Trong $\triangle KSF$ có $GN \parallel FS$ nên: $\dfrac{KN}{KS} = \dfrac{KG}{KF} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KF = 3KG \Rightarrow GF = 2KG$.
   Kết luận: $\dfrac{DF}{DK} = \dfrac{2KG}{5KG} = \dfrac{2}{5}$.

2. Tính tỉ số $\dfrac{HE}{HK}$.
   Có: $\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx \ \left(Sx \parallel BC \parallel AD\right)$.
   Gọi $H = KE \cap Sx$ $(KE, Sx \subset (SBC)) \Rightarrow H = KE \cap (SAD)$.
   

   Vẽ lại mặt phẳng (SBC) như hình bên. Gọi L là trung điểm của EC, KE đường trung bình của tam giác SBL nên $KE = \dfrac{1}{2}BL$ (1)
   Ta có: $\widehat{S_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong);
   $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối đỉnh),
   $\widehat{E_2} = \widehat{L_1}$ (đồng vị)
   $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{L_1}$.
   Từ đó suy ra: $\triangle SEH = \triangle CLB$ (g.c.g) $\Rightarrow BL = HE$. (2)
   Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{HE}{HK} = \dfrac{2}{3}$.

3. Chứng minh P, Q, S thẳng hàng.
   Ta có:
   $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ BA \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sy \ \left(Sy \parallel AB \parallel CD\right)$.
   Gọi $P = AK \cap Sy \ \left(AK, Sy \subset (SAB)\right) \Rightarrow P = AK \cap (SCD)$;
   Gọi $Q = CI \cap Sy \ \left(CI, Sy \subset (SCD)\right) \Rightarrow Q = CI \cap (SAB)$;
   Vì ba điểm P, S, Q cùng nằm trên giao tuyến Sy nên chúng thẳng hàng.

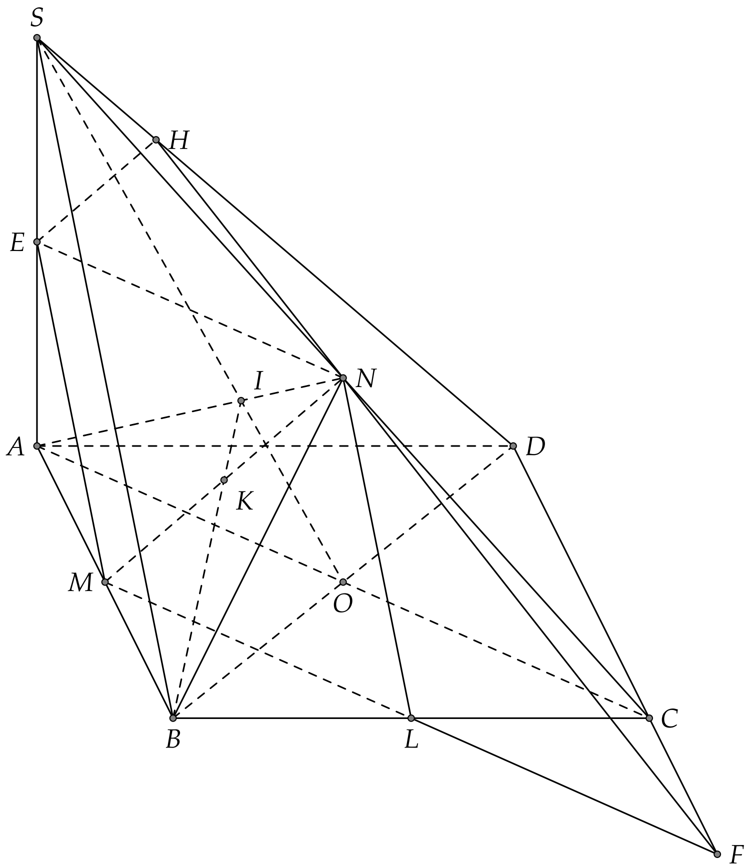
□

Bài 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC.

1. Tìm giao điểm I của AN và (SBD). Tính $\dfrac{IA}{IN}$.
2. Tìm giao điểm K của MN và (SBD). Tính $\dfrac{KM}{KN}$.
3. Chứng tỏ B, I, K thẳng hàng. Tính $\dfrac{IB}{IK}$. Gọi E là trung điểm của SA. Tìm thiết diện

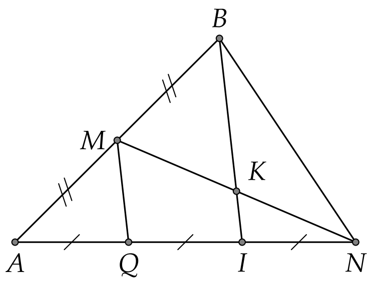
của (MNE) và hình chóp.

Lời giải.



1. Tìm giao điểm I của AN và (SBD).
   $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)
   $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.
   Gọi $I = SO \cap AN$ $(SO, AN \subset (SAC))$.
   Suy ra $I = AN \cap (SBD)$.
   Vì SO, AN là hai trung tuyến của tam giác $SAC \Rightarrow I$ là trọng tâm của tam giác SAC.
   Do đó $\dfrac{IA}{IN} = 2$.

2. Tìm giao điểm K của MN và (SBD).
   Chọn mặt phẳng (ABN) chứa MN.
   Ta có:
   $\begin{cases} I \in SO, SO \subset (SBD) \\ I \in AN, AN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD).$ (3)
   $B \in (ABN) \cap (SBD)$ (4)
   Từ (3) và (4) $\Rightarrow BI = (ABN) \cap (SBD)$.
   Gọi $K = MN \cap BI \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$.
   Vẽ lại tam giác ABN như bên.
   Gọi Q là trung điểm của AI. Ta có $AQ = QI = IN$.
   Xét $\triangle NMQ$, ta có: IK là đường trung bình của tam giác.
   Vậy K là trung điểm của MN.
   Suy ra $\dfrac{KM}{KN} = 1$.



3. Theo cách tìm giao tuyến của câu b) thì 3 điểm B, K, I thẳng hàng.
   Trong $\triangle NMQ$, ta có: $IK = \frac{1}{2}QM$.
   Trong $\triangle ABI$, ta có: $QM = \frac{1}{2}BI \Rightarrow IB = 4IK \Leftrightarrow \frac{IB}{IK} = 4$.
   Hai mặt phẳng (MNE) và $(ABCD)$ có M là điểm chung và có $NE \parallel AC$ nên giao tuyến d của chúng qua M và $d \parallel AC \parallel NE$.
   Gọi $F = d \cap CD$ $(d, CD \subset (ABCD))$; gọi $H = FN \cap SD$ $(FN, SD \subset (SCD))$.
   Vậy thiết diện của mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp $S.ABCD$ là đa giác $EMLNH$.

□

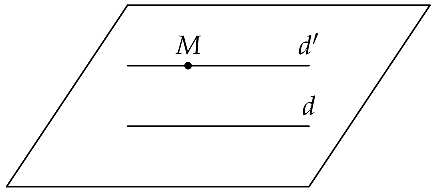
Chương 2. QUAN HỆ SONG SONG

Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

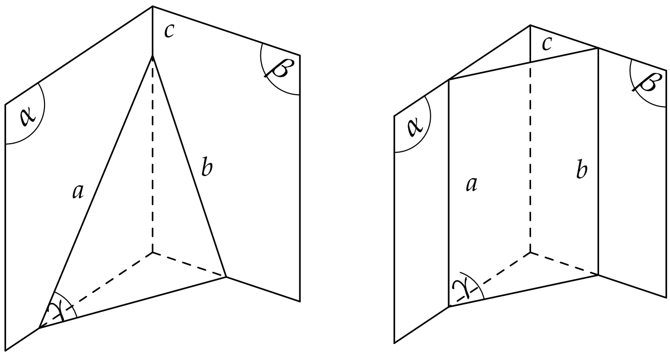
A. Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Hai đường thẳng được gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

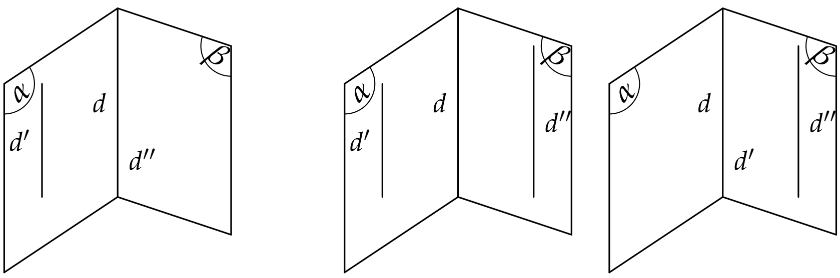
Định lí 1.
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



Định lí 2. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

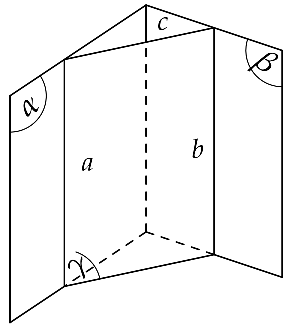


Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Định lí 3.

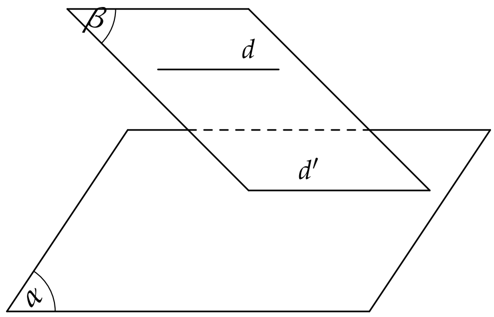
Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau



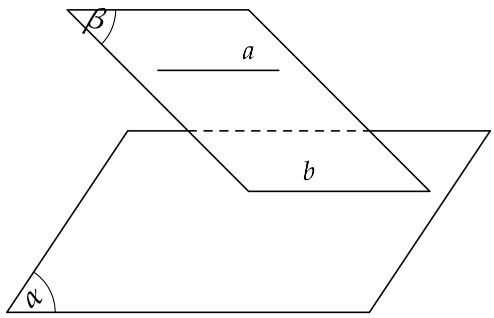
Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A. Tóm tắt lý thuyết

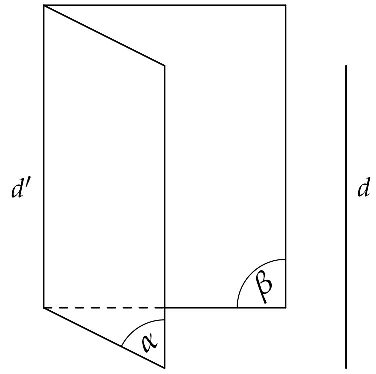
Định lí 1.
Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với α.



Định lí 2.
Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

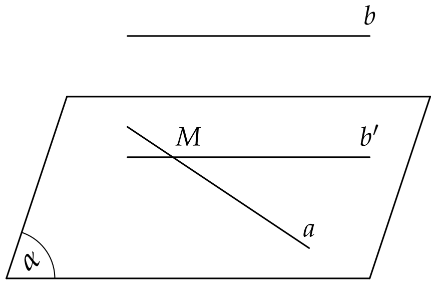


Hệ quả 1.
Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Định lí 3.

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



B. Bài tập rèn luyện

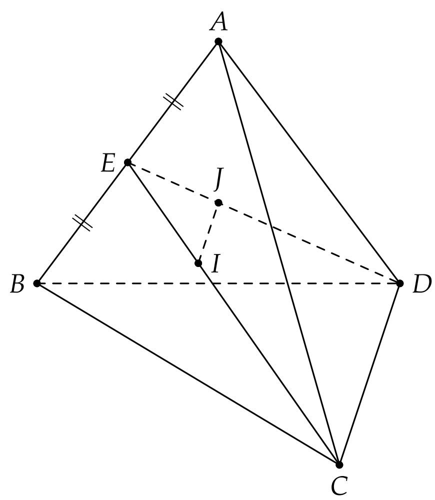
DẠNG 2.1. Chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng . . .

Phương pháp giải:
Chứng minh hai đường thẳng song song thì dựa vào hình học phẳng: Định lý Thales đảo, đường trung bình . . .
Muốn chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d song song với một đường thẳng thuộc mp(P).
Tìm giao tuyến cách 2: Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng, tìm trong hai mặt phẳng lần lượt có hai đường thẳng song song với nhau. Giao tuyến cần tìm đi qua điểm chung và song song với hai đường thẳng song song vừa tìm.

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD. Chứng minh $IJ \parallel CD$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AB. Ta có $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases} \Rightarrow IJ$ và CD đồng phẳng.
Do có $\dfrac{EI}{EC} = \dfrac{EJ}{ED} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm), nên theo định lý Thales suy ra $IJ \parallel CD$.

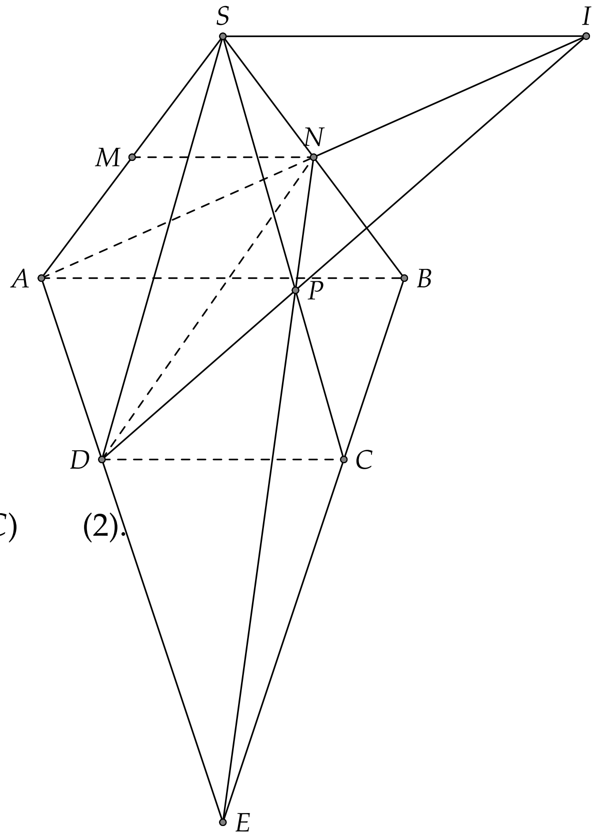


□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang với hai đáy AB và CD $(AB > CD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB.

1. Chứng minh $MN \parallel CD$.
2. Tìm giao điểm P của SC với (ADN).
3. Kéo dài AN cắt DP tại I. Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác $SABI$ là hình gì?

Lời giải.



1. Chứng minh $MN \parallel CD$.
   Trong tam giác SAB, ta có $MN \parallel AB$ (vì MN là đường trung bình). Mà $AB \parallel CD$ ($ABCD$ là hình thang). Vậy $MN \parallel CD$.

2. Tìm giao điểm của SC với (ADN).
   Chọn mặt phẳng phụ (SBC) chứa SC.
   Tìm giao tuyến của (SBC) và (ADN).
   Ta có N là điểm chung của (SBC) và (ADN) (1).
   Trong $(ABCD)$, gọi $E = AD \cap BC$. Ta có

   $$\begin{cases} E \in AD \subset (ADN) \\ E \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow E \in (ADN) \cap (SBC) \qquad (2).$$

   Từ (1) và (2) suy ra $(ADN) \cap (SBC) = NE$.
   Trong (SBC), gọi $P = SC \cap NE$. Khi đó

   $$\begin{cases} P \in SC \\ P \in NE \subset (ADN) \end{cases} \Rightarrow P = SC \cap (ADN).$$

3. Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$. Tứ giác $SABI$ là hình gì?
   $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (3)
   và $\begin{cases} I \in AN \subset (SAB) \\ I \in DP \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} SI = (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow SI \parallel AB \parallel CD.$

Xét tam giác SAI có $SI \parallel MN$ (vì cùng song song với AB) và M trung điểm của AB. Vậy MN là đường trung bình của tam giác. Suy ra $SI = 2MN$.

Ta có $\begin{cases} SI \parallel AB \\ SI = 2MN, AB = 2MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SI \parallel AB \\ SI = AB. \end{cases}$

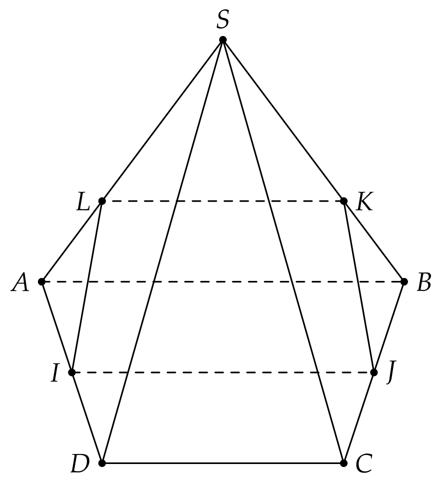
Vậy tứ giác $SABI$ là hình bình hành. □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang (đáy lớn là AB). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, K là điểm trên cạnh SB sao cho $SK = \dfrac{2}{3}SB$.

1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).

2. Tìm thiết diện của (IJK) với hình chóp $S.ABCD$. Tìm điều kiện để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.



1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).
   Từ K kẻ $KL \parallel AB$ ($L \in SA$). Ta có

$$\begin{cases} K \in (SAB) \cap (IJK) \\ AB \parallel IJ \\ AB \subset (SAB), IJ \subset (IJK) \end{cases}$$

   (vì IJ là đường trung bình của hình thang).
   Suy ra $(SAB) \cap (IJK) = KL$ (vì $KL \parallel AB \parallel IJ, K \in SA$).

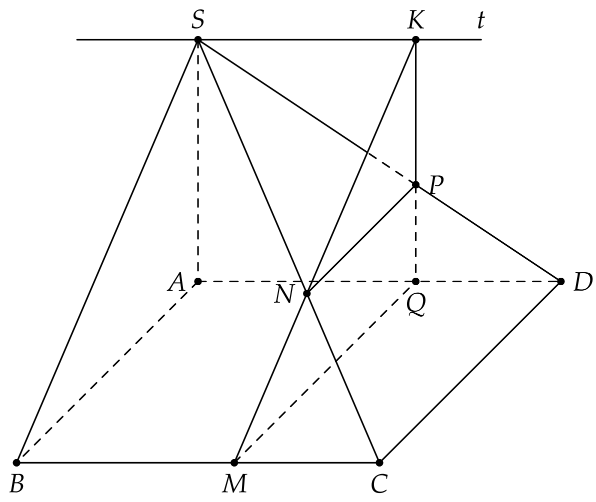
2. Tìm thiết diện của (IJK) với hình chóp $S.ABCD$.
   Ta có $\begin{cases} (IJK) \cap (ABCD) = IJ, (IJK) \cap (SBC) = JK \\ (IJK) \cap (SAB) = KL, (IJK) \cap (SAD) = LI. \end{cases}$
   Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $IJKL$ (vì $IJ \parallel LK \parallel AB$).
   Do IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $IJ = \dfrac{AB + CD}{2}$.
   Xét tam giác SAB có $\dfrac{LK}{AB} = \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $LK = \dfrac{2}{3}AB$.
   Để $IJKL$ là hình bình hành $\Leftrightarrow IJ = KL \Leftrightarrow \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{2}{3}AB \Leftrightarrow AB = 3CD$.
   Vậy thiết diện $IJKL$ là hình bình hành $\Leftrightarrow AB = 3CD$.

□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$

1. Chứng minh $PQ \parallel SA$.
2. Gọi $K = MN \cap PQ$. Chứng minh điểm K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC.

Lời giải.



1. Chứng minh $PQ \parallel SA$.
   Xét ΔSCD có $NP \parallel CD \Rightarrow \dfrac{DP}{DS} = \dfrac{CN}{CS}$ (1).
   Xét ΔSCB có $NM \parallel SB \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CN}{CS}$ (2).
   Xét hình thang $ABCD$ có $MQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{DQ}{DA}$ (3).
   Từ (1), (2), (3) suy ra $\dfrac{DP}{DS} = \dfrac{DQ}{DA}$. Vậy $PQ \parallel SA$.

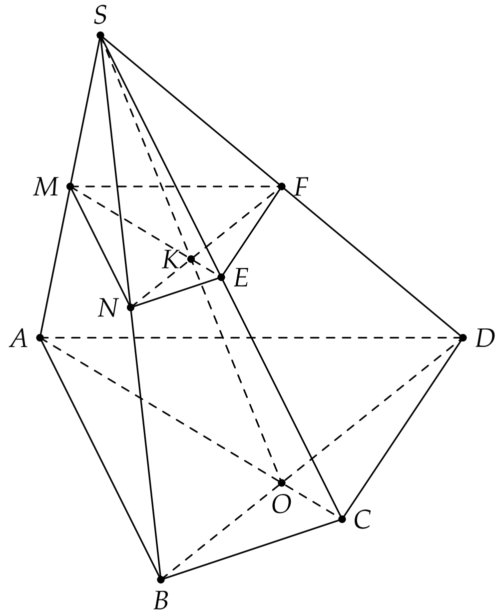
2. Chứng minh điểm K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC.
   Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (ADS) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow$ $(SBC) \cap (SAD) = St$ với $(St \parallel AD \parallel BC)$.
   Mà $K = MN \cap PQ$ và $\begin{cases} MN \subset (SBC) \\ PQ \subset (SAD). \end{cases}$
   Suy ra $K \in (SBC) \cap (SAD)$ hay $K \in St$.
   Vì S cố định và BC cố định nên St cố định. Vậy $K \in St$ cố định khi M di động trên cạnh BC.

□

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng

1. $ME \parallel AC, NF \parallel BD$.
2. Ba đường thẳng ME, NF, SO (với O là giao điểm của AC và BD) đồng qui.
3. Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Lời giải.



1. Chứng minh $ME \parallel AC, NF \parallel BD$.
   ME là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow ME \parallel AC$.
   FN là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow FN \parallel BD$.
2. Ba đường thẳng ME, NF, SO (với O là giao điểm của AC và BD) đồng qui.
   Trong tam giác SAC, gọi $K = ME \cap SO$. Suy ra K là trung điểm của SO.
   Trong tam giác SDO có FK là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow FK \parallel DO \Leftrightarrow FK \parallel BD$ (1).
   Trong tam giác SBD có FN là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow FN \parallel BD$ (2).
   Từ (1) và (2) thì K thuộc NF. Vậy ba đường thẳng ME, NF, SO đồng qui tại điểm K.
3. Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng. Từ chứng minh ở câu 2) thì ME và NF cắt nhau tại K. Suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

□

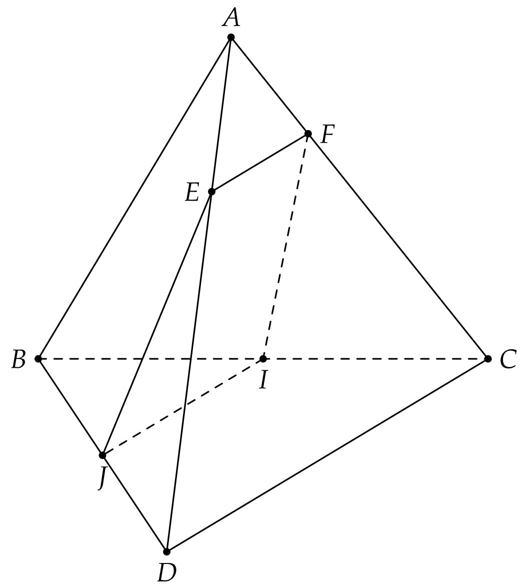
Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là một điểm thuộc cạnh AD.

a) Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp (IJE).

b) Tìm vị trí của E trên AD để thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và vị trí điểm E trên AD để thiết diện là hình thoi.

Lời giải.



a) Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp (IJE).
   Ta có IJ là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên $IJ \parallel CD$.
   $\begin{cases}(IJE) \cap (ACD) = E \\ IJ \subset (IJE),\ CD \subset (ACD)\end{cases} \Rightarrow (IJE) \cap (ACD) = Ex$.
   Với $Ex \parallel CD \parallel IJ$. Gọi $F = Ex \cap AC$.
   Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $EFIJ$.

b) Để $IJEF$ là hình bình hành thì $IJ = EF$.
   Vậy E phải là trung điểm của AD.

c) Khi $EFIJ$ là hình bình hành thì EJ là đường trung bình của tam giác DAB, suy ra $EJ = \dfrac{1}{2}AB$.
   Vậy: để $IJEF$ là hình thoi thì $IJ = EJ \Leftrightarrow AB = CD$.
   Kết luận: Để thiết diện $IJEF$ là hình thoi thì E là trung điểm của AD và $AB = CD$.

□

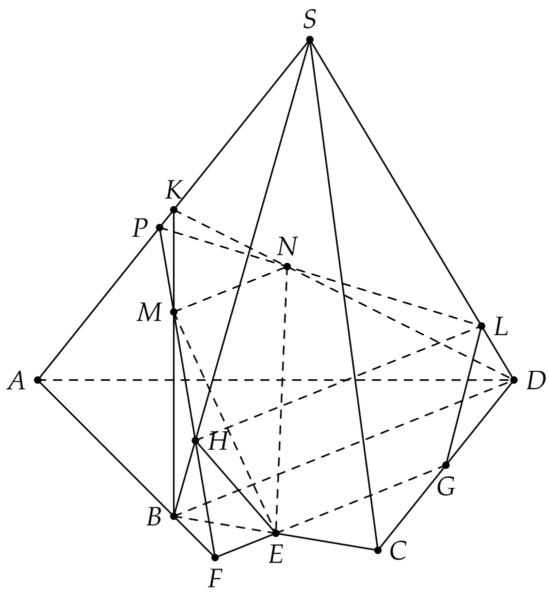
Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SAD, E là trung điểm của CB.

a) Chứng minh $MN \parallel BD$.

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (MNE).

c) Gọi $H,\ L$ lần lượt là các giao điểm của mp (MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh $LH \parallel BD$.

Lời giải.



a) Chứng minh $MN \parallel BD$.
Gọi K là trung điểm của SA.
Theo tính chất trọng tâm ta có

$$\frac{KM}{KB} = \frac{KN}{KD} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel BD.$$

b) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (MNE).
E là điểm chung của (MNE) và $(ABCD)$ nên giao tuyến của chúng qua E và song song với MN và song song với BD. Giao tuyến này cắt AB và CD lần lượt tại F và G.
Trong mặt phẳng (SAB) đường thẳng FM cắt SA và SB lần lượt tại P và H. Còn trong (SAD) đường thẳng PN cắt SD tại L. Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác $EHPLG$.

c) Chứng minh $LH \parallel BD$.
Ta có $\begin{cases} HL = (MNE) \cap (SBD) \\ MN \parallel BD \\ MN \subset (MNE),\ BD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow HL \parallel MN \parallel BD.$

□

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$.

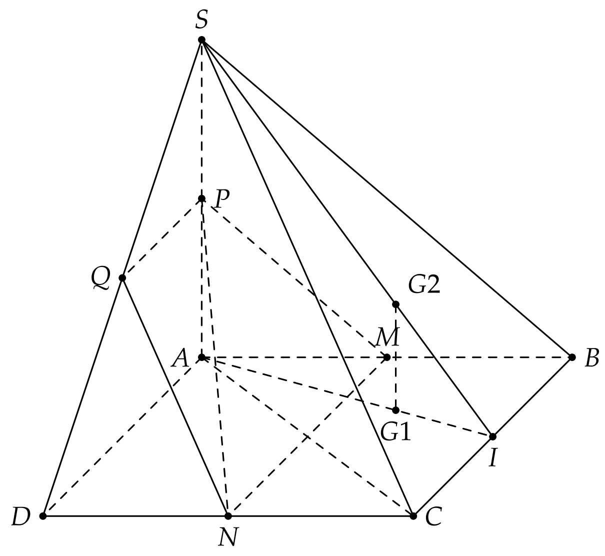
b) Gọi P là trung điểm của cạnh SA. Chứng minh rằng SB và SC đều song song với (MNP).

c) Gọi $G_1,\ G_2$ lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh $G_1G_2 \parallel (SAB)$.

Lời giải.

a) Chứng minh $MN \parallel (SBC)$.
Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC,\ MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.
Ta có $\begin{cases} MN \parallel AD,\ MN \not\subset (SAD) \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SAD)$.

b) Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP).
Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MNP).
Ta có $\begin{cases} P \in (MNP) \cap (SAD) \\ MN \parallel AD \\ MN \subset (MNP),\ AD \subset (SAD) \end{cases}$
$\Rightarrow (PMN) \cap (SAD) = PQ$ $(PQ \parallel MN \parallel AD,\ Q \in SD)$.
Xét $\triangle SAD$ ta có $PQ \parallel AD$ và P là trung điểm của SA, suy ra Q là trung điểm của SD.
Xét $\triangle SCD$ ta có $QN \parallel SC$ (QN là đường trung bình của tam giác SCD).
Ta có $\begin{cases} SC \not\subset (PMN),\ SC \parallel QN \\ QN \subset (PMN) \end{cases} \Rightarrow SC \parallel (PMN)$.



c) Chứng minh $G_1G_2 \parallel (SAB)$.
Xét tam giác SAI ta có $\dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IS} = \dfrac{1}{3}$ (Tính chất trọng tâm) $\Rightarrow G_1G_2 \parallel SA$.
Có $\begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB),\ G_1G_2 \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SAB)$.

□

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $(ABCD)$ là hình thang. AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh $OG \parallel (SBC)$.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Chứng minh rằng $CM \parallel (SAB)$.

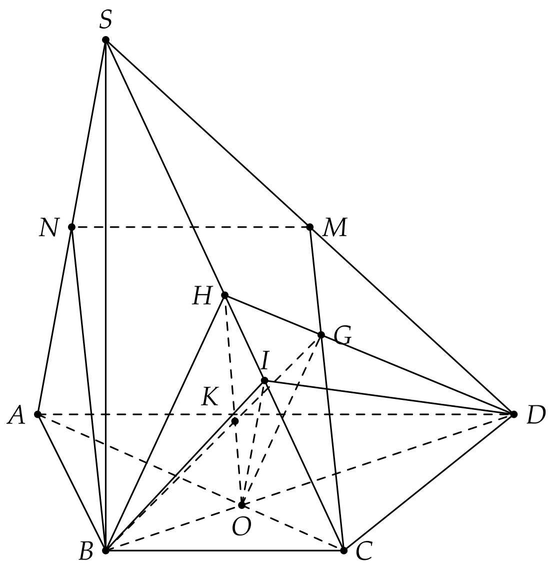
c) Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $SC = \dfrac{3}{2}SI$. Chứng minh $SA \parallel (BID)$.

d) Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC). Tính $\dfrac{KB}{KG}$.

Lời giải.

Vì $AD \parallel BC \Rightarrow \triangle OBC \backsim \triangle ODA$ (g-g).

Vậy $\dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.



a) Gọi H là trung điểm của SC.

Trong $\triangle DHB$ ta có $\dfrac{DG}{DH} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OG \parallel BH$.

Ta có $\begin{cases} OG \parallel BH \\ BH \subset (SBC),\ OG \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OG \parallel (SBC)$.

b) Gọi N là trung điểm của SA. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD.

Nên $MN \parallel AD$ và $MN = \dfrac{1}{2}AD$.

Mà theo đề bài ta lại có $BC \parallel AD$ và $BC = \dfrac{1}{2}AD$.

Vậy $BC \parallel MN$ và $BC = MN$. Vậy tứ giác $BCMN$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} CM \parallel BN \\ BN \subset (SAB),\ CM \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \parallel (SAB)$.

c) Trong $\triangle SAC$ có $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{CI}{CS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OI \parallel SA$.

Có $\begin{cases} SA \parallel OI \\ OI \subset (BID),\ SA \not\subset (BID) \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (BID)$.

d) Ta có O và H là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BDH) và (SAC).

Vậy $(SAC) \cap (BDH) = OH$.

Trong (BDH), gọi $K = BG \cap OH \Rightarrow K = BG \cap (SAC)$.

Ta có: $\triangle KOG \backsim \triangle KHB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{KG}{KB} = \dfrac{OG}{HB} = \dfrac{2}{3}$ (Vì $\dfrac{OG}{BH} = \dfrac{DG}{DH} = \dfrac{2}{3}$).

Kết luận: $\dfrac{KB}{KG} = \dfrac{3}{2}$.

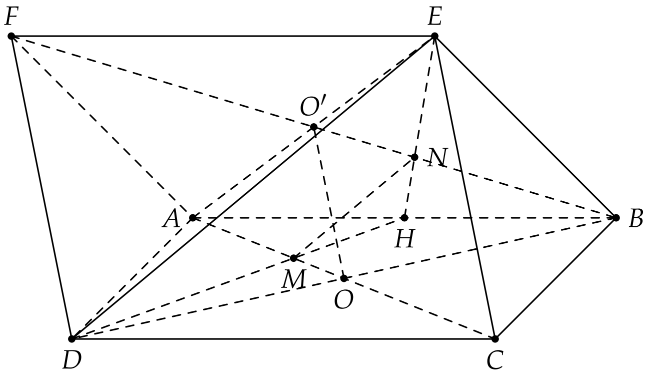
□

Bài 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh rằng OO' song song với (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABD$ và $\triangle ABE$. Chứng minh rằng $MN \parallel (CEF)$.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng OO' song song với (ADF) và (BCE).
   Ta có $OO' \parallel DF$ (OO' là đường trung bình $\triangle BDF$).
   Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \parallel (ADF)$.
   Ta có $OO' \parallel CE$ (OO' là đường trung bình $\triangle ACE$).
   Mà $CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' \parallel (BCE)$.

b) Chứng minh rằng $MN \parallel (CEF)$.
   Gọi H là trung điểm của AB.
   Trong $\triangle HDE$ ta có $\dfrac{HM}{HD} = \dfrac{HN}{HE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE$.
   Mà $DE \subset (CEFD) \equiv (CEF)$. Vậy $MN \parallel (CEF)$.

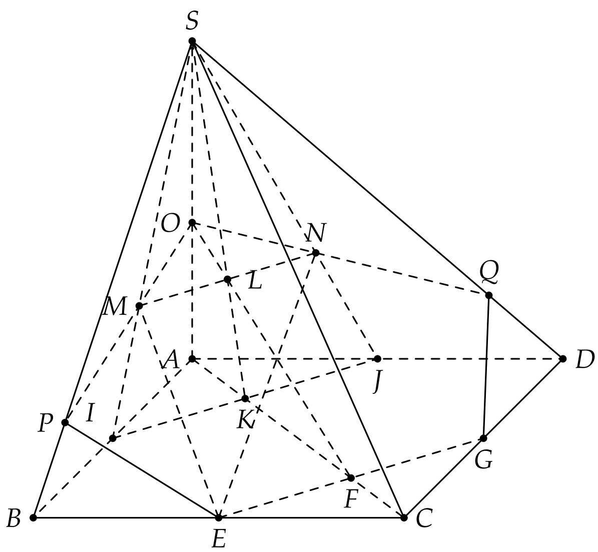
□

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD.

a) Chứng minh $MN \parallel (ABCD)$.

b) Gọi E là trung điểm của BC. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNE).

Lời giải.



a) Chứng minh $MN \parallel (ABCD)$.
   Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và AD.
   Theo tính chất trọng tâm có $\dfrac{SM}{SI} = \dfrac{SN}{SJ} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel IJ$ (tính chất Talet đảo).
   Mà IJ thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra $MN \parallel (ABCD)$.

b) Trong mặt phẳng đáy, qua E kẻ đường thẳng song song IJ cắt AC tại F, cắt CD tại G. EG là giao tuyến của (MNE) và đáy $(ABCD)$.
   Gọi $K = IJ \cap AC$ ($IJ,\ AC \subset (ABCD)$).
   Ta có $SK = (SIJ) \cap (SAC)$, gọi $L = MN \cap SK$.
   Suy ra $FL = (MNE) \cap (SAC)$, gọi $O = SA \cap FL$ ($SA, FL \subset (SAC)$).
   Vậy $OM = (MNE) \cap (SAB)$, $ON = (MNE) \cap (SAD)$.
   Gọi $P = OM \cap AB$, $Q = ON \cap SD$.
   Kết luận: thiết diện cần tìm là đa giác $OPEGQ$.

□

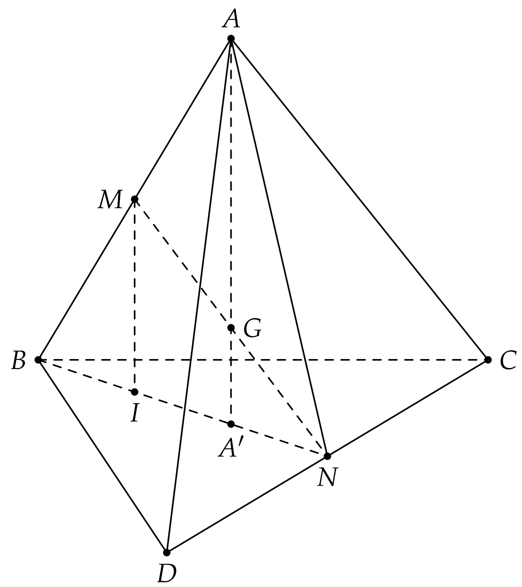
Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh đấy.

b) Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng $GA = 3GA'$.

Lời giải.

Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AB và CD.
Gọi G là trung điểm của MN.
Suy ra G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.



a) **Bước 1:** Tìm giao điểm của AG và mặt phẳng (BCD).
Chọn mặt phẳng (ABN) chứa AG và BN.
Trong mặt phẳng (ABN) gọi $A' = AG \cap BN$.
Có $\begin{cases} A' \in AG \\ A' \in BN, BN \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow A' = AG \cap (BCD)$.
Bước 2: Chứng minh A' là trọng tâm của tam giác BCD.
Trong mặt phẳng (ABN) kẻ MI song song với AA' (Với I thuộc BN).
Xét $\triangle ABA'$ có MI là đường trung bình của tam giác, nên I là trung điểm của BA'. Suy ra $BI = IA'$.
Xét $\triangle IMN$ có GA' là đường trung bình của tam giác, nên A' là trung điểm của IN.
Suy ra $A'N = IA'$.
Ngoài ta trong tam giác BCD có BN là đường trung tuyến, kết hợp lại ta có $BA' = \dfrac{2}{3}BN$.
Vậy A' là trọng tâm của tam giác BCD.

b) Vì MI là đường trung bình của tam giác ABA' nên $MI = \dfrac{1}{2}AA'$.
Vì GA' là đường trung bình của tam giác IMN nên $GA' = \dfrac{1}{2}MI$.
Từ đó ta có $GA' = \dfrac{1}{4}AA' \Leftrightarrow AA' = 4GA'$.
Mà $AA' = AG + GA' \Rightarrow AG = 3GA'$.
Kết luận $GA = 3GA'$.

□

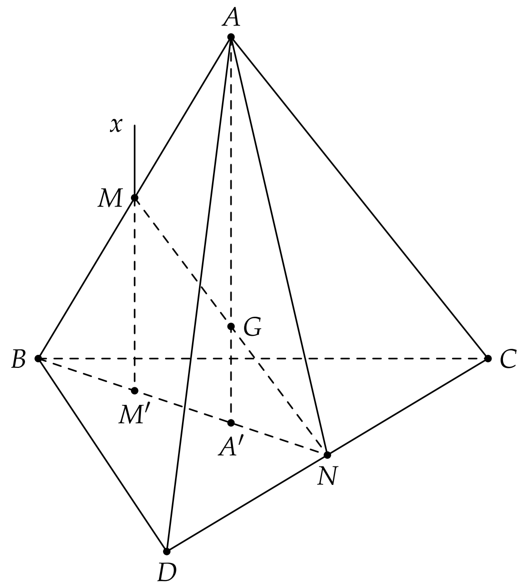
Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD).

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt mặt phẳng (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và $BM' = M'A' = A'N$.

c) Chứng minh $GA = 3GA'$.

Lời giải.



a) Chọn (ABN) chứa AG.
Hai mặt phẳng (ABN) và (BCD) có hai điểm chung là B và N. Suy ra giao tuyến của chúng là BN, BN cắt AG tại A' thì $A' = AG \cap (BCD)$.

b) Vì $Mx \parallel AA'$, mà $AA' \subset (ABN)$ và $M \in (ABN) \Rightarrow Mx \subset (ABN)$.
Gọi $M' = Mx \cap BN \Rightarrow M' = Mx \cap (BCD)$.
Từ đó suy ra ba điểm B, M', A' thẳng hàng.

Có MM' là đường trung bình của $\triangle BAA' \Rightarrow BM' = M'A'$ (1).

Và GA' là đường trung bình của $\triangle NMM' \Rightarrow M'A' = A'N$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BM' = M'A' = A'N$.

c) Từ chứng minh câu b) có:

$GA' = \dfrac{1}{2}MM'$ và $MM' = \dfrac{1}{2}AA' \Rightarrow GA' = \dfrac{1}{4}AA' \Rightarrow AG = 3GA'$.

□

DẠNG 2.2. Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) và song song với một đường thẳng cho trước. Tính diện tích thiết diện

Dạng toán này các bạn phải nhớ kĩ tính chất:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (P) \\ (\alpha) \parallel d, d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (P) = Mx(Mx \parallel d).$$

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có AD đáy lớn. Gọi M trung điểm của CD, (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

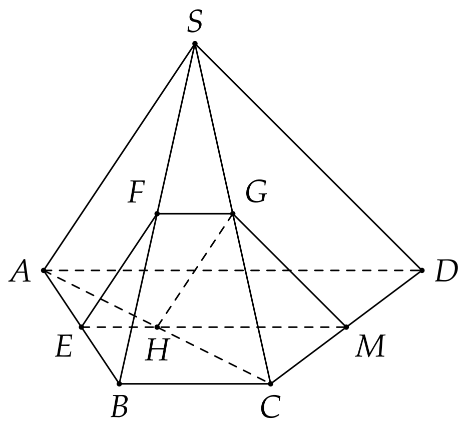
a) Hãy xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (SAC). Chứng minh giao tuyến vừa tìm được song song với mặt phẳng (SAD).

Lời giải.

a)

Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α).
M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$, có $(\alpha) \parallel BC$ nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BC, giao tuyến này cắt AB tại E.
E là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (SAB), có $(\alpha) \parallel SA$ nên giao tuyến của chúng qua E và song song với SA, giao tuyến này cắt SB tại F.
F là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (SBC), có $(\alpha) \parallel BC$ nên giao tuyến của chúng qua F và song song với BC, giao tuyến này cắt SC tại G.
Kết luận mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là hình thang $MEFG$, vì có ME và FG cùng song song với BC.



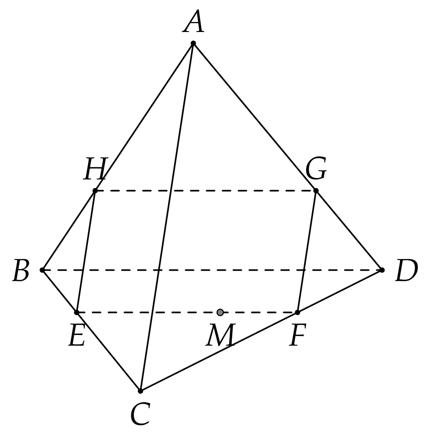
b) Gọi H là giao điểm của ME và AC, ta có H và G là hai điểm chung của hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAC). Vậy $(\alpha) \cap (SAC) = HG$. Vì $(\alpha) \parallel SA$ nên giao tuyến $HG \parallel SA$, mà SA thuộc mặt phẳng (SAD) nên giao tuyến $HG \parallel (SAD)$.

□

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD. Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (BCD), có $(\alpha) \parallel BD$ nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BD, giao tuyến này cắt BC tại E và cắt CD tại F.
E là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABC), có $(\alpha) \parallel AC$ nên giao tuyến của chúng qua E và song song với AC, giao tuyến này cắt AB tại H.
H là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABD), có $(\alpha) \parallel BD$ nên giao tuyến của chúng qua H và song song với BD, giao tuyến này cắt AD tại G. G và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ACD).
Vậy giao tuyến của chúng là FG.
Vì mặt phẳng $(\alpha) \parallel AC$, nên giao tuyến $FG \parallel AC$.
Kết luận: thiết diện cần tìm là hình bình hành $EFGH$, vì có $EF \parallel HG \parallel BD$ và $HE \parallel FG \parallel AC$.



□

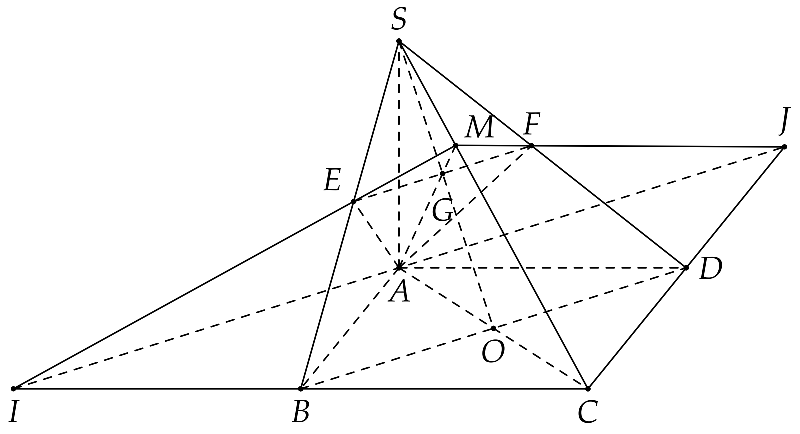
Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy một điểm M di động trên cạnh SC. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

b) Mặt phẳng (α) cắt SB và SD tại E và F. Hãy nêu cách dựng E và F.

c) Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm I, J, A thẳng hàng.

Lời giải.



a) A là một điểm chung của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$, có $(\alpha) \parallel BD$, nên giao tuyến của chúng qua A và song song với BD.

Vậy $(\alpha) \cap (ABCD) = Ax\,(Ax \parallel BD)$.

Vì Ax là đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Kết luận: mp(α) luôn đi qua đường cố định Ax.

b) Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có: SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Gọi $G = AM \cap SO\,(AM, SO \subset (SAC))$.

Ta có: G là điểm chung của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBD), có $(\alpha) \parallel BD$ nên giao tuyến của chúng qua G và song song với BD, giao tuyến này cắt SB và SD lần lượt tại E và F.

c) I và F là hai điểm chung của mặt phẳng (α) và mặt phẳng đáy $(ABCD)$, nên I và F phải thuộc giao tuyến Ax của hai mặt phẳng.

Vậy ba điểm I, J, A thẳng hàng.

□

Bài 17. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa $ABCD$.

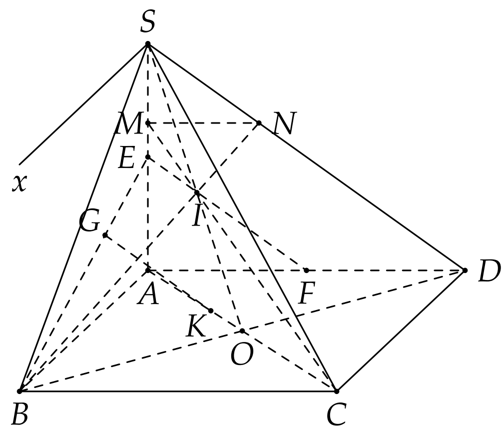
a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

b) Một mặt phẳng (α) qua BC, cắt SA tại M và cắt SD tại N. Chứng minh $MN \parallel BC$.

c) Chứng tỏ giao điểm của BN và CM luôn luôn ở trên một đường thẳng cố định khi M di động trên SA.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, K là điểm trên cạnh AC sao cho $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh GK song song với mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



a) Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1).
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra: $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Ta có: $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx (Sx \parallel AB \parallel CD)$.

b) Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = MN \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (\alpha), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC$.

c) Gọi $I = BN \cap CM (BN, CM \subset (\alpha))$.
Vì $\begin{cases} I \in BN, BN \subset (SBD) \\ I \in CM, CM \subset (SAC)) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.
Suy ra I thuộc giao tuyến SO cố định của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

d) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SA và AD.
Vì K chia đoạn AC thành ba phần bằng nhau và AK chiếm 1 phần, từ đó ta có K là trọng tâm của tam giác ABD.

Theo tính chất trọng tâm có: $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BK}{BF} = \dfrac{2}{3}$. Ngoài ra $GK \subsetneq (SCD)$ nên $GK \parallel EF$ (3).

Mà EF là đường trung bình của tam giác $ADS \Rightarrow EF \parallel SD$ (4).

Từ (3) và (4) có $GK \parallel SD \subset (SCD) \Rightarrow GK \parallel (SCD)$.

□

Bài 18. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD.

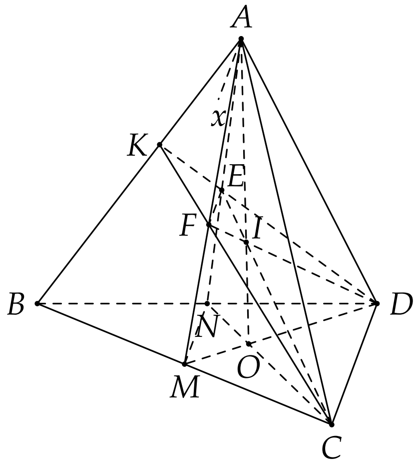
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (ACD).

b) Một mặt phẳng (P) qua CD và cắt AM, AN lần lượt tại F và E. Tứ giác $CDEF$ là hình gì?

c) CF và DE cắt nhau tại K. Chứng tỏ A, B, K thẳng hàng.

d) Chứng tỏ giao điểm I của CE và DF luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (P) thay đổi.

Lời giải.



a) $\begin{cases} A \in (AMN) \cap (ACD) \\ MN \parallel CD \\ MN \subset (AMN), CD \subset (ACD) \end{cases}$.

$\Rightarrow (AMN) \cap (ACD) = Ax\,(Ax \parallel MN \parallel CD)$

b) $\begin{cases} (P) \cap (AMN) = EF \\ MN \parallel CD \\ MN \subset (AMN), CD \subset (P) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel MN \parallel CD.$

Vì $CD \parallel MN$ suy ra $CDEF$ là hình thang.

c) Ta có AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Vì $K = CF \cap DE$, mà $\begin{cases} K \in CF, CF \subset (ABC) \\ K \in DE, DE \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABC) \cap (ABD)$.

Vì K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) nên K thuộc giao tuyến. Vậy ba điểm A, B, K thẳng hàng.

d) Trong mặt phẳng (BCD) gọi O là giao tuyến của CN và DM.

Ta có A và O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ANC) và (AMD), nên giao tuyến của chúng là AO.

Gọi I là giao điểm của CE và DF.

Ta có: $\begin{cases} I \in CE, CE \subset (ANC) \\ I \in FE, DF \subset (AMD) \end{cases} \Rightarrow I \in (ANC) \cap (AMD).$

Suy ra I thuộc giao tuyến AO của hai mặt phẳng.

Vì hai điểm A và O cố định nên điểm I thuộc đoạn AO cố định.

□

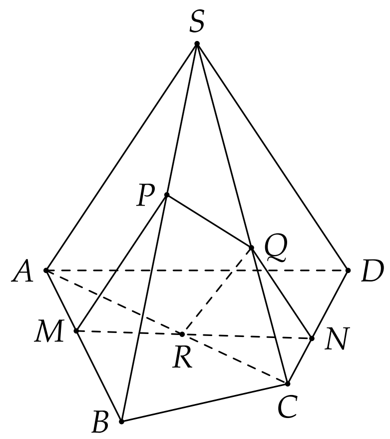
Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên AB, CD. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SA.

a) Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) và (SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (α).

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Lời giải.



a) Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB):

Ta có: $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \parallel SA, SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$ (với $MP \parallel SA, P \in SB$).

Tìm các giao tuyến của (α) với (SAC):

Gọi $R = MN \cap AC\,(MN, AC \subset (ABCD))$.

Ta có: $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha) \parallel SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$ (với $RQ \parallel SA, Q \in SC$).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (α).

Theo câu a) thiết diện là tứ giác $MPQN$.

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang:

Ta có: $MPQN$ là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MP \parallel QN\,(1) \\ MN \parallel PQ.\,(2) \end{array}\right.$

Xét (1), ta có $MP \parallel QR$, mà QR không song song QN nên (1) vô lí.

Do đó: $\begin{cases} SA \parallel QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (SCD)$ (vô lí).

Xét (2), ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD), PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$.

Ngược lại, nếu $MN \parallel BC$ thì $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$.

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN \parallel BC$.

□

Bài 20. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy trung điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N bất kỳ. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD.

a) Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$.

b) Hãy xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.

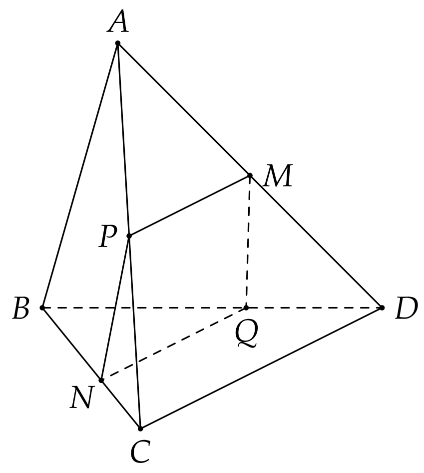
a) Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}(\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ M \in (\alpha) \cap (ACD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MP\,(MP \parallel CD, P \in AC)\,(1).$

Ta có: $\begin{cases}(\alpha) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ N \in (\alpha) \cap (BCD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = NQ\,(NQ \parallel CD, Q \in BD)\,(2).$

Và $(\alpha) \cap (ABD) = MQ\,(3)$; $(\alpha) \cap (ABC) = PN\,(4)$.

Từ (1) và (2), ta được: $MP \parallel NQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MPNQ$.



b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Ta có: $MP \parallel NQ$; $MP = \dfrac{1}{2}CD$ (MP là đường trung bình $\triangle ACD$).

$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases}MP \parallel NQ \\ MP = NQ\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}MP \parallel NQ \\ MP = NQ = \dfrac{1}{2}CD.\end{cases}$

Do đó N là trung điểm BC.

Vậy N là trung điểm BC thì $MNPQ$ là hình thang.

□

Bài 21. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB và S là một điểm ở ngoài mặt phẳng của hình thang. Gọi M là một điểm trên CD, (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

a) Hãy tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?

b) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

Lời giải.

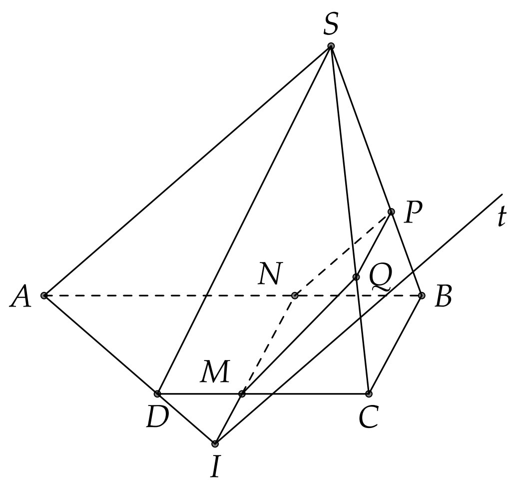
a) Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}(\alpha) \parallel BC, BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN$ (với $MN \parallel BC$ và $N \in AB$) (1).

Ta có: $\begin{cases}(\alpha) \parallel SA, SA \subset (SAB) \\ N \in (\alpha) \cap (SAB)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = NP$ (với $NP \parallel SA$ và $P \in SB$).

Có: $\begin{cases}(\alpha) \parallel BC, BC \subset (SBC) \\ P \in (\alpha) \cap (SBC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = PQ$ (với $PQ \parallel BC$ và $Q \in SC$) (2).

Từ (1) và (2), ta được $MN \parallel PQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.



b) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

Trong $(ABCD)$, gọi $I = AD \cap MN \Rightarrow I$ là điểm chung của (α) và (SAD).

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \parallel SA, SA \subset (SAD) \\ I \in (\alpha) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = It$ (với $It \parallel SA$).

□

Bài 22. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60°, AB = a$. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SB = a$ và $SB \perp OA$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB. Mặt phẳng (β) qua M song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt $x = BM\,(0 < x < a)$.

1. Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.
2. Tính diện tích của hình thang theo a và x. Tính x để diện tích này lớn nhất.

Lời giải.

1. Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

   Có $\begin{cases} (\beta) \parallel OA, OA \subset (ABC) \\ MN = (\beta) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel OA$ (1)

   Và $\begin{cases} (\beta) \parallel SB, SB \subset (SAB) \\ MQ = (\beta) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel SB$ (2)

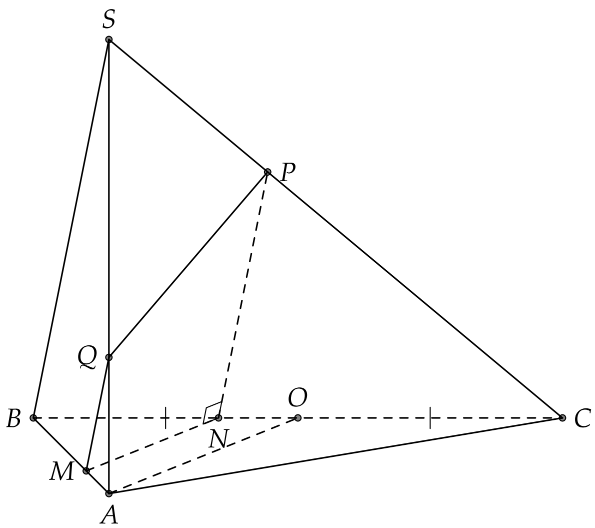
   Ta có $\begin{cases} (\beta) \parallel SB, SB \subset (SBC) \\ NP = (\beta) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel SB$ (3)

   Từ (2) và (3) suy ra $MQ \parallel NP \parallel SB$ (4)

   suy ra $MNPQ$ là hình thang.

   Từ (1) và (4) ta có $\begin{cases} OA \perp SB \\ MN \parallel OA \\ MQ \parallel NP \parallel SB. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \perp MQ \\ MN \perp NP. \end{cases}$

   Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông, đường cao MN.



2. Tính diện tích của hình thang theo a và x.

   Ta có $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP)\,MN$.

   Tính MN:

   Xét tam giác ABC, ta có: $\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\cos B} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BO = \dfrac{1}{2}BC = a$.

   Do $\widehat{B} = 60°$ và $BA = BO$ nên $\triangle ABO$ đều.

   Trong $\triangle ABO$ có $MN \parallel AO \Rightarrow \dfrac{MN}{AO} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BN}{BO} \Rightarrow MN = MB = BN = x$.

   Tính MQ : Xét $\triangle SAB$, ta có $MQ \parallel SB$ nên $\dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = AM \cdot \dfrac{SB}{AB} = (a-x)\cdot\dfrac{a}{a} = a - x$.

   Tính NP : Xét $\triangle SBC$, ta có $NP \parallel SB$ nên $\dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow NP = CN \cdot \dfrac{SB}{CB} = (2a - x)\,\cdot$

$\dfrac{a}{2a} = \dfrac{2a-x}{2}$.

Do đó $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a-3x)}{4} = \dfrac{1}{12} \cdot 3x \cdot (4a-3x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $3x$ và $(4a-3x)$ ta có

$$3x(4a-3x) \leq \left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3x(4a-3x) \leq 4a^2 \Leftrightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{a^2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $3x = 4a - 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}$.

Kết luận khi $x = \dfrac{2a}{3}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

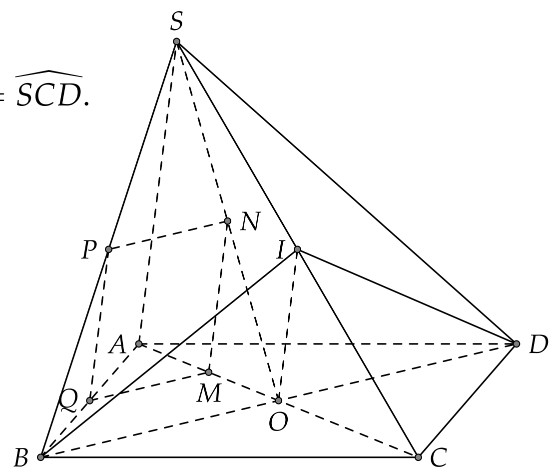
□

Bài 23. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm ngoài ở mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho $SB = SD$. Gọi M là một điểm tùy ý trên AO với $AM = x$. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO, SB, AB tại N, P, Q.

1. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?
2. Cho $SA = a$. Tính diện tích $MNPQ$ theo a và x. Tìm x để diện tích lớn nhất.

Lời giải.

1. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?



$SB = SD \Rightarrow \Delta SBC = \Delta SDC\ (c.c.c) \Rightarrow \widehat{SCB} = \widehat{SCD}$.

Gọi I là trung điểm SC thì $\Delta IBC = \Delta IDC\ (c.g.c) \Rightarrow IB = ID$. Vậy ΔIBD cân tại $I \Rightarrow IO \perp BD$, mà

$$OI \parallel SA \Rightarrow SA \perp BD (*)$$

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel BD \\ BD \subset (ABO) \\ (\alpha) \cap (ABO) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel BD$ (1)

Tương tự: $\begin{cases} (\alpha) \parallel BD \\ BD \subset (SBO) \\ (\alpha) \cap (SBO) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel BD$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $MQ \parallel NP \parallel BD$. (3)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \parallel SA \\ SA \subset (SAO) \\ (\alpha) \cap (SAO) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel SA$ (4)

Tương tự: $\begin{cases} (\alpha) \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \\ (\alpha) \cap (SAB) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel SA$ (5)

Từ (4) và (5), suy ra $MN \parallel PQ \parallel SA$ (6)

Từ (3), (6) và (*) suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.

2. Tính diện tích $MNPQ$ theo a và x:
Ta có: $S_{MNPQ} = MQ \cdot MN$.
Tính MQ : Xét tam giác AQM.
Ta có $A = 45°, Q = 45°, M = 90° \Rightarrow \Delta AQM$ cân tại M. Vậy $MQ = AM = x$.
Tính MQ. Xét ΔSAO, ta có

$$MN \parallel SA \Rightarrow \frac{MN}{AS} = \frac{OM}{OA} \Rightarrow MN = AS \cdot \frac{OM}{OA} = a\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = a - x\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = MQ \cdot MN = x \cdot \left(a - x\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}x\sqrt{2} \cdot \left(a - x\sqrt{2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $x\sqrt{2}$ và $\left(a - x\sqrt{2}\right)$:

$$x\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \leq \left(\frac{x\sqrt{2} + a - x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \leq \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{a^2}{4\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$x\sqrt{2} = a - x\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } AO.$$

Vậy: $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

□

Bài 24. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC, và CD lần lượt tại N, P, Q.

1. Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp. Thiết diện là hình gì?
2. Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.
3. Cho $\widehat{SAD} = 90°$ và $SA = a$. Tính diện tích của thiết diện theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện bằng $\dfrac{3a^2}{8}$.

Lời giải.

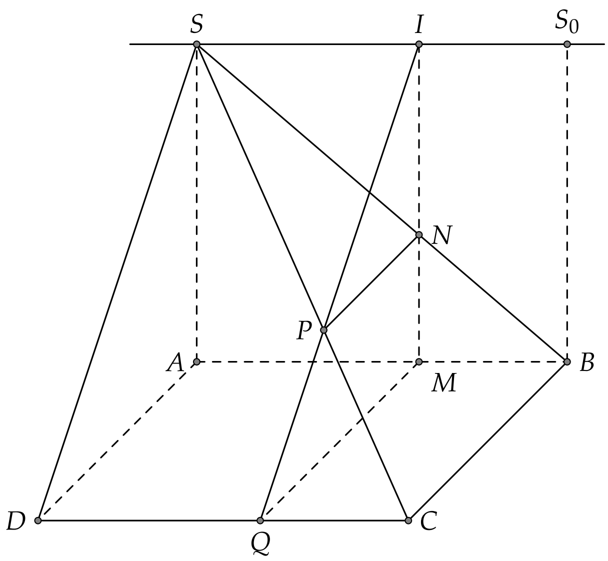
1. Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp:
Vì mp $(\alpha) \parallel (SAD)$ suy ra mp (α) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (SAD).

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(ABCD)$.
  Có M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và $(ABCD)$, vì mp $(\alpha) \parallel AD$ nên giao tuyến của chúng qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt CD tại điểm Q. Tương tự:

- Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAB) có M là điểm chung và $(\alpha) \parallel SA$ nên giao tuyến của chúng là MN với $MN \parallel SA$ và $N \in SB$. (1)

- Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBC) có N là điểm chung và $(\alpha) \parallel AD \parallel BC$ nên giao tuyến của chúng là NP với $NP \parallel BC$ và $P \in SC$. (2)

- Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SCD) có 2 điểm chung là P, Q. Vậy giao tuyến của chúng là PQ.



Suy ra thiết diện cần tìm là $MNPQ$. Từ (1) và (2) thì $MQ \parallel PN$. Vậy $MNPQ$ là hình thang.

2. Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.
   Ta có: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AB \subset (SAB), DC \subset (SCD) \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \left(Sx \parallel AB \parallel CD\right) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$
   Mà $\begin{cases} I \in PQ \subset (SCD) \\ I \in MN \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$. Vậy $I \in Sx$.
   Giới hạn quĩ tích: Khi $M \equiv A$ thì $I \equiv S$. Còn khi $M \equiv B$ thì $I \equiv S_0$.

3. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.
   Ta có: $S_{MNPQ} = S_{\triangle IMQ} - S_{\triangle INP} = S_{\triangle SAD} - S_{\triangle INP}$ (Vì $\triangle IMQ = \triangle SAD$ $(c \cdot g \cdot c)$).
   Tính $S_{\triangle SAD}$. Ta có $\triangle SAD$ vuông cân tại A, do đó $S_{SAD} = \dfrac{1}{2}a^2$.
   Tính $S_{\triangle INP}$: Xét tam giác SBC, tam giác SBS_0 và tam giác SAB. có:
   $$NI \parallel S_0B \Rightarrow \frac{NI}{S_0B} = \frac{SN}{SB} \qquad (1)$$
   $$PN \parallel BC \Rightarrow \frac{PN}{BC} = \frac{SN}{SB} \qquad (2)$$
   $$MN \parallel SA \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB} \qquad (3)$$
   Từ (1), (2) và (3), ta được $\dfrac{NI}{S_0B} = \dfrac{PN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow NI = PN = AM = x$.
   $\Rightarrow \triangle INP$ vuông cân tại N, vì $NI \parallel SA, PN \parallel AD$ và $SA \perp AD$.
   Do đó $S_{\triangle INP} = \dfrac{1}{2}x^2$.
   Vậy diện tích thiết diện $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{1}{2}x^2 = \dfrac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)$.

Để $S_{MNPQ} = \dfrac{3a^2}{8}$ thì $\dfrac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right) = \dfrac{3a^2}{8} \Leftrightarrow x^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

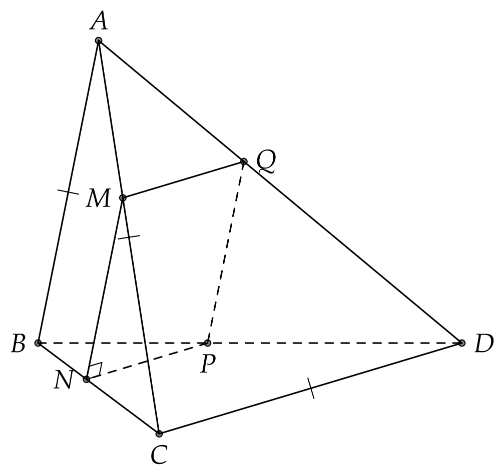
□

Bài 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = CD = a$ và AB vuông góc với CD. Lấy M thuộc đoạn AC với $AM = x\,(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB, CD cắt BC, BD, AD lần lượt tại N, P, Q.

1. Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.
2. Tính diện tích $MNPQ$ theo a và x.
3. Tính x để diện tích $MNPQ$ lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.
4. Định x để $MNPQ$ là hình vuông.

Lời giải.

1\.



Ta có: $\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (ABC) \\ (\alpha) \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB.$

Ta có: $\begin{cases} MQ = (\alpha) \cap (ACD) \\ (\alpha) \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel CD.$

Ta có: $\begin{cases} NP = (\alpha) \cap (BCD) \\ (\alpha) \parallel CD \end{cases} \Rightarrow NP \parallel CD.$

Ta có: $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel AB \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel AB.$

Tứ giác $MNPQ$ có hai cặp cạnh đối song song với nhau nên $MNPQ$ là hình bình hành.

Vì $\begin{cases} AB \parallel MN, CD \parallel NP \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP.$

Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

2. Trong $\triangle ACD$ có $MQ \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MQ}{CD} \Rightarrow MQ = x$.

   Trong $\triangle ABC$ có $MN \parallel AB$.

   Suy ra $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{MN}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{CM}{CA} \cdot AB = \dfrac{a-x}{a} \cdot a = a - x$.

   $S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = (a-x) \cdot x$.

3. Ta có $(a-x) + x = a$ = (hằng số). Nên để diện tích này lớn nhất khi $a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

4. Để $MNPQ$ là hình vuông thì $MN = MQ \Leftrightarrow a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

□

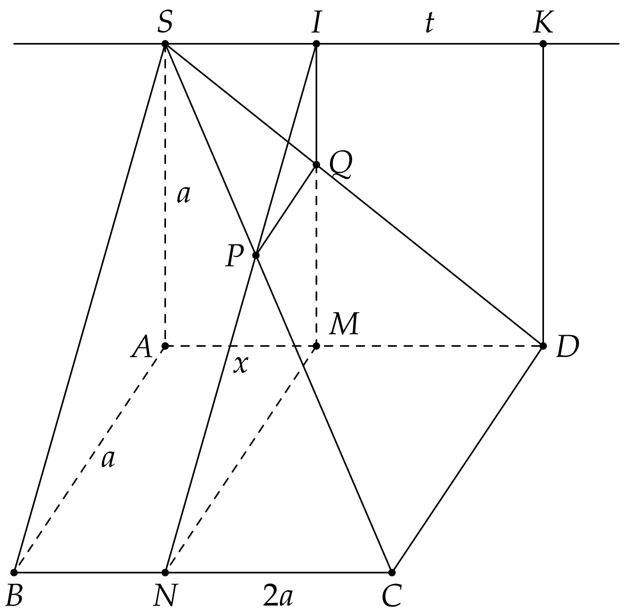
Bài 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình hình hành với $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại A. Trên cạnh AD lấy điểm M với $AM = x$ $(0 < x < 2a)$, mặt phẳng (α) qua M song song với SA và CD cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Tính diện tích hình thang $MNPQ$ theo a và x.

c) Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP khi M chạy từ A đến D.

Lời giải.



a) Vì mặt phẳng $(\alpha) \parallel AB$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến $MN \parallel AB \parallel CD$. Mặt phẳng $(\alpha) \parallel SA$ nên (α) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến $MQ \parallel SA$. Mặt phẳng $(\alpha) \parallel CD$ nên (α) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến $QP \parallel CD$. Suy ra thiết diện mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $MNPQ$ (1).
Mặt khác $AB \perp AS$, $MN \parallel AB$ và $MQ \parallel SA$ nên $MN \perp MQ$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Trong mặt phẳng (SAD) có $MQ \parallel AS$ suy ra

$$\frac{DM}{DA} = \frac{DQ}{DS} = \frac{MQ}{AS} = \frac{2a-x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{2a-x}{2a} \cdot a = \frac{2a-x}{2}.$$

Trong mặt phẳng (SCD) có $PQ \parallel CD$ suy ra

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SD-DQ}{SD} = 1 - \frac{DQ}{SD} = 1 - \frac{2a-x}{2a} = \frac{x}{2a} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2}.$$

Vì $MN \parallel AB$, mà $ABCD$ là hình bình hành nên $MN = AB = a$.
Diện tích hình thang vuông $MNPQ$

$$S_{MNPQ} = \frac{(MN+PQ)MQ}{2} = \frac{\left(a+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{2a-x}{2}}{2} = \frac{(2a+x)(2a-x)}{8} = \frac{4a^2-x^2}{8}.$$

c) Ta có $(SBC) \cap (SAD) = St$ (với $St \parallel AD \parallel BC$). Vì $I = MQ \cap NP$, mà

$$\begin{cases} I \in MQ \subset (SAD) \\ I \in NP \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC).$$

Từ đó suy ra I thuộc giao tuyến St cố định. Mặt khác, nếu $M \equiv A$ thì $I \equiv S$, nếu $M \equiv D$ thì $I \equiv K$ (với $DK \parallel SA$).
Vậy khi M chạy trên đoạn AD thì giao điểm I chạy trên đoạn SK.

□

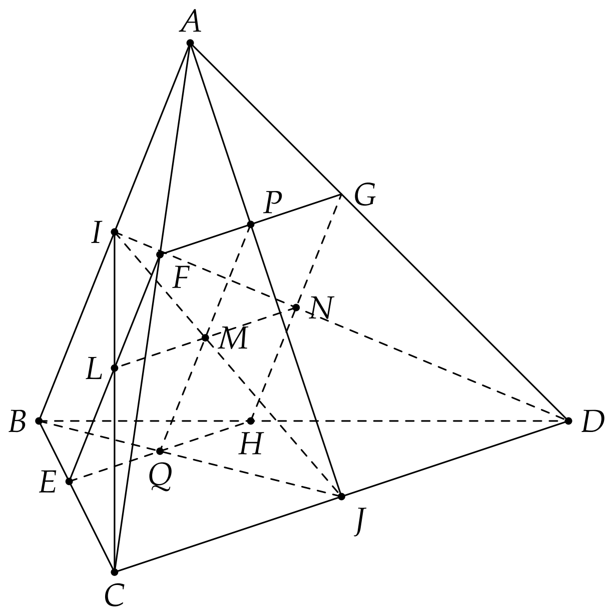
Bài 27. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Giả sử $AB \perp CD$, mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn I, J và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với (ICD) và (JAB).

b) Xác định thiết diện của $ABCD$ và mặt phẳng (α). Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.

c) Tính diện tích thiết diện của hình chữ nhật biết $IM = \dfrac{1}{3}IJ$.

Lời giải.



a) Tìm giao tuyến của (α) với (ICD):
Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel CD, CD \subset (ICD)\\ M \in (\alpha) \cap (ICD)\end{cases}$ suy ra giao tuyến của (α) và (ICD) là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N. Tương tự $\begin{cases}(\alpha) \parallel AB, AB \subset (JAB)\\ M \in (\alpha) \cap (JAB)\end{cases}$ suy ra giao tuyến của (α) và (JAB) là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q.

b) Xác định thiết diện của $ABCD$ và mặt phẳng (α):
Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel AB, AB \subset (ABC)\\ L \in (\alpha) \cap (ABC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = EF$ (1). Với EF đi qua L và $EF \parallel AB$, $E \in BC, F \in AC$.
Ta có $\begin{cases}(\alpha) \parallel AB, AB \subset (ABD)\\ N \in (\alpha) \cap (ABD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = HG$ (2). Với $N \in HG$ và $HG \parallel AB$, $H \in BD, G \in AD$.
Từ (1) và (2) suy ra $EF \parallel HG \parallel AB$ (3). Mặt khác

$\begin{cases}(\alpha) \parallel CD, CD \subset (ACD)\\ FG = (\alpha) \cap (ACD)\end{cases} \Rightarrow FG \parallel CD$ (4); $\begin{cases}(\alpha) \parallel CD, CD \subset (BCD)\\ EH = (\alpha) \cap (BCD)\end{cases} \Rightarrow EH \parallel CD$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $FG \parallel EH \parallel CD$ (6). Từ (3) và (6) suy ra $EFGH$ là hình bình hành mà $AB \perp CD$ $(*)$.
Từ (3), (6) và $(*)$ suy ra $EFGH$ là hình chữ nhật.

c) Tính diện tích thiết diện của hình chữ nhật biết $IM = \dfrac{1}{3}IJ$:
Ta có $S_{EFGH} = EF \cdot FG = PQ \cdot LN$.
Xét tam giác ICD, ta có $LN \parallel CD \Rightarrow \dfrac{LN}{CD} = \dfrac{IN}{ID}$ (7). Xét tam giác IJD ta có $MN \parallel JD \Rightarrow \dfrac{IN}{ID} = \dfrac{IM}{IJ}$ (8).
Từ (7) và (8) suy ra $\dfrac{LN}{CD} = \dfrac{IM}{IJ} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow LN = \dfrac{CD}{3} = \dfrac{b}{3}$. Tương tự $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{JM}{JI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2}{3}a$.
Suy ra $S_{EFGH} = \dfrac{2ab}{9}$.

□

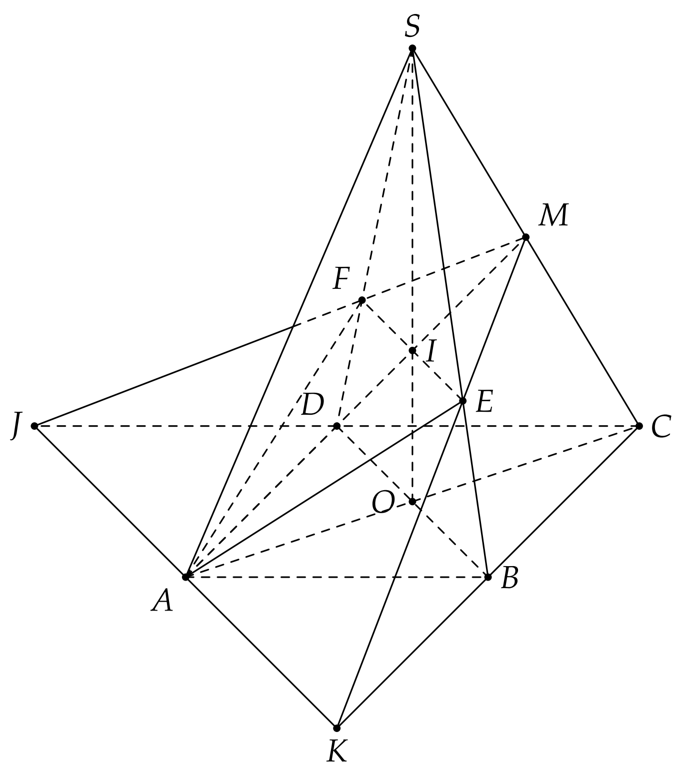
Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh rằng 3 điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.



a) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$. Gọi $I = AM \cap SO$ $(AM, SO \subset (SAC) \Rightarrow$

$I \in (SBD)$). Ta có

$$\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (P) = Ix \quad (Ix \parallel BD).$$

Gọi $E = Ix \cap SB$, $F = Ix \cap SD$. Suy ra E, F là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (P). Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $AEMF$.

b) Dễ thấy I là trọng tâm của tam giác SAC nên $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác SBD có EF song song với BD ta có $\dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra

$$\frac{S_{SME}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2}SM \cdot SE \cdot \sin\widehat{BSC}}{\frac{1}{2}SC \cdot SB \cdot \sin\widehat{BSC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{S_{SMF}}{S_{SCD}} = \frac{\frac{1}{2}SM \cdot SF \cdot \sin\widehat{DSC}}{\frac{1}{2}SC \cdot SD \cdot \sin\widehat{DSC}} = \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{3}.$$

c) Ta có

$$K = EM \cap BC \Rightarrow K \in (P) \cap (ABCD) \qquad (1)$$
$$J = FM \cap CD \Rightarrow J \in (P) \cap (ABCD) \qquad (2)$$
$$A \in (P) \cap (ABCD) \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm K, J, A thuộc giao tuyến (Δ) của mặt phẳng (P) và $(ABCD)$. Ta lại có

$$\begin{cases} (P) \cap (ABCD) = (\Delta) \\ BD \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \parallel BD.$$

Xét tam giác MJK có $EF \parallel JK$ (vì $JK \parallel BD$, $EF \parallel BD$) suy ra

$$\frac{ME}{MK} = \frac{MF}{MJ} = \frac{MI}{MA} = \frac{EF}{JK} = \frac{1}{3}.$$

□

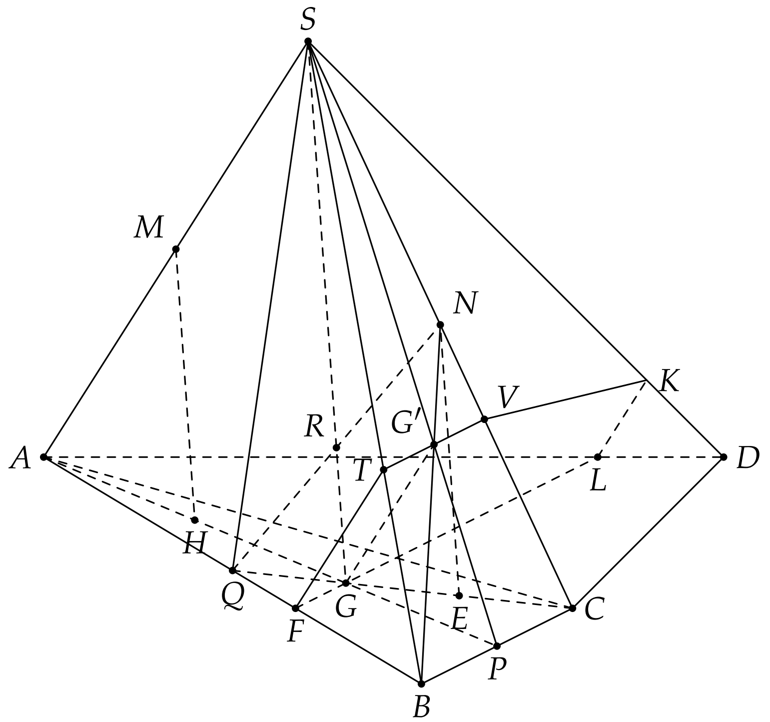
Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

a) Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác SBC. Chứng minh rằng: $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.

c) Mặt phẳng (α) qua GG' và song song với BC. Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α).

Lời giải.



a) Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.
Gọi E là trung điểm của GC. Trong tam giác QNE có RG là đường trung bình của tam giác nên $GR \parallel NE$, $GR = \frac{1}{2}NE$ (1). Trong tam giác SCG có NE là đường trung bình của tam giác nên $GS \parallel NE$, $GS = 2NE$ (2). Từ (1) và (2) suy ra ba điểm G, R, S thẳng hàng và $GS = 4GR$. Trong tam giác SAG có HM là đường trung bình của tam giác nên $GS = 2HM$.

b) Chứng minh rằng: $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.
Trong tam giác SAP có $\frac{PG}{PA} = \frac{PG'}{PS} = \frac{1}{3} \Rightarrow GG' \parallel SA$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng chứa SA. Suy ra $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.

c) Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α).
Vì $(\alpha) \parallel BC$ nên (α) cắt mặt phẳng đáy $(ABCD)$ theo giao tuyến qua G và song song với BC. Giao tuyến này cắt AB tại F, cắt AD tại L. Vì $GG' \parallel SA$ nên (α) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.
Vì $GG' \parallel SA$ nên (α) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T. TG' là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SBC), giao tuyến này cắt SC tại V.
Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác $FLKVT$.

□

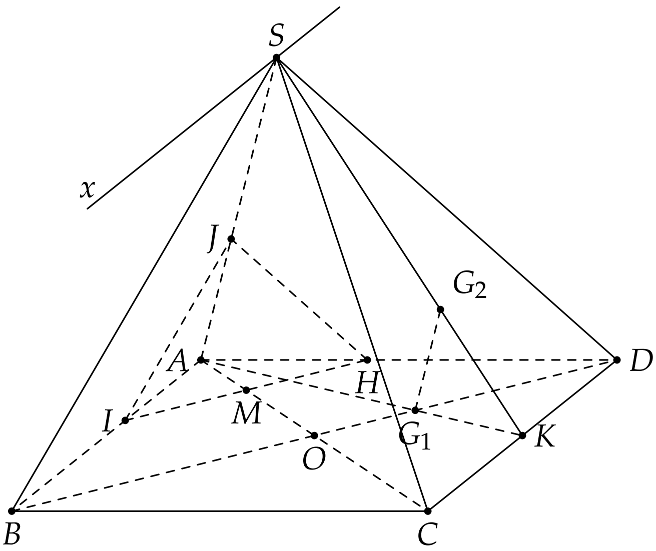
Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, có $AC = a$, $BD = b$, tam giác SBD đều.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và SCD. Chứng minh rằng G_1G_2 song song với mặt phẳng (SCA).

c) Gọi M là điểm di động trên đoạn AO với $AM = x$ $(0 < a < \frac{a}{2})$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với (SBD). Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích thiết diện theo a, b, x.

Lời giải.



a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).
Ta có

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \quad (Sx \parallel AB \parallel CD).$$

b) Chứng minh rằng G_1G_2 song song với mặt phẳng (SCA).
Gọi K là trung điểm của CD. Vì G_1, G_2 là trọng tâm của hai tam tam giác ACD và SCD nên $\dfrac{KG_1}{KA} = \dfrac{KG_2}{KS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel SA$, mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SAC)$.

c) Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.
Vì $(P) \parallel (SBD) \Rightarrow (P) \parallel SB$, $(P) \parallel SD$, $(P) \parallel BD$. Vì $(P) \parallel BD$ nên (P) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AB, AD lần lượt tại I và H.
Vì $(P) \parallel SB$ nên (P) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến qua I và song song với SB. Giao tuyến này cắt SA tại J. Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IJH.
Ba cạnh của tam giác IJH lần lượt song song với ba cạnh của tam giác SBD, mà tam giác SBD đều nên tam giác IJH đều. Ta có

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AJ}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{JH}{BD} \Rightarrow JH = \frac{AM}{AO} \cdot BD = \frac{x}{\frac{a}{2}} \cdot b = \frac{2bx}{a}.$$

Suy ra $S_{IJH} = \dfrac{JH^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

□

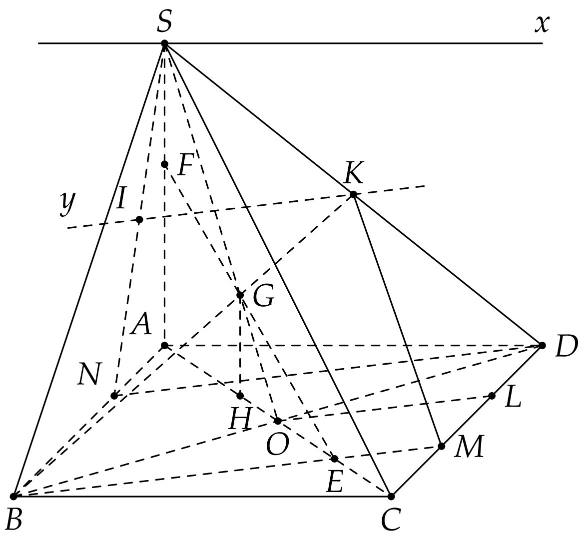
Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD).

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBD. Trên các cạnh CD và AB lần lượt lấy các điểm M, N thỏa $MD = 2MC$, $NB = 2NA$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SND) và (BGM). Tìm giao điểm I của SN và (BMG).

c) Gọi F là giao điểm của SA và (BGM). Tính tỉ số $\dfrac{FS}{FA}$.

Lời giải.



a) Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD).
Ta có

$$\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx \quad (Sx \parallel BC \parallel AD).$$

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SND) và (BGM).
Gọi K là trung điểm của $SD \Rightarrow K \in BG$. Ta có

$$\begin{cases} K \in (SND) \cap (BMG) \\ ND \parallel BM \\ ND \subset (SND), BM \subset (BMG) \end{cases} \Rightarrow (SND) \cap (BMG) = Ky \quad (Ky \parallel ND \parallel BM).$$

Trong mặt phẳng (SND), gọi $I = SN \cap Ky$. Ta có

$$\begin{cases} I \in SN \\ I \in Ky, Ky \subset (BMG) \end{cases} \Rightarrow I = SN \cap (BMG).$$

c) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap BM$. Ta có EG là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (BMG). Gọi $F = SA \cap EG$ thì F chính là giao điểm của SA và mặt phẳng (BMG).
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$. Vì G là trọng tâm tam giác $SBD \Rightarrow SG = \dfrac{2}{3}SO$, mà SO là đường trung tuyến của SAC. Suy ra G là trọng tâm của tam giác SAC.
Dựng $OL \parallel BM (L \in CD)$, thì OL là đường trung bình của tam giác $DBM \Rightarrow DL = LM$.
Theo đề bài suy ra $DL = KM = MC$, cho nên EM là đường trung bình của tam giác COL.
Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $GH \parallel SA$ $(H \in AC)$. Áp dụng định lý Ta-lét cho các tam

giác SAO và FAE ta có

$$\frac{OG}{OS}=\frac{OH}{OA}=\frac{GH}{AS}=\frac{1}{3}\Rightarrow OH=\frac{1}{3}OA, GH=\frac{1}{3}AS \qquad (*)$$

$$\frac{HG}{AF}=\frac{EH}{EA}, \text{ mà } \frac{EH}{EA}=\frac{EO+OH}{EO+OA}=\frac{\frac{3}{2}OH+OH}{\frac{3}{2}OH+3OH}=\frac{5}{9}\Rightarrow HG=\frac{5}{9}AF \qquad (**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\frac{1}{3}SA=\frac{5}{9}AF\Rightarrow AF=\frac{3}{5}SA\Rightarrow\frac{FS}{FA}=\frac{2}{3}$.

□

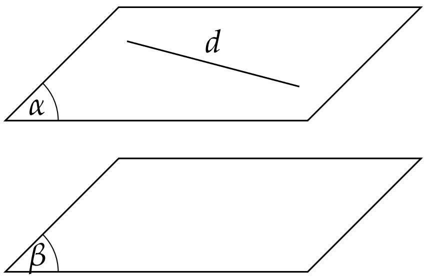
Bài 3. HAI MẶT PHẲNG THẲNG SONG SONG

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Định nghĩa

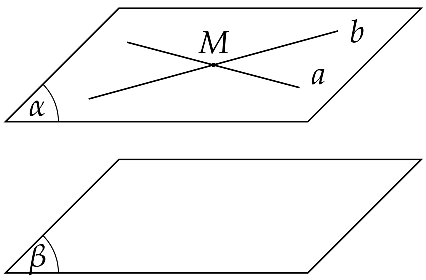
Định nghĩa 1. Hai mặt phẳng (α) và (β) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, khi đó ta kí hiệu $(\alpha)\parallel(\beta)$.

Hệ quả 1.
Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). Nếu đường thẳng d nằm trong (α) thì $(\alpha)\parallel(\beta)$.



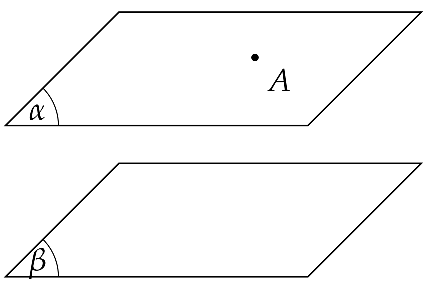
2. Tính chất

Định lí 1.
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng song song với mặt phẳng (β) thì $(\alpha)\parallel(\beta)$.



Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song: Ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

Định lí 2.
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



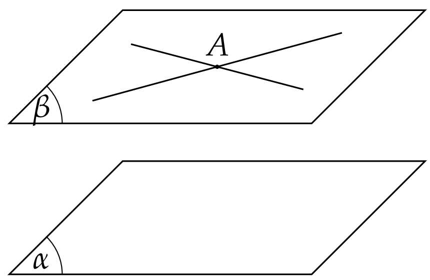
Hệ quả 2. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

⚠ *Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α): Ta chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và (β) song song với (α).*

Hệ quả 3. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

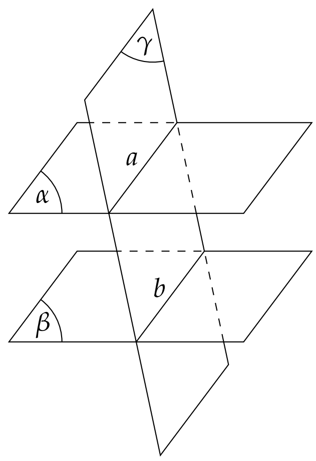
Hệ quả 4.

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng qua A và song song với (α).



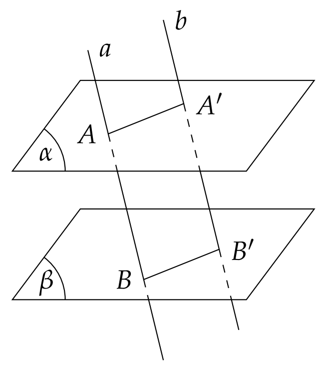
Định lí 3.

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



Hệ quả 5.

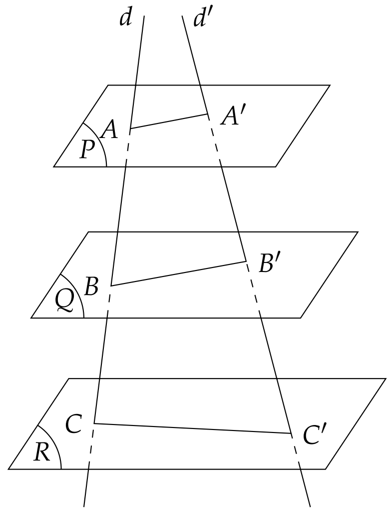
Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



3. Định lý Ta-lét (Thalès)

Định lí 4.

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



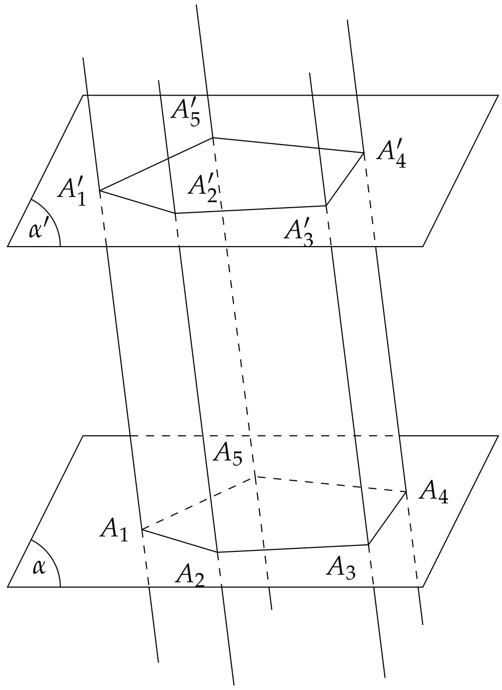
Nếu hai cát tuyến d và d' cắt 3 mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q) \parallel (R)$ *lần lượt tại các giao điểm* A, B, C *và* A', B', C' *thì* $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

4. Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa 2.

Cho hai mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\alpha')$. Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

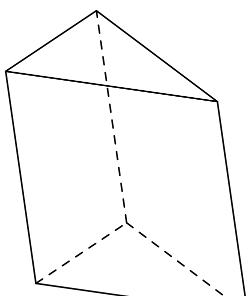
Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$.



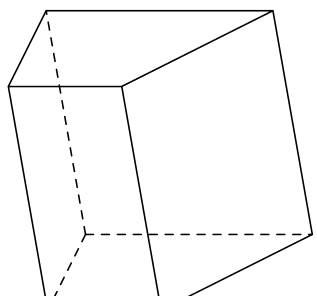
- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \ldots, A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2, \ldots,$ $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

Tính chất 1.

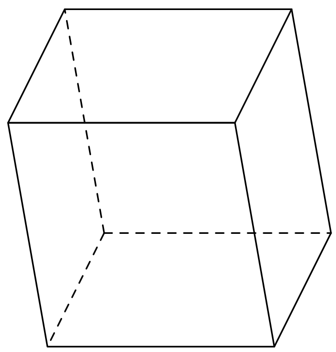
- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.
- Người ta gọi tên hình lăng trụ theo đáy của nó như sau:



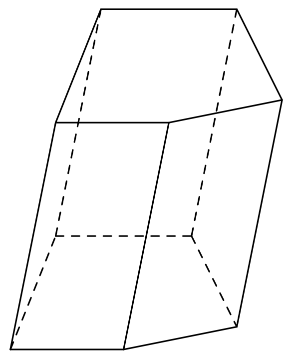
Lăng trụ tam giác



Lăng trụ tứ giác



Hình hộp



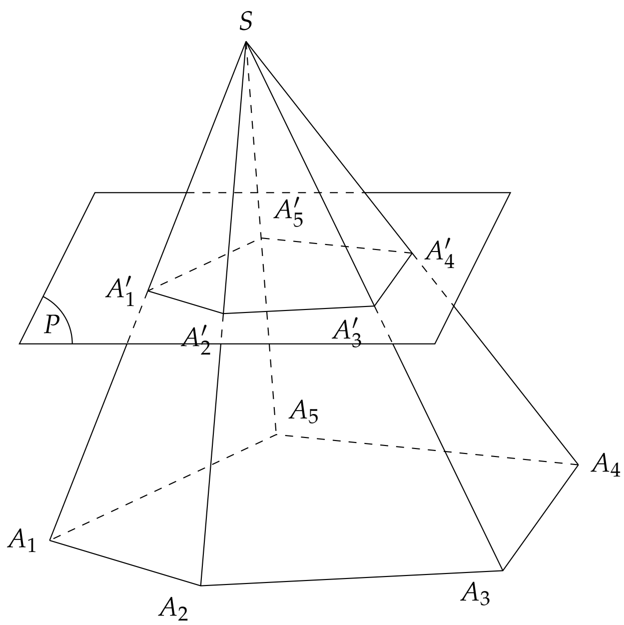
Lăng trụ ngũ giác

- Hình lăng trụ có đáy là tam giác gọi là *hình lăng trụ tam giác*.
- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.

5. Hình chóp cụt

Định nghĩa 3. Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy của hình chóp và không đi qua đỉnh lần lượt cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$. Hình tạo thành bởi hai đa giác $A'_1A'_2\ldots A'_n$, $A_1A_2\ldots A_n$ và các tứ giác $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2, \ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là *hình chóp cụt*.

- Đáy $A_1A_2\ldots A_n$ của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt.
- Thiết diện $A'_1A'_2\ldots A'_n$ của hình chóp và (P) gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.
- Ta gọi tên hình chóp cụt theo đa giác đáy của nó (chóp cụt tam giác, tứ giác,. . .).



Tính chất 2.

- Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và tỉ lệ giữa các cặp cạnh tương tứng bằng nhau.
- Các mặt bên là hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại 1 điểm.

B. Bài tập rèn luyện

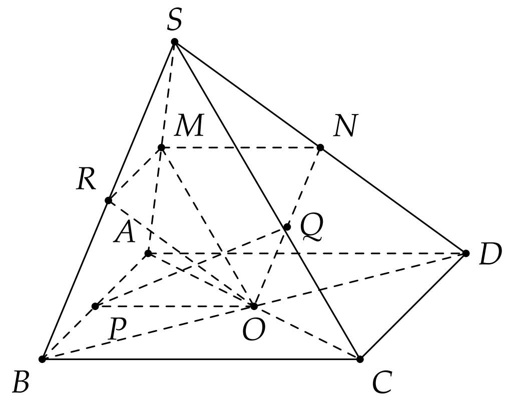
Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, AD.

1. Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.
2. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$, $(MOR) \parallel (SCD)$.

Lời giải.

1. Trong hai tam giác SAC và SBD có $OM \parallel SC$ và $ON \parallel SB$ (đường trung bình của tam giác).
Có $\begin{cases} OM, ON \subset (OMN) \\ SB, SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$.

2.
Ta có: $OP \parallel AD$, mà $AD \parallel MN$ nên suy ra $OP \parallel MN$ và $PQ \subset (OMN)$.
Vì $(OMN) \parallel (SBC)$ nên suy ra $PQ \parallel (SBC)$.
Ta có: $MR \parallel AB$, mà $AB \parallel CD$ nên suy ra $MN \parallel CD$.
Mặt khác $OM \parallel SC$ và $\begin{cases} MR, OM \subset (OMR) \\ CD, SC \subset (SCD) \end{cases}$
$\Rightarrow (OMR) \parallel (SCD)$.



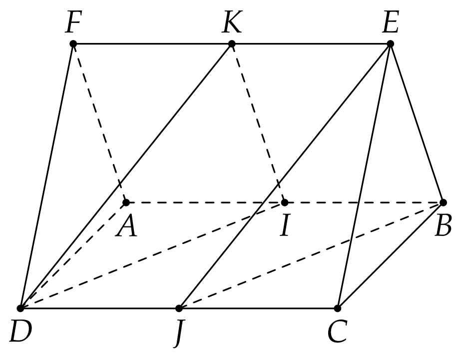
□

Bài 2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh rằng:

1. $(ADF) \parallel (BCE)$.
2. $(DIK) \parallel (JBE)$.

Lời giải.

1. Ta có: $AF \parallel BE$ và $AD \parallel BC$.
Mà $AF, AD \subset (ADF)$ và $BE, BC \subset (BCE)$ nên suy ra $(ADF) \parallel (BCE)$.
2. Ta dễ dàng chứng minh được $BIDJ$ và $BIKE$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $DI \parallel BJ$ và $IK \parallel BE$.
Suy ra $(DIK) \parallel (JBE)$.



□

Bài 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$, $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1 và N_1. Chứng minh rằng:

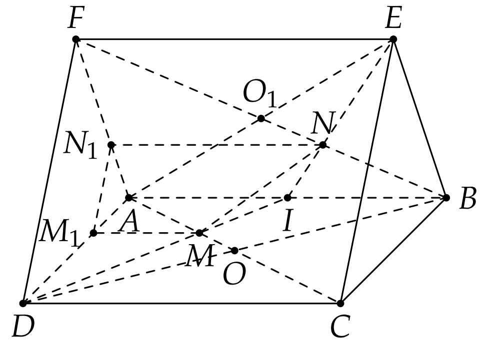
1. $MN \parallel DE$.

2. $M_1N_1 \parallel (DEF)$.
3. $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

Lời giải.

1. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có:
$\begin{cases} AC = 3AM \\ AC = 2AO \end{cases} \Rightarrow AM = \dfrac{2}{3}AO.$
Mà AO là đường trung tuyến của tam giác ABD nên suy ra M là trọng tâm của tam giác ABD.
Chứng minh tương tự ta có N là trọng tâm của tam giác EAB. Từ đó suy ra DM, EN, AB đồng quy tại I.
Trong tam giác IDE ta có: $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE$.

2. Ta có: $NN_1 \parallel AI \Rightarrow \dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{IN}{NE} = \dfrac{1}{2}$.
Tương tự ta có:
$$MM_1 \parallel AI \Rightarrow \frac{AM_1}{M_1D} = \frac{IM}{MD} = \frac{1}{2}.$$
Từ đó suy ra $\dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{AM_1}{M_1D} \Rightarrow M_1N_1 \parallel DF$.
Mà $DF \subset (DEF)$ nên suy ra $M_1N_1 \parallel (DEF)$.



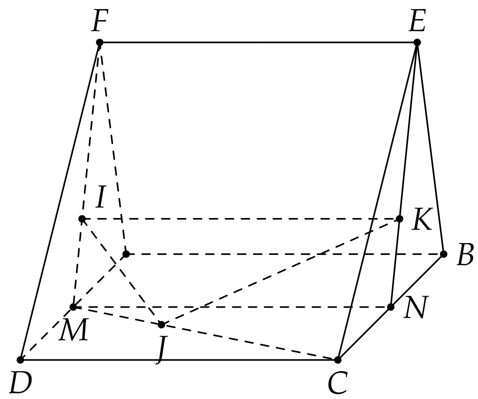
3. Ta có: $MN \parallel DE$ và $M_1N_1 \parallel DF$.
Mà $MN, M_1N_1 \subset (MNN_1M_1)$ và $DE, DF \subset (DEF)$ nên suy ra $(MNN_1M_1) \parallel (DEF)$.

□

Bài 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh chung là AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC và I, J, K theo tứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC và BCE. Chứng minh $(IJK) \parallel (CDFE)$.

Lời giải.

Xét $\triangle MFC$ có: $\dfrac{MI}{MF} = \dfrac{MJ}{MC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel FC \quad (1)$.
Xét hình bình hành $MNEF$ có:
$$\frac{MI}{MF} = \frac{NK}{NE} = \frac{1}{3} \Rightarrow IK \parallel FE \quad (2).$$
Từ (1) và (2) ta có:
$$\begin{cases} IJ \parallel FC, IK \parallel FE \\ IJ, IK \subset (IJK) \\ FC, FE \subset (CDFE) \end{cases} \Rightarrow (IJK) \parallel (CDFE).$$



□

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB.

1. Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

2. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng $G_1G_2G_3$. Tính diện tích thiết diện theo diện tích tam giác BCD là S.

Lời giải.

1. Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$

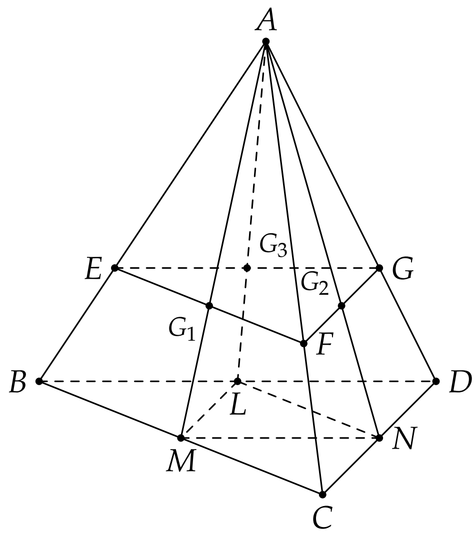
Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD và BD. Trong tam giác AMN, ta có

$$\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{G_1G_2}{MN} = \frac{2}{3}\text{(tính chất trọng tâm)}$$

Theo định lý Ta-lét đảo, suy ra $G_1G_2 \parallel MN$.
Chứng minh tương tự, ta cũng có $G_2G_3 \parallel NL$ và $G_3G_1 \parallel LM$.
Từ đó suy ra

$$\begin{cases} G_1G_2 \parallel MN, G_2G_3 \parallel NL \\ MN, NL \subset (BCD) \\ G_1G_2, G_2G_3 \subset (G_1G_2G_3). \end{cases}$$

$\Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.



2. Tìm thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$.

Ta có $\begin{cases} BC \parallel (G_1G_2G_3) \\ BC \subset (ABC) \\ G_1 \in (G_1G_2G_3) \cap (ABC). \end{cases}$

Vậy giao tuyến của mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ với (ABC) qua G_1 và song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại E, F.
Tương tự: $(G_1G_2G_3)$ cắt (ACD) theo giao tuyến $FG \parallel CD$.
$(G_1G_2G_3)$ cắt (ABD) theo giao tuyến $GE \parallel BD$.
Vậy thiết diện của $ABCD$ với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ là tam giác EFG.
Xét tam giác AMC và tam giác ABC, ta có

$$\begin{cases} G_1F \parallel MC \Rightarrow \dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{2}{3} \\ EF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3}BC$. Tương tự, $FG = \dfrac{2}{3}CD$, $GE = \dfrac{2}{3}BD$.
Diện tích thiết diện

$$\begin{aligned} S_{EFG} &= \frac{1}{4}\sqrt{(EF+FG+GE)(EF+FG-GE)(EF-FG+GE)(-EF+FG+GE)} \\ &\cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}\sqrt{(BC+CD+DB)(BC+CD-DB)(BC-CD+DB)(-BC+CD+DB)} \\ &= \frac{4}{9}S_{BCD} = \frac{4}{9}S. \end{aligned}$$

□

Bài 6. Từ bốn đỉnh của hình bình hành $ABCD$ vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz, Dt sao cho chúng cắt mặt phẳng $ABCD$. Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A', B', C' và D'.

1. Chứng minh $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.
2. Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì?
3. Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Lời giải.

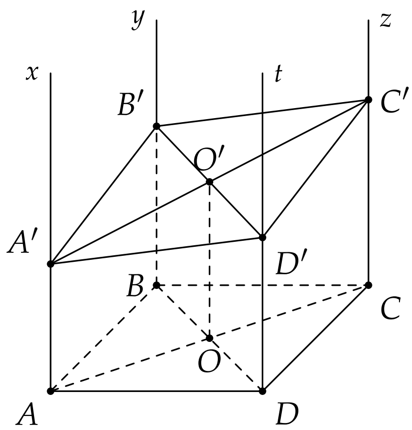
1. Chứng minh $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.

   Ta có

   $$\begin{cases} Ax \parallel Dt \\ Dt \subset (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow Ax \parallel (Cz, Dt).$$

   $$\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (Cz, Dt).$$

   Mà $Ax, AB \subset (Ax, By)$.
   Suy ra $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$.
   Chứng minh tương tự, ta cũng có $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.



2. Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình gì?
   Ta có

   $$\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, By) = A'B' \\ (\alpha) \cap (Cz, Dt) = C'D' \\ (Ax, By) \parallel (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel C'D'.$$

   $$\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ (\alpha) \cap (By, Cz) = B'C' \\ (Ax, Dt) \parallel (By, Cz) \end{cases} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'.$$

   Vậy tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

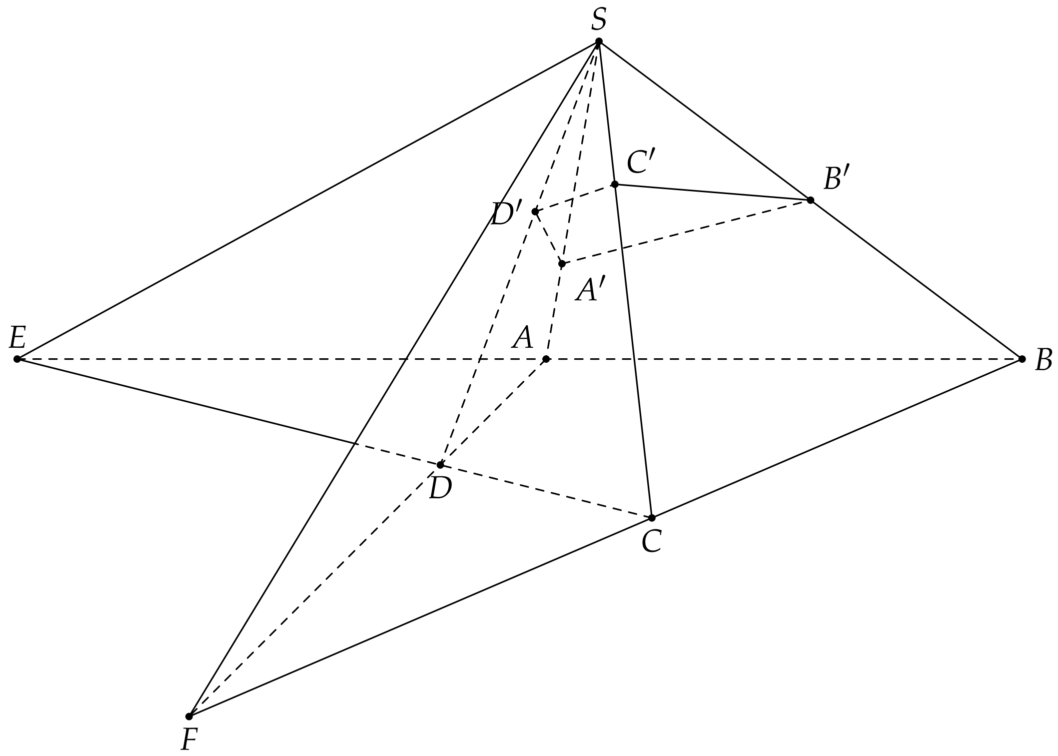
3. Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.
   Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$.
   Vì O, O' là tâm của hai hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$ nên có OO' là đường trung bình của hai hình thang $ACC'A'$ và $BDD'B'$.
   Theo tính chất đường trung bình của hình thang, suy ra

   $$OO' = \frac{AA' + CC'}{2} = \frac{BB' + DD'}{2} \Rightarrow AA' + CC' = BB' + DD'.$$

□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C' và D'. Tìm điều kiện của mặt phẳng (P) để $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Lời giải.



Ta có $A'B'C'D'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} A'B' \parallel C'D' \\ A'D' \parallel B'C' \end{cases}$.
Gọi $E = AB \cap CD$ và $F = AD \cap BC$. Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$, $SF = (SAD) \cap (SBC)$.
Ta lại có

$$\begin{cases} A'B' = (P) \cap (SAB) \\ C'D' = (P) \cap (SCD) \\ SE = (SAB) \cap (SCD) \\ A'B' \parallel C'D' \end{cases} \Rightarrow SE \parallel A'B' \parallel C'D'.$$

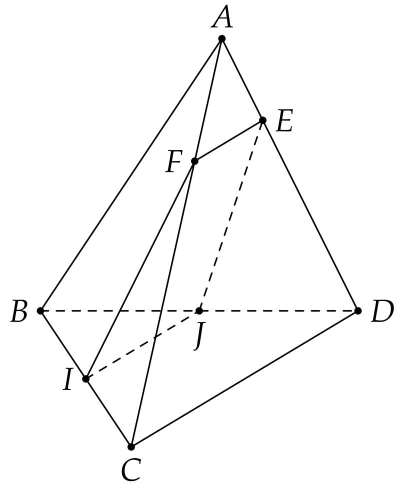
$\Rightarrow SE \parallel (P)$ (theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng).
Tương tự, $SF \parallel (P)$.
Vậy, nếu $(P) \parallel SE$ và $(P) \parallel SF$ thì $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

□

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là điểm thuộc AD khác A và D. Tìm vị trí của E để thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (JEI) là hình thoi.

Lời giải.

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác BCD.
Do đó, $IJ \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (IJEF) \Rightarrow CD \parallel EF$ (do CD, EF đồng phẳng).
Suy ra, thiết diện $IJEF$ là hình thang.
Do đó, điều kiện để $IJEF$ là hình thoi là $\begin{cases} EF = JI \\ EF = JE. \end{cases}$
$\Rightarrow E$ là trung điểm AD.
Ngược lại, nếu E là trung điểm của AD thì

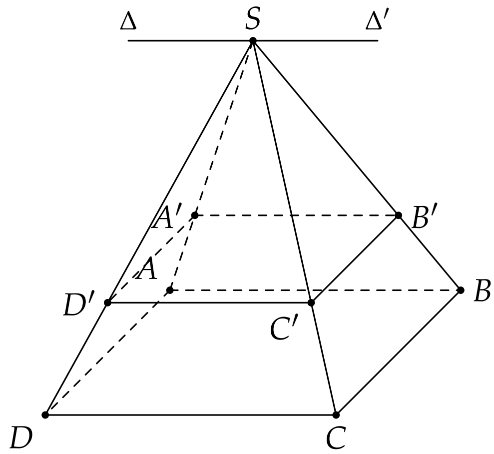


$$\begin{cases} EF \parallel JI \parallel CD, EF = IJ = \dfrac{CD}{2} \\ JE \parallel FI \parallel AB, JE = FI = \dfrac{AB}{2} \\ CD = AB \end{cases} \Rightarrow IJEF \text{ là hình thoi.}$$

□

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các đoạn SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.
Giả sử $(P) \parallel (ABCD)$.
Khi đó, (P) và $(ABCD)$ bị mặt phẳng (SAB) cắt theo hai giao tuyến $A'B'$ và AB song song.
Tương tự, $CD \parallel C'D'$, $BC \parallel B'C'$, $AD \parallel A'D'$.
$\Rightarrow A'B' \parallel C'D'$ và $A'D' \parallel B'C'$.
$\Rightarrow A'B'C'D'$ là hình bình hành.
Giả sử $A'B'C'D'$ là hình bình hành.



Ta có $\begin{cases} A'B' \parallel C'D' \\ A'B' \subset (SAB) \\ C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta = (SAB) \cap (SCD), \Delta \parallel A'B', \Delta \parallel C'D'.$

Mặt khác $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta' = (SAB) \cap (SCD), \Delta' \parallel AB, \Delta' \parallel CD.$

Từ tính chất duy nhất của giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), ta suy ra $\Delta \equiv \Delta'$.
Suy ra $A'B' \parallel AB \parallel \Delta \Rightarrow A'B' \parallel (ABCD)$.
Chứng minh tương tự, ta có $A'D' \parallel (ABCD)$.

Do đó $\begin{cases} A'B' \parallel (ABCD) \\ A'D' \parallel (ABCD) \\ A'B', A'D' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \parallel (ABCD).$ □

Bài 10. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh rằng

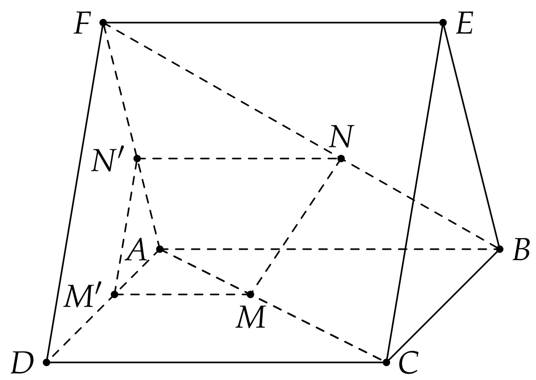
1. Mặt phẳng (ADF) song song với mặt phẳng (BCE).
2. Mặt phẳng (DEF) song song với mặt phẳng $(MM'N'N)$.

Lời giải.

1. Mặt phẳng (ADF) song song với mặt phẳng (BCE).
   Ta có $AF \parallel BE$, $BE \subset (BCE)$ và $AD \parallel BC$, $BC \subset (BCE)$.
   $\Rightarrow AF$ và AD cùng song song với (BCE).
   Mà $AF, AD \subset (ADF)$. Vậy $(ADF) \parallel (BCE)$.

2. Mặt phẳng (DEF) song song với mặt phẳng $(MM'N'N)$.

   Ta có $MM' \parallel AB$, $AB \parallel EF$.
   $\Rightarrow MM' \parallel EF \subset (DEF)$. $(*)$
   Mặt khác,

$$\begin{cases} MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} \\ NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} \\ AM = BN, AC = BF. \end{cases}$$

   $\Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF \subset (DEF)$ $(**)$
   Mà $MM', M'N' \subset (MM'N'N)$ $(***)$
   Từ $(*)$, $(**)$ và $(***)$, suy ra $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

□

Bài 4. KHỐI LĂNG TRỤ

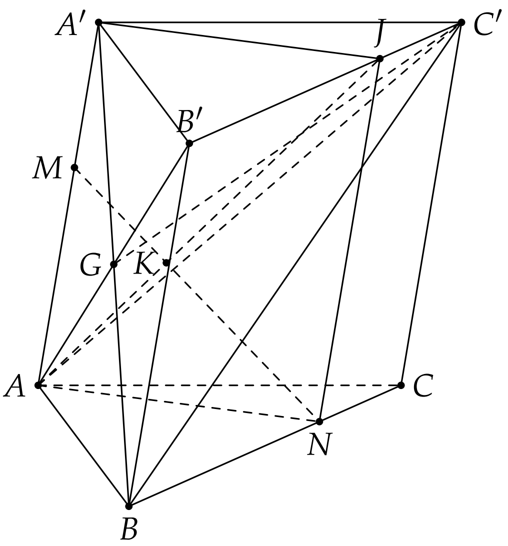
Bài 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên AA' và BC. Tìm giao điểm của $B'C'$ với mặt phẳng $(AA'N)$ và giao điểm của MN với $(AB'C')$.

Lời giải.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Ta có C' là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Gọi G là giao điểm của AB' và BA'.
   Suy ra G là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $BA'C'$.
   Vậy $(AB'C') \cap (BA'C') = C'G$.

2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên AA' và BC. Tìm giao điểm của $B'C'$ với mặt phẳng $(AA'N)$ và giao điểm của MN với $(AB'C')$.

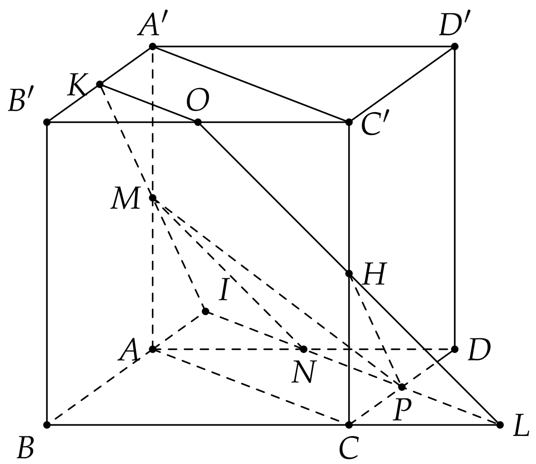


Tìm giao điểm của $B'C'$ với mặt phẳng $(AA'N)$.
Ta có $B'C' \subset (BCC'B')$.
Ta lại có $\begin{cases} N \in (AA'N) \cap (BCC'B') \\ AA' \parallel BB' \\ AA' \subset (AA'N), BB' \subset (BCC'B'). \end{cases}$
$\Rightarrow (AA'N) \cap (BCC'B') = Nx \ (Nx \parallel AA' \parallel BB')$.
Gọi $J = Nx \cap B'C' \Rightarrow J = B'C' \cap (AA'N)$.
Tìm giao điểm của MN với mặt phẳng $(AB'C')$.
Ta có $MN \subset (ANJA')$.
Ta lại có $\begin{cases} A \in (ANJA') \cap (AB'C') \\ \begin{cases} J \in (ANJA') \\ J \in B'C' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow J \in (ANJA') \cap (AB'C'). \end{cases}$
$\Rightarrow AJ = (ANJA') \cap (AB'C')$.
Gọi $K = MN \cap AJ$.
Vậy $K = MN \cap (AB'C')$.

□

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', AD, DC. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P với hình lập phương.

Lời giải.
Gọi I, L lần lượt là giao điểm của đường thẳng NP với AB và BC.
MI là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và $(ABB'A')$. Gọi K là giao điểm của MI và $A'B'$.
K là điểm chung của mặt phẳng (MNP) với $(A'B'C'D')$ và $NP \parallel AC \parallel A'C'$ nên giao tuyến của (MNP) với $(A'B'C'D')$ là đường thẳng đi qua K và song song $A'C'$ cắt $B'C'$ tại O.
O và L là hai điểm chung của (MNP) và $(BCC'B')$ nên $(MNP) \cap (BCC'B') = OL$, gọi $H = OL \cap CC'$.
Vậy thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là lục giác $MNPHOK$ có các cặp cạnh đối song song.

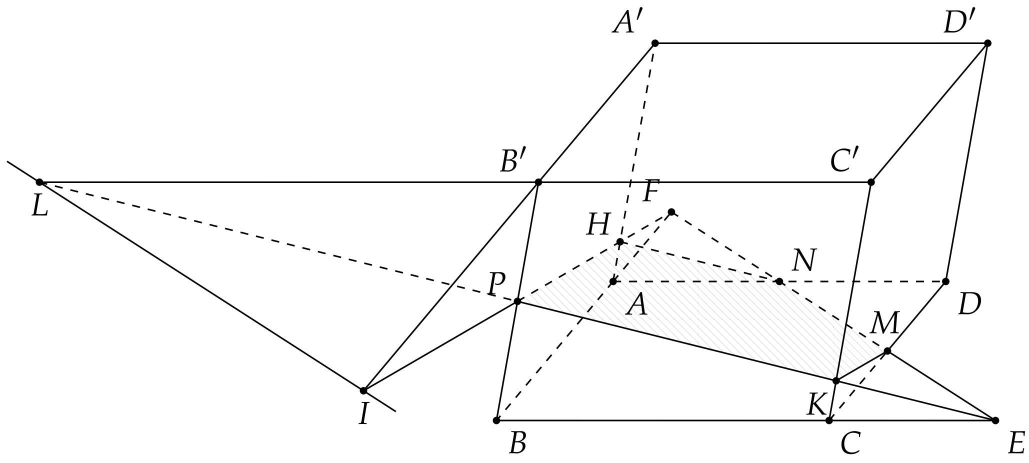


□

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DC, AD, BB'.

1. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Lời giải.



1. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
   Trong mặt phẳng đáy $(ABDC)$ gọi F và E là giao điểm của đường thẳng MN với AB và BC.
   Ta thấy PF là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với $(ABB'A')$.
   Gọi H là giao điểm của AA' và PF.
   Ta thấy PE là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với $(BCC'B')$.
   Gọi K là giao điểm của CC' và PE.
   Kết luận: thiết diện của hình hộp khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MNHPK$.

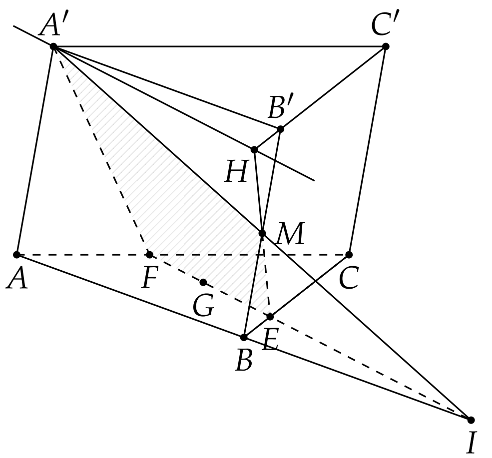
2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.
   Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi I là giao điểm của HP và $A'B'$.
   Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, gọi L là giao điểm của KP và $B'C'$.
   Ta có L và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và $(A'B'C'D')$.
   Kết luận: giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và $(A'B'C'D')$ là đường thẳng LI.

□

Bài 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB', G là trọng tâm tam giác ABC.

1. Tìm thiết diện tạo bởi $(A'MG)$ cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(A'MG)$ với $(A'B'C')$.

Lời giải.



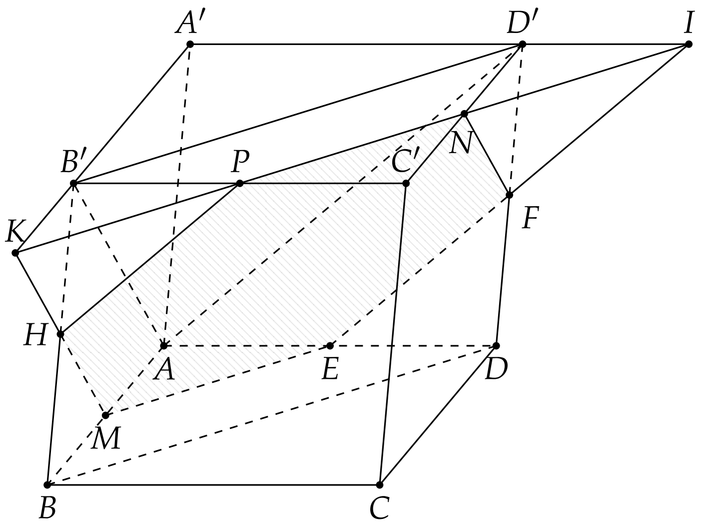
1. Tìm thiết diện tạo bởi $(A'MG)$ cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
   Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $I = A'M \cap AB$.
   Ta có I và G là hai điểm chung của (ABC) và $(A'MG)$.
   Vậy $(A'MG) \cap (ABC) = IG$.
   Trong mặt phẳng đáy (ABC) gọi E, F lần lượt là giao điểm của IG với BC và AC.
   Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là $A'FEM$.

2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng $(A'MG)$ với $(A'B'C')$.
   Trong mặt phẳng $(BCC'B')$, gọi $H = EM \cap B'C'$.
   Suy ra A' và H là hai điểm chung của $(A'MG)$ và $(A'B'C')$.
   Kết luận: $(A'MG) \cap (A'B'C') = A'H$.

□

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) song song với $(AB'D')$ và đi qua M cắt hình hộp.

Lời giải.



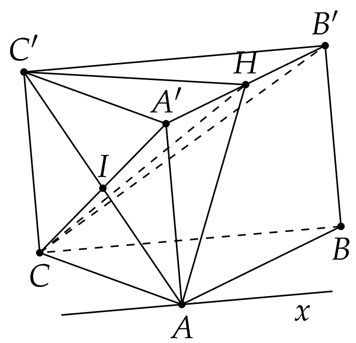
Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(AB'D')$ suy ra (P) song song với mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng $(AB'D')$. Ta thấy M là điểm chung của (P) và $(ABCD)$ và ta có $(P) \parallel BD \parallel B'D'$, suy ra giao tuyến qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AD tại E.
Ta thấy E là điểm chung của (P) và $(ADD'A')$ và ta có $(P) \parallel AD'$ suy ra giao tuyến qua E và song song với AD'. Giao tuyến này cắt DD' tại F.
Ta thấy M là điểm chung của (P) và $(ABB'A')$ và ta có $(P) \parallel AB'$ suy ra giao tuyến qua M và song song với AB'. Giao tuyến này cắt BB' tại H.
Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $K = MH \cap A'B'$. (1)
Trong mặt phẳng $(ADD'A')$, gọi $I = EF \cap A'D'$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $KI = (P) \cap (A'B'C'D')$.
Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$ gọi $\begin{cases} P = KI \cap B'C' \\ N = KI \cap C'D'. \end{cases}$

Thiết diện cần tìm là lục giác $MEFNPH$. □

Bài 6. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC).
2. Chứng minh rằng $CB' \parallel (AHC')$.

Lời giải.



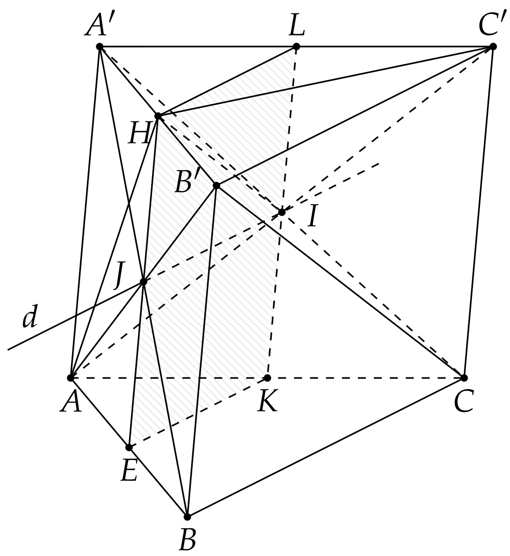
1. Ta có A là điểm chung của $AB'C'$ và (ABC).
   Mà $\begin{cases} B'C' \parallel BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (AB'C') \cap (ABC) = Ax, (Ax \parallel B'C' \parallel BC)$.
2. Ta có tứ giác $AA'C'C$ là hình bình hành.
   Suy ra $A'C$ cắt AC' tại trung điểm I của mỗi đường.
   Do đó $IH \parallel CB'$ (IH là đường trung bình của $\triangle CB'A'$).
   Mặt khác, ta thấy $IH \in (AHC')$ nên ta được $CB' \parallel (AHC')$.

□

Bài 7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của cạnh $A'B'$.

1. Chứng minh rằng đường thẳng CB' song song với mặt phẳng (AHC').
2. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Chứng minh rằng d song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$.
3. Xác định thiết diện của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng (H, d).

Lời giải.



1. Gọi I là tâm của hình bình hành $AA'C'C$.
   Ta có HI là đường trung bình của $\triangle A'B'C$ nên $CB' \parallel HI$.
   Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC').
   Vậy $CB' \parallel (AHC')$.

2. Gọi J là tâm của hình bình hành $AA'B'B$.
   Ta thấy I, J là hai điểm chung của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$.
   Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ.
   Ta có IJ là đường trung bình của $\triangle A'BC$, suy ra $d \parallel BC$, mà $BC \subset (BCC'B') \Rightarrow d \parallel (BB'C'C)$.

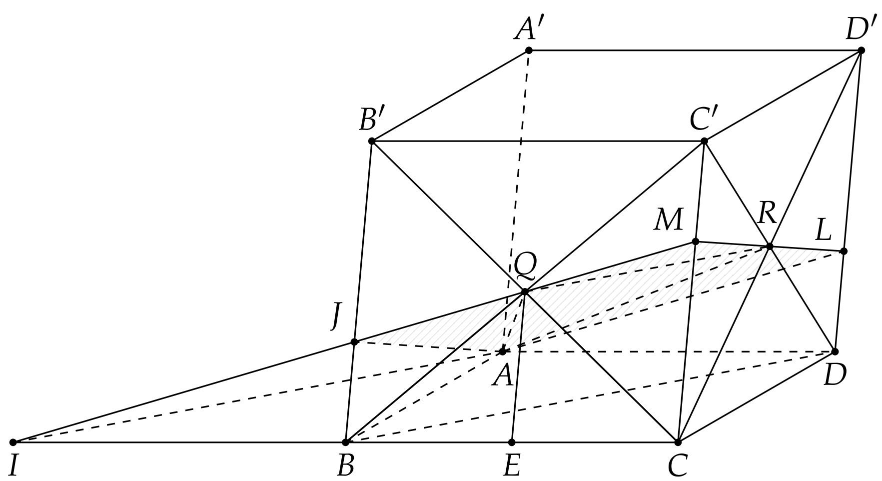
3. Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ gọi $E = AB \cap HJ$.
   Ta có E là điểm chung của hai mặt phẳng (H, d) và (ABC), nên giao tuyến của chúng qua E và song song với $BC \parallel d$, giao tuyến này cắt AC tại K.
   KI là giao tuyến của (H, d) và $(ACC'A')$, KI cắt $A'C'$ tại L.
   Dễ dàng chứng minh E, K, L lần lượt là trung điểm của $AB, AC, A'C'$.
   Kết luận: thiết diện cần tìm là hình bình hành $HEKL$.

□

Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi Q, R lần lượt là tâm các mặt $(BCC'B'), (CDD'C')$.

1. Chứng minh $RQ \parallel (ABCD)$.
2. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).
3. Gọi M là giao điểm của CC' với (AQR). Tính tỉ số $\dfrac{MC'}{MC}$.

Lời giải.



1. Chứng minh $RQ \parallel (ABCD)$.

Vì QR là đường trung bình của tam giác $C'BD$ nên $QR \parallel BD$.
Do $BD \subset (ABCD)$ nên $RQ \parallel (ABCD)$.

2. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).
A là điểm chung của mặt phẳng (AQR) và mặt đáy $(ABCD)$.
Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD thì $d = (AQR) \cap (ABCD)$.
Giao tuyến d cắt đường thẳng BC tại điểm I.
I và Q là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AQR) và $(BCC'B')$ nên $(AQR) \cap (BCC'B') = IQ$, giao tuyến IQ cắt BB' tại J và cắt CC' tại M.
MR là giao tuyến của hai mặt phẳng (AQR) và $(CDD'C')$.
Gọi L là giao điểm của MR và DD'.
Ta có $\begin{cases} (AQR) \cap (ADD'A') = AL \\ (AQR) \cap (BCC'B') = JM \\ (ADD'A') \parallel (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow AL \parallel JM.$
Ta có $\begin{cases} (AQR) \cap (ABB'A') = AJ \\ (AQR) \cap (CDD'C') = LM \\ (ADD'A') \parallel (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow AJ \parallel LM.$
Kết luận: thiết diện cần tìm là hình bình hành $AJML$.

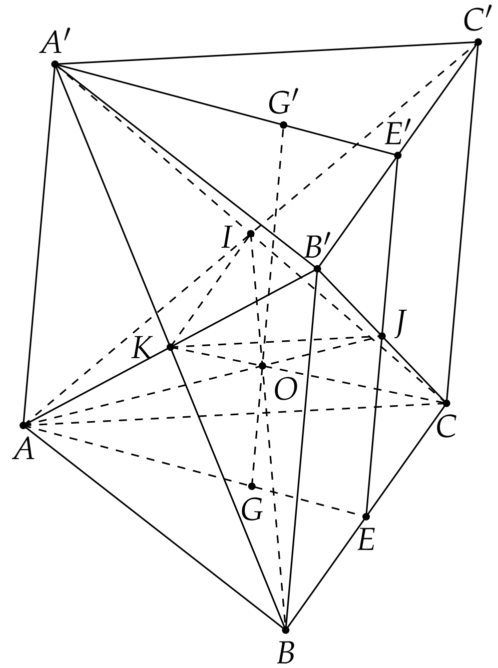
3. Trong mặt phẳng đáy $(ABCD)$ có $AI \parallel BD$ và $AD \parallel IB$ nên tứ giác $ADBI$ là hình bình hành.
BI là đường trung bình của tam giác ICM, ta có $BJ = \dfrac{1}{2}CM$. (1)
Dựng $QE \parallel BJ, (E \in BC)$, trong tam giác IQE, ta có $\dfrac{IB}{IE} = \dfrac{JB}{QE} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow JB = \dfrac{2}{3}QE$. (2)
QE là đường trung bình của tam giác $BCC' \Rightarrow QE = \dfrac{1}{2}CC'$. (3)
Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{1}{2}CM = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2}CC' \Rightarrow \dfrac{MC'}{MC} = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 9. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm của hình bình hành $ACC'A', BCC'B', ABB'A'$.

1. Chứng minh $IJ \parallel (ABB'A')$, $JK \parallel (ACC'A')$, $IK \parallel (BCC'B')$, mặt phẳng (IJK) song song với mặt đáy của lăng trụ.
2. Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O.
3. Gọi G, G' là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng G, O, G' thẳng hành.

Lời giải.



1. Ta thấy KI là đường trung bình của $\triangle A'BC \Rightarrow KI \parallel BC$.
   Suy ra $KI \parallel (BCC'B')$.
   Ta thấy IJ là đường trung bình của $\triangle C'AB$, suy ra $IJ \parallel AB$.
   Suy ra $IJ \parallel (ABB'A')$.
   Ta thấy KJ là đường trung bình của $\triangle B'AC$, suy ra $KJ \parallel AC$.
   Suy ra $KJ \parallel (ACC'A')$.
   Suy ra $(IJK) \parallel (ABC)$.
   Vì $(ABC) \parallel (A'B'C')$ nên $(IJK) \parallel (A'B'C')$.

2. Chứng minh ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O.
   Trong mặt phẳng $(C'AB)$ có AJ và BI là hai đường trung tuyến. Gọi $O = AJ \cap BI$.
   Suy ra O là trọng tâm $\triangle C'AB$, ta có $BO = \dfrac{2}{3}BI$. (1)
   Trong mặt phẳng $(A'BC)$ có BI và CK là hai đường trung tuyến. Gọi $O' = BI \cap CK$.
   Suy ra O' là trọng tâm của $\triangle A'BC$, ta có $BO' = \dfrac{2}{3}BI$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra O và O' trùng nhau.
   Kết luận: ba đường thẳng AJ, BI, CK đồng qui tại điểm O.

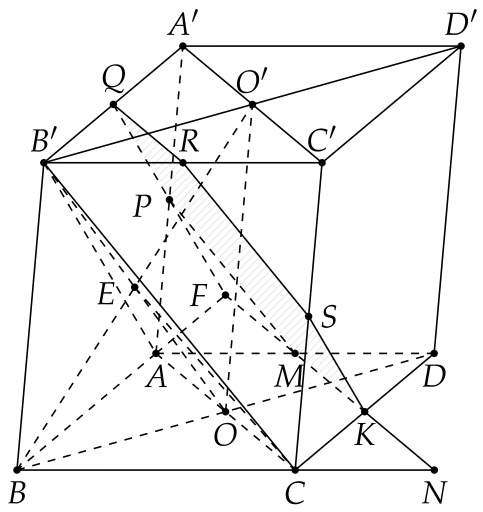
3. Chứng minh G, O, G' thẳng hàng.
   Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.
   Suy ra EE' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên $BB' \parallel EE'$.
   Mà $BB' \parallel AA' \Rightarrow AA' \parallel EE' \Rightarrow AEE'A'$ là hình bình hành.
   Vì G, G' lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$, ta có $\dfrac{A'G'}{A'E'} = \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GG' \parallel EE'$. (3)
   Trong $\triangle AEI$ ta có $\dfrac{AO}{AJ} = \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GO \parallel EJ$. (4)
   Ta có E, J, E' thẳng hàng.
   Từ (3) và (4) suy ra ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

□

Bài 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là tâm hình bình hành $A'B'C'D'$, K là trung điểm của CD, E là trung điểm của BO'. Chứng minh E thuộc (ACB'). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua K và song song với (EAC).

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta có $BOO'B'$ là hình bình hành, nên hai đường chéo BO' và $B'O$ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
Suy ra E là trung điểm của $B'O$. Mà $B'O \subset (ACB') \Rightarrow E \in (ACB')$.
Ta có (ACB') cũng là (ACE).
Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ACB') nên mặt phẳng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (ACB').
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, ta có K là điểm chung và $AC \parallel (P)$ nên giao tuyến của chúng qua K và song song với AC. Giao tuyến này cắt AB, AD, BC lần lượt tại F, M, N.
F là điểm chung của hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (P), có $AB' \parallel (P)$.
Nên giao tuyến của chúng qua F và song song với AB', giao tuyến này cắt $AA', A'B'$ lần lượt tại P và Q.
Giao tuyến của (P) và $(A'B'C'D')$ qua Q và song song với $A'C'$, giao tuyến này cắt $B'C'$ tại R.



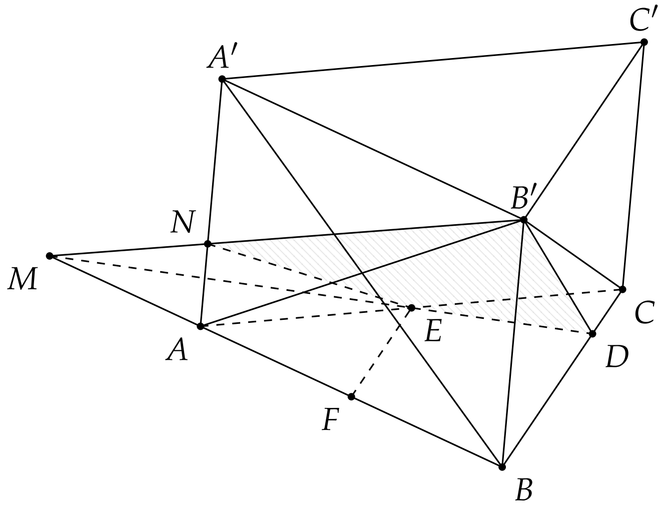
Giao tuyến của (P) và $(BCC'B')$ qua R và song song với $B'C$, giao tuyến này cắt CC' tại S.
Kết luận: thiết diện cần tìm là lục giác $KMPQRS$. Lục giác có tính chất các cặp cạnh đối song song. □

Bài 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên cạnh BA kéo dài về phía A ta lấy điểm M sao cho $AB = 2AM$.

1. Xác định thiết diện của hình lăng trụ tạo với (P) qua M và B' và trung điểm E của AC.
2. Tìm giao điểm D của BC với $(MB'E)$. Tính tỉ số $\dfrac{DB}{DC}$.

Lời giải.

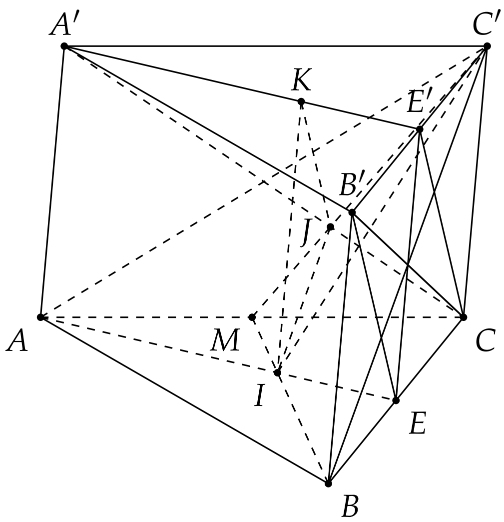
M, E là hai điểm chung của (MEB') và (ABC)
$\Rightarrow (MEB') \cap (ABC) = ME$.
Gọi D là giao điểm của ME và BC.
Suy ra $(MEB') \cap (BCC'B') = DB'$.
M, B' là hai điểm chung của (MEB') và $(ABB'A')$
$\Rightarrow (MEB') \cap (ABB'A') = MB'$.
Gọi N là giao điểm của AA' với MB'.
Suy ra thiết diện của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với mặt phẳng (MEB') là tứ giác $EDB'N$.
Trong mặt phẳng đáy (ABC) kẻ $EF \parallel BC, (F \in AB)$.
EF là đường trung bình của tam giác ABC.
Ta có $EF = \dfrac{1}{2}BC$. (1)
Trong $\triangle MBD$ ta có $\dfrac{MF}{MB} = \dfrac{EF}{BD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3}BD$. (2)



Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{2}{3}BD = \dfrac{1}{2}BC \Leftrightarrow BD = \dfrac{3}{4}BC \Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = 3$. □

Bài 12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Chứng minh $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

Lời giải.
Gọi E, E' lần lượt là trung điểm BC và $B'C'$. Suy ra, EE' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên $BB' \parallel EE'$.
Mà $BB' \parallel AA' \Rightarrow AA' \parallel EE' \Rightarrow AEE'A'$ là hình bình hành.
Trong hình bình hành $AEE'A'$, ta có $\dfrac{A'K}{AI} = \dfrac{A'E'}{AE} \Rightarrow IK \parallel EE'$. (1)
Gọi M là trung điểm của AC.
Trong $\triangle MBC'$ ta có $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{MJ}{MC'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IJ \parallel BC'$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(IJK) \parallel (BCC'B')$.
Mặt phẳng $(A'CE')$ cũng là mặt phẳng $(A'JK)$.
Mặt phẳng (AEB') cũng là mặt phẳng (AIB').
Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ có $EB' \parallel CE'$. Vì $AEE'A'$ là hình bình hành $A'E' \parallel AE$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $(A'JK) \parallel (AIB')$.



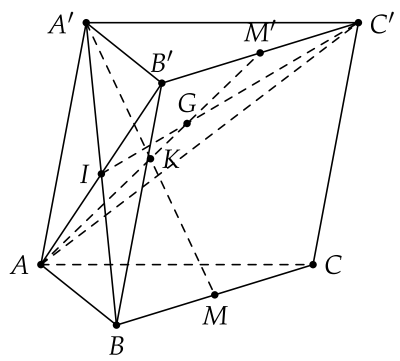
□

Bài 13. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$.

1. Chứng minh AM song song $A'M'$.

2. Tìm giao điểm của đường thẳng $A'M$ và $(AB'C')$.
3. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
4. Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

Lời giải.



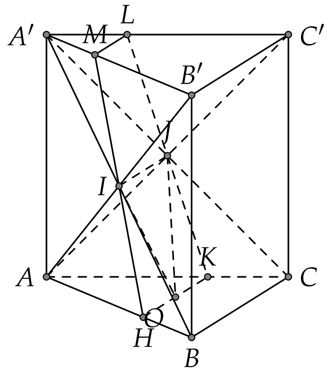
1. Vì MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên $\vec{MM'} = \vec{BB'}$. Mà $\vec{BB'} = \vec{AA'}$. Từ đó suy ra $\vec{MM'} = \vec{AA'}$. Vậy $AMM'A'$ là hình bình hành. Do đó $AM \parallel A'M'$.
2. Tìm giao điểm của đường thẳng $A'M$ và mặt phẳng $(AB'C')$.
   Trong mặt phẳng $(AMM'A')$, gọi $K = A'M \cap AM'$.
   Có $\begin{cases} K \in A'M \\ K \in AM'; AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow K = A'M \cap (AB'C')$.
3. Tìm giao tuyến d của mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi $I \in BA' \cap AB'$.
   Có $\begin{cases} I \in BA', BA' \subset (BA'C') \\ I \in AB', AB' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow I \in (BA'C') \cap (AB'C')$.
   Ta lại có $C' \in (BA'C') \cap (AB'C')$.
   Vậy giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$ là IC'.
4. Trong mặt phẳng $(AB'C')$ gọi $G = C'I \cap AM'$.
   Có $\begin{cases} G \in C'I \\ G \in AM', AM' \subset (AMM') \end{cases} \Rightarrow G = C'I \cap (AMM')$.
   Do đó G là giao điểm của hai đường trung tuyến $C'I$ và AM' của tam giác $AB'C'$. Vậy G là trong tâm tam giác $AB'C'$.

□

Bài 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ là hình vuông có tâm lần lượt là I và J. Gọi O là tâm đường ngoại tiếp tròn tam giác ABC.

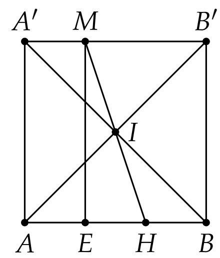
1. Chứng minh IJ song song với mặt phẳng ABC.
2. Xác định thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (OIJ). Tính diện tích thiết diện theo a.

Lời giải.

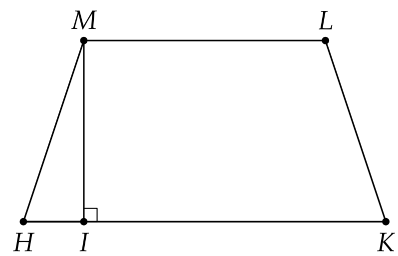


1. Chứng minh IJ song song với mặt phẳng ABC.
   Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $A'BC$ nên $IJ \parallel BC$. Mà $BC \subset (ABC)$. Suy ra $IJ \parallel (ABC)$.
2. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (OIJ).
   Ta có O là điểm chung của hai mặt phẳng (OIJ) và (ABC), nên giao tuyến của chúng đi qua O và song song với BC, giao tuyến này cắt AB, AC lần lượt tại H, K.
   HI là giao tuyến của (OIJ) với $(ABB'A')$, gọi $M = HI \cap A'B'$.
   KJ là giao tuyến của (IJO) với $(ACC'A')$, gọi $L = KJ \cap A'C'$.
   Từ đó suy ra ML là giao tuyến của (OIJ) với $(A'B'C')$, vì $IJ \parallel B'C'$.
   Suy ra $ML \parallel B'C' \parallel IJ$.

Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $HKLM$ (vì $HK \parallel LM \parallel BC$) (1)
Ta có $ABB'A'$, $ACC'A'$ là hình vuông và $AH = AK$, $A'M = A'L$. Suy ra $MH = LK$. (2).



Từ (1) và (2) suy ra $HKLM$ là hình thang cân.
Trong tam giác $\triangle ABC$ có $HK \parallel BC$ nên $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{HK}{BC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{2a}{3}$.
Ta có IJ là đường trung bình của $HKLM$,
có $IJ = \dfrac{HK + LM}{2} \Rightarrow LM = 2IJ - HK = BC - Hk = \dfrac{a}{3}$.
Vẽ lại mặt bên $ABB'A'$ như hình vẽ.
Ta có $MH = \sqrt{ME^2 + EH^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$



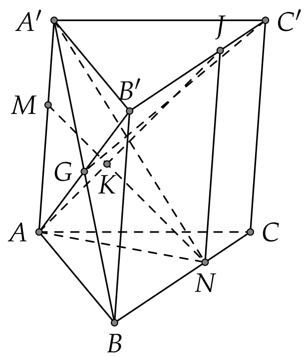
Ta có $2HI = HK - ML = \dfrac{2a}{3} - \dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow HI = \dfrac{a}{6}$.
Và $MI = \sqrt{MH^2 - HI^2} = \sqrt{\dfrac{10a^2}{9} - \dfrac{a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.
Diện tích hình thang cân $HKLM$ có $S_{HKLM} = \dfrac{1}{2}(HK + LM) \cdot MI = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{12}$.

□

Bài 15. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

1. Tìm giao điểm của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
2. Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kì trên AA' và BC. Tìm giao điểm $B'C'$ với $(AA'N)$ và giao điểm của MN với $(AB'C')$.

Lời giải.



1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Ta có C' là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ gọi G là giao điểm của AB' và BA'. Suy ra điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Vậy $(AB'C') \cap (BA'C') = GC'$.
2. Tìm giao điểm $B'C'$ với $(AA'N)$ và giao điểm của MN với $(AB'C')$.
   Chọn mặt phẳng $(BCC'B')$ chứa $B'C'$.
   Ta có $\begin{cases} N \in (AA'N) \cap (BCC'B') \\ AA' \parallel BB' \\ AA' \subset (AA'N); BB' \subset (BCC'B'). \end{cases}$
   Do đó $(AA'N) \cap (BCC'B') = Nx$, $\left(Nx \parallel AA' \parallel BB'\right)$.

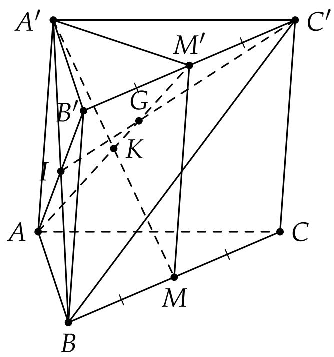
   Gọi $J = Nx \cap B'C' \Rightarrow J = B'C' \cap (AA'N)$.
   Chọn mặt phẳng $(ANJA')$ chứa MN. Ta tìm giao tuyến của mặt phẳng $(ANJA')$ và $(AB'C')$.
   Ta có $A \in (ANJA') \cap (AB'C')$. (1)
   Và $\begin{cases} J \in (ANJA') \\ J \in B'C' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow J \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $AJ = (ANJA') \cap (AB'C')$.
   Trong mặt phẳng $(ANJA')$ gọi $K = MN \cap AJ \Rightarrow K = MN \cap (AB'C')$.

$\square$

Bài 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$.

1. Chứng minh AM song song với $A'M'$.
2. Tìm giao điểm của đường thẳng $A'M$ với mặt phẳng $(AB'C')$.
3. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
4. Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AMM'). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

Lời giải.



1. Vì MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên $\vec{MM'} = \vec{BB'}$, mà $\vec{BB'} = \vec{AA'}$. Từ đó suy ra $\vec{MM'} = \vec{AA'}$.
   Vậy $AMM'A'$ là hình bình hành, suy ra $AM \parallel A'M'$.
2. Trong mặt phẳng $(AMM'A')$, gọi $K = A'M \cap AM'$.
   Ta có $\begin{cases} K \in A'M \\ K \in AM', AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow K = A'M \cap (AB'C')$.
3. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
   Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ gọi $I = BA' \cap AB'$.
   Có $\begin{cases} I \in BA', BA' \subset (BA'C') \\ I \in AB', AB' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow I \in (BA'C') \cap (AB'C')$.
   Mặt khác $C' \in (BA'C') \cap (AB'C')$.
   Vậy giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$ là IC'.
4. Trong mặt phẳng $(AB'C')$ gọi $G = C'I \cap AM'$. Có $\begin{cases} G \in C'I \\ G \in AM', AM' \subset (AMM') \end{cases} \Rightarrow G = C'I \cap (AMM')$.
   Vì G là giao điểm của hai đường trung tuyến $C'I$ và $A'M$ của tam giác $AB'C'$.
   Vậy G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

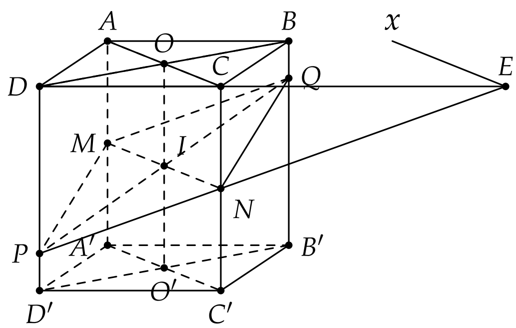
□

Bài 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và CC'. Một điểm P nằm trên cạnh DD'.

1. Xác định giao điểm Q của đường thẳng BB' với (MNP).
2. Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện. Thiết diện đó có tính chất gì?
3. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(ABCD)$ của hình hộp.

Lời giải.

1. Xác định giao điểm Q của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP).
   Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$. Suy ra $OO' = (BDD'B') \cap (ACC'A')$.
   Gọi $I = MN \cap OO'$ $\left(MN, OO' \subset (ACC'A')\right)$.
   Ta có $\begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNP) \\ I \in OO', OO' \subset (BDD'B') \end{cases}$
   $\Rightarrow I \in (MNP) \cap (BDD'B')$ (1)
   Ta có $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in DD', DD' \in (BDD'B') \end{cases}$
   $\Rightarrow P \in (MNP) \cap (BDD'B')$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (BDD'B') = PI$.
   Gọi $Q = PI \cap BB' \Rightarrow Q = BB' \cap (MNP)$.



2. Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.
   Ta có NP và MQ là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với hai mặt phẳng song song với nhau là $(ABB'A')$ và $(CDD'C)$. Nên suy ra $NP \parallel MQ$ (3)

Lí luận tương tự ta có $MP \parallel QN$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

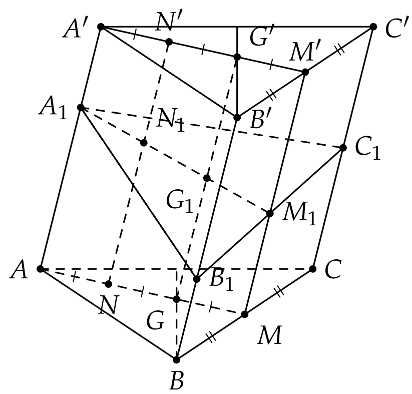
3. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng $(ABCD)$.
Trong mặt phẳng bên $(CDD'C')$ gọi $E = CD \cap NP$. Vì MN là đường trung bình của hình bình hành $ACC'A'$, suy ra $MN \parallel AC$. Từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng $(ABCD)$ qua E và song song với $MN \parallel AC$.

□

Bài 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, G_1. Chứng minh

1. GG' song song và bằng cạnh bên của lăng trụ.
2. G_1 là trong tâm tam giác $\triangle A_1B_1C_1$.
3. $G'G_1 = \frac{1}{3}\left(A_1A' + B_1B' + C_1C'\right)$; $G_1G = \frac{1}{3}\left(A_1A + B_1B + C_1C\right)$.

Lời giải.



1. GG' song song và bằng các cạnh bên của lăng trụ.
Gọi M và M' theo thứ tự là trung điểm của BC và $B'C'$. Nên MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$.
Suy ra $MM' \parallel BB' \parallel CC'$ và $MM' = BB' = CC'$. (1)
Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA' \parallel BB'$ và $AA' = BB'$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AMM'A'$ là hình bình hành và ta có $\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{2}{3}$ (Tính chất trọng tâm).
Nên $GG' \parallel AA'$ và $GG' = AA'$.

2. Gọi $M_1 = MM' \cap B_1C_1$ $\left(MM', B_1C_1 \subset (BC'B')\right)$.
Tính chất hình bình hành thì M_1 là trung điểm của B_1C_1. (3)
Ta có $A_1M_1 = (A_1B_1C_1) \cap (AA'M'M)$.
Suy ra G_1 chính là giao điểm của A_1M_1 với GG'.
Vì $MM_1 \parallel GG_1 \parallel AA_1$ suy ra $\frac{AG}{AM} = \frac{A_1G_1}{A_1M} = \frac{2}{3}$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra G_1 là trọng tâm của tam giác $\triangle A_1B_1C_1$.

3. Gọi N, N' lần lượt là trung điểm của AG và $A'G'$. Dễ dàng chứng minh được $NN' \parallel GG' \parallel AA'$. Gọi N_1 là giao điểm của NN' và A_1G_1, suy ra N_1 là trung điểm của A_1G_1.
Ta có G_1G' là đường trung bình của hình thang $M_1M'N'N_1$;
N_1N' là đường trung bình của hình thang $A_1A'G'G_1$
M_1M' là đường trung bình của hình thang $B_1B'C'C_1$. Nên: $G_1G' = \frac{1}{2}(M_1M' + N_1N')$ (1)
$$N_1N' = \frac{1}{2}(A_1A' + G_1G') \quad (2)$$
$$M_1M' = \frac{1}{2}(B_1B' + C_1C') \quad (3)$$
Từ (1) và (2): $G_1G' = \frac{1}{3}A_1A' + \frac{2}{3}M_1M'$ (4)

Thay (3) và (4) ta được: $G_1G' = \dfrac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$.

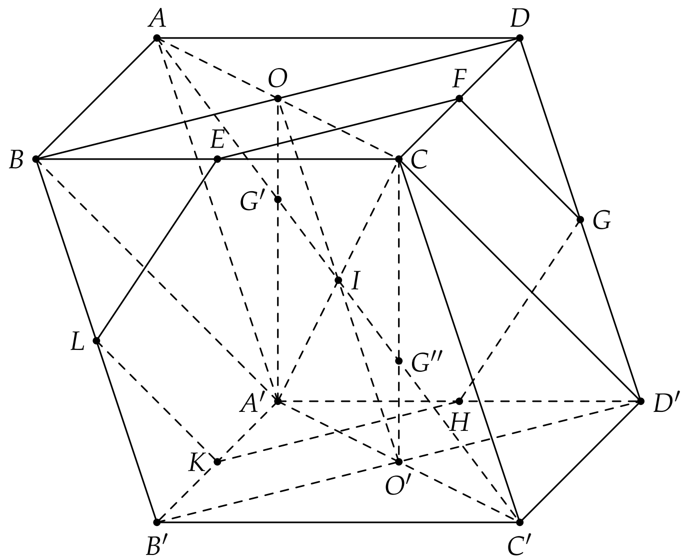
Chứng minh tương tự: $G_1G = \dfrac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

□

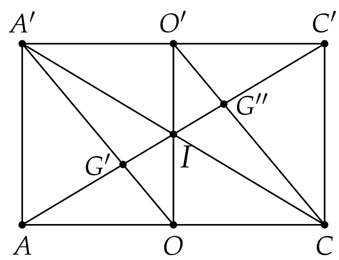
Bài 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.
2. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G' và G'' lần lượt của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.
3. Chứng minh G' và G'' chia đoạn thẳng AC' thành ba phần bằng nhau.
4. Gọi E, F, G, H, K, L lần lượt là trung điểm của BC, CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$. Chứng minh sáu điểm ở trên đồng phẳng.

Lời giải.



1. $CDA'B'$ là hình bình hành nên $DA' \parallel CB'$ (1)
   $BDD'B'$ là hình bình hành nên $BD \parallel B'D'$ (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD) \parallel (B'D'C)$.
2. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
   Trong mp$(ACC'A')$, AC' cắt $A'O$ và CO' tại G' và G'' (theo thứ tự).
   O là trung điểm của BD nên $A'O$ là trung tuyến của tam giác BDA' và $G' \in A'O$ (1)
   $A'C' \parallel OA$ nên:
   $$\frac{G'O}{G'A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow G'A' = 2G'O \quad (2)$$
   Từ (1) và (2) suy ra: G' là trọng tâm của tam giác $A'BD$.
   Tương tự, G'' là trọng tâm của tam giác $B'D'C$.



3. Tam giác ACG'', OG' là đường trung bình nên G' là trung điểm của AG'' $\Rightarrow AG' = G'G''$. (3)
   Tương tự, ta có $C'G'' = G''G'$. (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $AG' = G'G'' = G''C'$.
   Vậy G' và G'' chia AC' thành ba phần bằng nhau (điều phải chứng minh).
4. Vì có $FG \parallel CD'$, $HK \parallel B'D'$, $LE \parallel B'C$, ba đường thẳng FG, HK, LE cùng song song với mp$(CB'D')$.

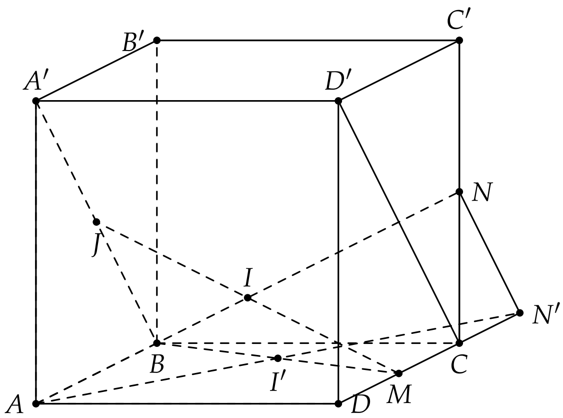
Tương tự ba đường thẳng EF, GH, KL cùng song song với mp$(A'BD)$.
Mà $(A'BD) \parallel (CB'D')$ suy ra sáu điểm E, F, G, H, K, L đồng phẳng.

□

Bài 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

1. Xác định đường thẳng Δ qua M cắt AN và cắt $A'B$.
2. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$. Hãy tìm tỉ số $\dfrac{IM}{IJ}$.

Lời giải.



1. Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cần tìm cắt cả AN và $A'B$.
   Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và $A'B$.
   Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu $A'B$.
   Khi đó ba điểm J, I, M lần lượt là hình chiếu của B, I', M.
   Do đó ba điểm B, I', M thẳng hàng.
   Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN.
   Vì I thuộc AN nên I' thuộc AN'. Vậy I' là giao điểm của BM và AN'.
   Từ phân tích trên ta có thể dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây:
   - Lấy giao điểm I' của AN' và BM.
   - Trong mp(ANN') dựng $II' \parallel NN'$ (đã có $NN' \parallel CD'$) cắt AN tại I.
   - Vẽ đường thẳng MI, đó là đường thẳng Δ cần tìm.
2. Dễ chứng minh được, đường thẳng Δ nói trên cắt $A'B$.
   Dễ thấy $MC = CN'$ suy ra $MN' = CD = AB$.
   Do đó I là trung điểm của BM.
   Mặt khác $II' \parallel JB$, nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ.
   Suy ra $IM = IJ \Rightarrow \dfrac{IM}{IJ} = 1$.

□

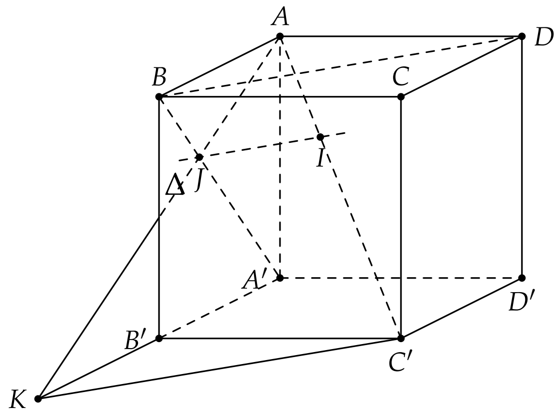
Bài 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Hãy xác định đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng AC' và BA' đồng thời song song với $B'D'$.
2. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AC' và BA'. Tính tỉ số $\dfrac{AI}{AC'}$.

Lời giải.

1. Giả sửa đã xác định được đường thẳng Δ cắt AC' và BA' lần lượt tại I và J.
   Xét phép chiếu song song lên mp$(ABB'A')$ theo phương chiếu $D'B'$.
   Khi đó, hình chiếu của ba điểm A, I, C' lần lượt là ba điểm thẳng hàng A, J, K. Mặt khác J thuộc BA', nên J chính là giao điểm của AK và BA'.
   Từ đó, ta có cách dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây:

   - Dựng điểm K là hình chiếu của C' (theo phương chiếu $D'B'$).
   - Lấy giao điểm J của AK và BA'.
   - Qua J dựng đường thẳng $\Delta \parallel C'K$ (đã có $C'K \parallel B'D'$), ta được đường thẳng Δ cần tìm.



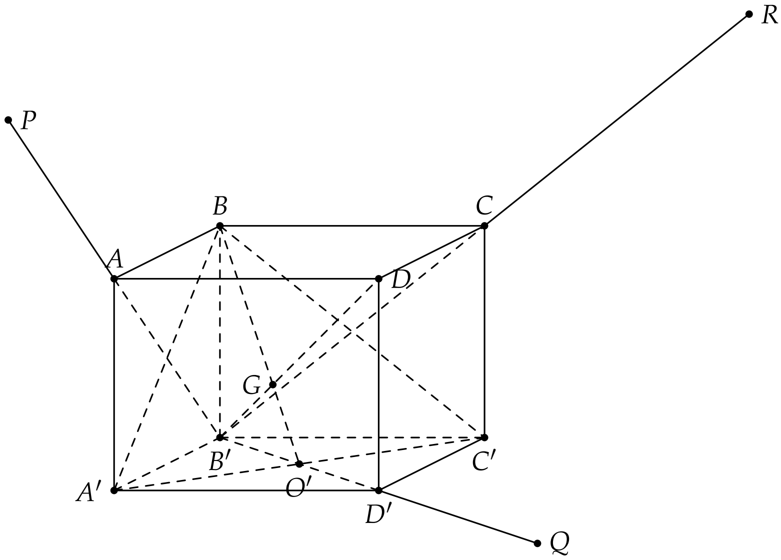
2. Dễ thấy $A'B' = B'K \Rightarrow A'K = 2AB$ (do $A'B' = AB$).
   Vì $AB \parallel A'K \Rightarrow \dfrac{AI}{JK} = \dfrac{AB}{A'K} = \dfrac{1}{2}$.
   Mặt khác $IJ \parallel C'K \Rightarrow \dfrac{AI}{IC'} = \dfrac{AJ}{JK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AI}{AC'} = \dfrac{1}{3}$.

□

Bài 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

1. Chứng minh rằng đường chéo $B'D$ cắt mp$(A'BC')$ tại điểm G sao cho $BG = \dfrac{1}{2}GD$ và G là trọng tâm tam giác $A'BC'$.
2. Chứng minh rằng $(D'AC) \parallel (BA'C')$ và trọng tậm G' của $\triangle D'AC$ cũng nằm trên $B'D$ và $B'G' = \dfrac{2}{3}B'D$.
3. Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm đối xứng của điểm B' qua A, D', C. Chứng minh rằng $(PQR) \parallel (BA'C')$.
4. Chứng minh rằng D là trọng tâm tứ diện $B'PQR$.

Lời giải.



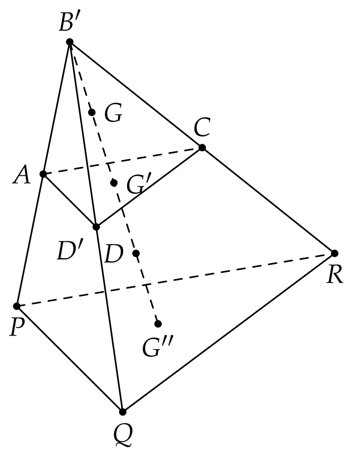
1. Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khi đó

   $$(A'BC') \cap (BDD'B') = BO'.$$

   Gọi G là giao điểm của $B'D$ và BO' thì G chính là giao điểm của $B'D$ với mp$(A'BC')$.
   Dễ thấy $\triangle GBO \backsim \triangle GO'B'$, tỉ số đồng dạng là 2 $\left(\text{do } \dfrac{BD}{B'O'} = 2\right)$.
   Vậy $B'G = \dfrac{1}{2}GD$ và $GO' = \dfrac{1}{2}GB$, suy ra G là trọng tâm tam giác $A'BC'$.
2. Dễ thấy $AC \parallel A'C'$, $D'A \parallel C'B$

   $$\Rightarrow (D'AC) \parallel (BA'C').$$

   Chứng minh tương tự như câu trên, ta có trọng tâm G' của tam giác $D'AC$ nằm trên đường chéo DB' và $DG' = \dfrac{1}{2}G'B'$.
   Từ đó và kết quả của câu trên suy ra G và G' chia đường chéo $B'D$ thành ba phân bằng nhau.
   Vậy $B'G' = \dfrac{2}{3}B'D$.



3. Do A, D', C lần lượt là trung điểm của PB', QB', RB' nên

   $$PQ \parallel AD', QR \parallel D'C, RP \parallel CA.$$

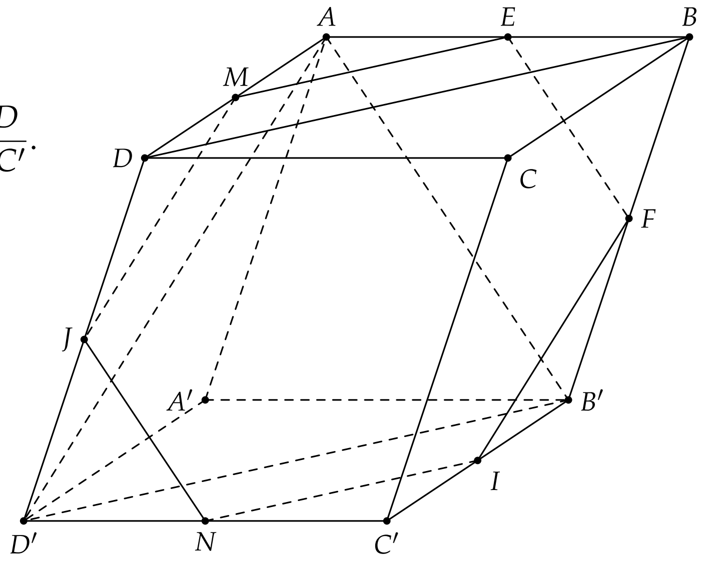
   Từ đó suy ra $(PQR) \parallel (AD'C)$.
   Mặt khác, theo câu trên, ta có $(D'AC) \parallel (BA'C')$ nên $(PQR) \parallel (BA'C')$.
4. Vì A, D', C lần lượt là trung điểm của $B'P$, $B'Q$, $B'R$ nên trọng tâm G'' của tam giác PQR phải nằm trên đường thẳng $B'G''$ và $B'G'' = \dfrac{4}{3}B'D \Rightarrow B'D = \dfrac{3}{4}B'G''$.
   Vậy D là trọng tâm tứ diện $B'PQR$.

□

Bài 23. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM : MD = D'N : NC'$.

1. Chứng minh rằng MN song song với $(C'BD)$.
2. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp (P) qua MN song song với mp$(C'BD)$.

Lời giải.



1. Theo giả thiết, ta có:

$$\frac{MN}{MD} = \frac{D'N}{NC'} \Rightarrow \frac{AM}{D'N} = \frac{MD}{NC'} = \frac{AD}{D'C'}.$$

Theo định lý Ta-lét đảo, ta có MN, AD', DC' cùng song song với một mặt phẳng (P).
Mặt phẳng (P) song song với AD' và DC'. Nhưng $AD' \parallel BC'$ nên mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(C'BD)$.
Từ đó, ta có $MN \parallel (C'BD)$.

2. Từ M kẻ $ME \parallel BD$, cắt AB tại E.
Từ E kẻ đường thẳng $EF \parallel AB'$, cắt BB' tại F; từ F kẻ đường thẳng $FI \parallel BC'$, cắt $B'C'$ tại I.
Từ N kẻ đường thẳng $NJ \parallel CD$, cắt DD' tại J.
Dễ thấy thiết diện là lục giác $MEFINJ$ có các cạnh đối lần lượt song song với ba cạnh của tam giác $C'BD$.

□

Bài 5. BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG II

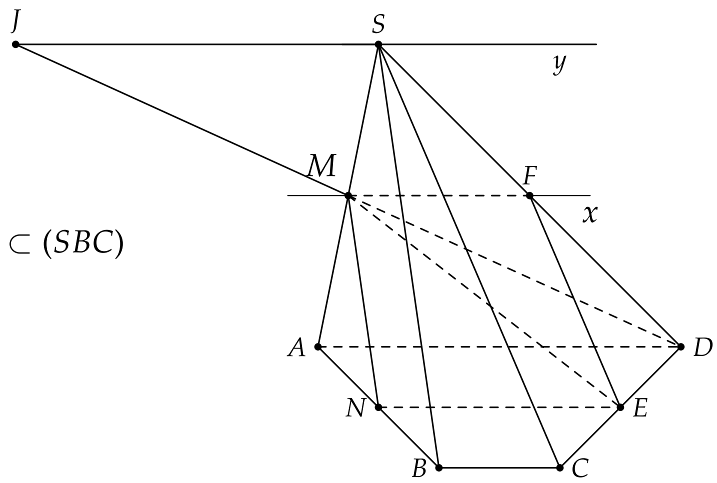
Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, AB, CD.

1. Chứng minh $EN \parallel (SBC)$, $(MNE) \parallel (SBC)$.
2. Tìm giao điểm F của SD với mp(MNE). Chứng minh $SC \parallel (MNE)$. Đường thẳng DM song song với (SBC) hay không? Giải thích.
3. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mp(MNE). Thiết diện đó là hình gì? Tại sao?

Lời giải.

1.

- Vì $EN \parallel BC$, mà $BC \subset (SBC)$ $\Rightarrow EN \parallel (SBC)$.
- Có $\begin{cases} MN \parallel SB, NE \parallel BC \\ MN, NE \subset (MNE); SB, BC \subset (SBC) \end{cases}$ $\Rightarrow (MNE) \parallel (SBC)$.



2. - Ta có M là điểm chung của hai mặt phẳng (MNE) và (SAD), và có $NE \parallel AD$. Suy ra giao tuyến của chúng qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt SD tại F. F chính là giao điểm SD với mp(MNE).
   - Theo chứng minh trên, ta có $(MNE) \parallel (SBC)$, mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \parallel (MNE)$.
   - Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD); BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy \; (Sy \parallel AD \parallel BC)$.
   Trong mp(SAD), gọi $J = DM \cap Sy \Rightarrow J = DM \cap (SBC)$.
   Từ đó suy ra DM không song song với mp(SBC).

3. Từ cách dựng điểm ở câu trên, suy ra thiết diện cần tìm là hình thang $MNEF$ với $NE \parallel MF \parallel AD$.

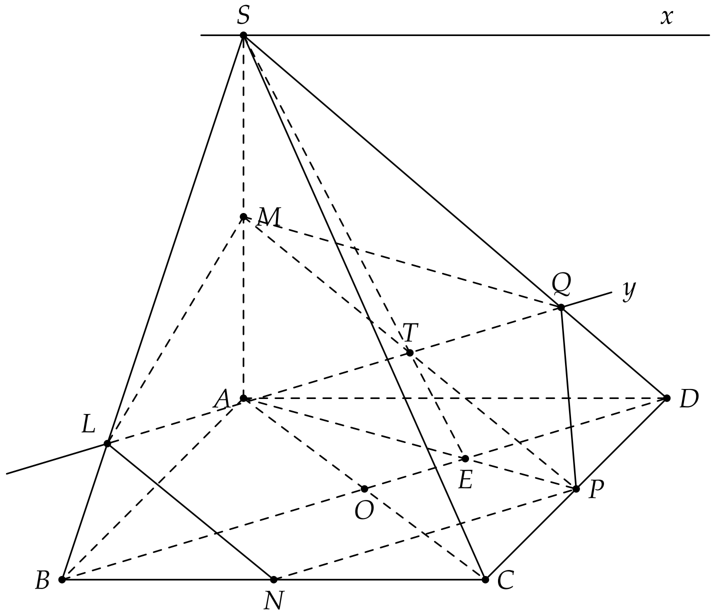
□

Bài 2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD), (SAD) và (SBC).
2. Tìm giao tuyến T của MP với mp(SBD) và tính tỉ số $\dfrac{TM}{TP}$.
3. Tìm giao điểm Q của SD với mp(MNP) và tính tỉ số $\dfrac{QS}{QD}$.
4. Tìm thiết thiện của mp(MNP) với hình chóp $S.BCD$. Thiết diện này là hình gì?

Lời giải.

1. Gọi $O = AC \cap BD$, ta có O và S là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.
   Có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), và có $AD \parallel BC$, nên giao tuyến của chúng là Sx, với $Sx \parallel AD \parallel BC$.



2. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $E = AP \cap BD$.
   Ta có $S, E \in (SBD) \cap (SAP)$ nên $(SBD) \cap (SAP) = SE$.
   Trong (SAP), gọi $T = MP \cap SE$, suy ra $T = MP \cap (SBD)$.
   Kẻ $EG \parallel MP$ $(G \in SA)$ được
   $\dfrac{AE}{AP} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{GE}{MP} = \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{SM}{SG} = \dfrac{ST}{SE} = \dfrac{MT}{GE} = \dfrac{3}{4}$.
   Suy ra $GE = \dfrac{2}{3}MP$, $MT = \dfrac{3}{4}GE$
   nên $\dfrac{TM}{TP} = 2$.

3. Có $T \in (MNP) \cap (SBD)$ nên giao tuyến của (MNP) và (SBD) qua T và song song với BD. Giao tuyến này cắt SB, SD lần lượt tại L và Q. Suy ra L là giao điểm của (MNP) với SB và Q là giao điểm của (MNP) với SD.
   Trong $\triangle SBD$ có $LQ \parallel BD$ nên có $\dfrac{ST}{SE} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{3}{4}$ (do chứng minh trên).
   Vậy $\dfrac{QS}{QD} = 3$

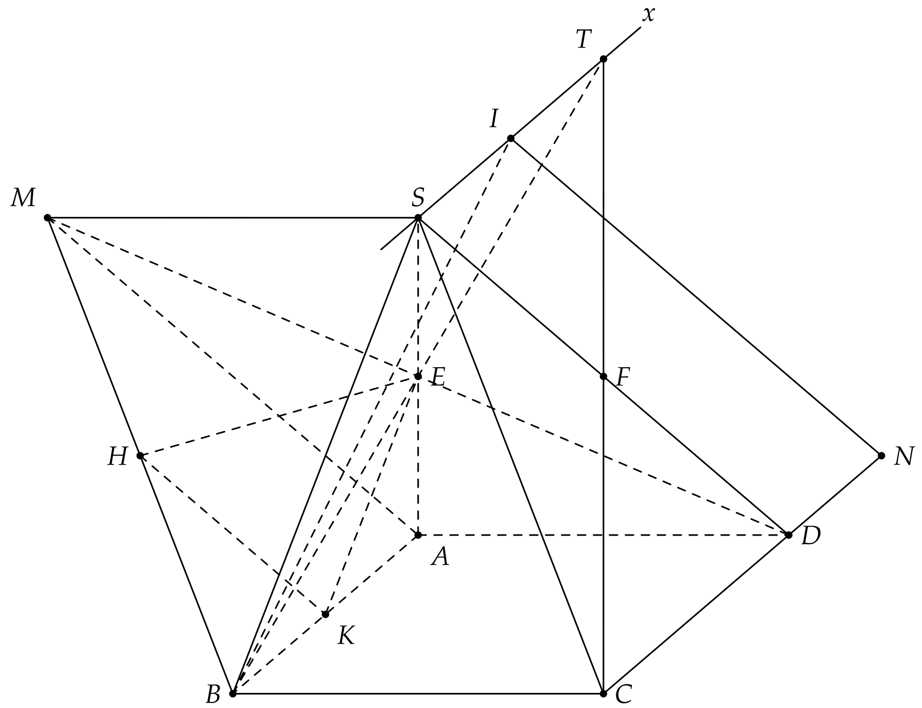
4. Từ cách tìm giao điểm ở trên, suy ra thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (MNP) là ngũ giác $MLNPQ$.

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm SA.

1. Tìm giao tuyến d của (SAB) và (SCD).
2. SD cắt (BCE) tại F. Tứ giác $BCEF$ là hình gì? Chứng minh ba đường thẳng d, BE và CF đồng quy.
3. Gọi M là điểm đối xứng của D qua E, H và K lần lượt là trung điểm của BM và AB. Gọi N là giao điểm của CD với (EHK). Tính tỉ số $\dfrac{CD}{CN}$.

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d$ là đường thẳng qua S song song với AB.

2. Ta có $\begin{cases} EF = (BCE) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (BCE), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel BC \parallel AD$. Suy ra $BCEF$ là hình thang.

   Gọi $T = BE \cap CF$. Vì $\begin{cases} T \in BE \subset (SAB) \\ T \in CF \subset (SCD) \end{cases}$ nên $T \in d$. Vậy d, BE, CF đồng quy tại điểm T.

3. Ta có $ADSM$ là hình bình hành nên $AM \parallel SD$. Mà $KH \parallel AM$ nên $KH \parallel SD$.
   Trong (SAB) gọi $I = d \cap KE \Rightarrow \begin{cases} I \in d \subset (SCD) \\ I \in KE \subset (HKE) \end{cases} \Rightarrow I \in (HKE) \cap (SCD)$.
   Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (HKE) và (SCD) đi qua I và song song với SD, giao tuyến này cắt CD tại N. Vậy N là giao điểm của CD và (HKE).
   Ta có tứ giác $BKIS$ là hình bình hành nên $SI = BK$. Tứ giác $DNIS$ là hình bình hành nên $DN = IS$.
   Suy ra $DN = BK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}CD$. Vậy $\dfrac{CD}{CN} = \dfrac{2}{3}$.

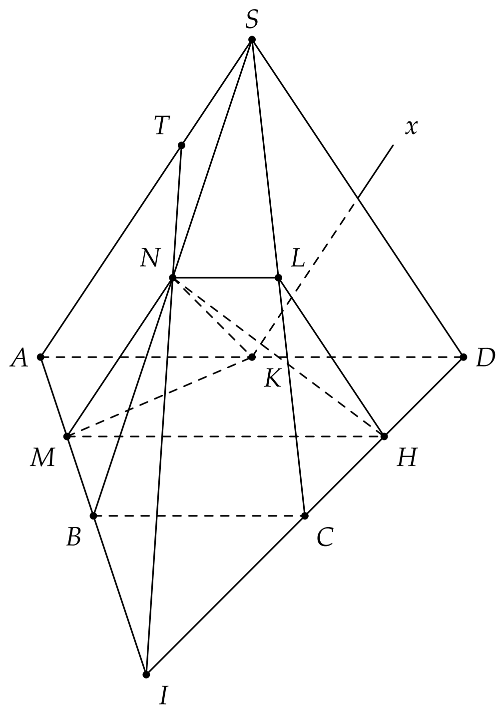
□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang có AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, K, H lần lượt là trung điểm AB, AB, AD, DC.

1. Tìm giao điểm T của SA với (NDC) và giao tuyến của (SAD) với (MNK).

2. Chứng minh $HN \parallel (SAD)$ và tính tỉ số $\dfrac{ST}{SA}$.
3. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với BC, SD. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



1. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $K = AB \cap CD$.
   Ta có $K, N \in (SAB) \cap (NCD)$ nên $(SAB) \cap (NCD) = KN$.
   Trong (SAB) gọi $T = KN \cap SA \Rightarrow T = SA \cap (NCD)$.
   Ta có $\begin{cases} K \in (SAD) \cap (MNK) \\ SA \parallel MN \\ SA \subset (SAD), MN \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (MNK) = Kx \parallel SA.$

2. Vì $\begin{cases} MN \parallel SA, MH \parallel AD \\ MN, MH \subset (MNH) \\ SA, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (MNH) \parallel (SAD) \Rightarrow NH \parallel (SAD).$
   Trong $\triangle KAD$ có $AD \parallel BC$ nên $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KC}{KD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B$ là trung điểm KA.
   MN là đường trung bình của $\triangle BAS$ nên có $MN = \dfrac{1}{2}SA$. (1)
   Trong $\triangle KAT$ có $MN \parallel AT$ nên có $\dfrac{KM}{KA} = \dfrac{MN}{TA} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow MN = \dfrac{3}{4}TA$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{3}{4}TA = \dfrac{1}{2}SA \Leftrightarrow TA = \dfrac{2}{3}SA \Rightarrow \dfrac{ST}{SA} = \dfrac{1}{3}$.

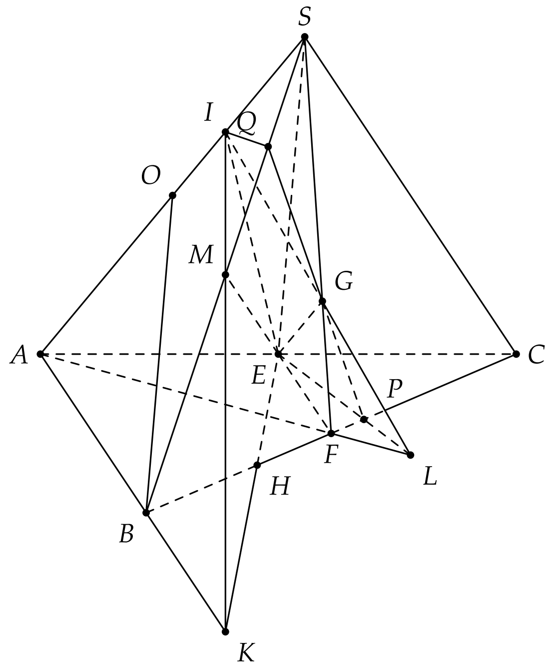
3. Ta có $M \in (P) \cap (ABCD)$ mà $(P) \parallel BC$ nên giao tuyến của (P) và $(ABCD)$ qua M và song song với BC. Giao tuyến này chính là MH.
   Khi đó $H \in (P) \cap (SCD)$, mà $(P) \parallel SD$ nên giao tuyến của (P) và (SCD) qua H song song với SD, giao tuyến này cắt SC tại một điểm là L.
   Vì H là trung điểm của CD nên L là trung điểm của SC.
   Ta có $NL \parallel BC$, $(P) \parallel BC$ và $N \in (SBC) \cap (P)$ nên NL là giao tuyến của (SBC) và (P).
   Vậy thiết diện của (P) cắt hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $MHLN$.

□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$, E, F lần lượt là trung điểm AC và BC.

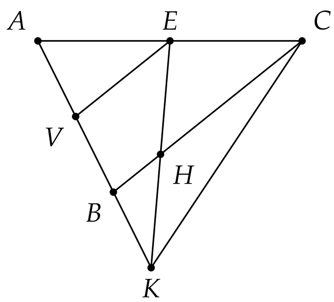
1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SEF).
2. Gọi M là trung điểm của SB và I là điểm trên SA thỏa mãn $AI = 3IS$. Tìm giao điểm K của IM và (ABC) và giao điểm H của BC và (EIM). Tính tỉ số $\dfrac{BH}{BC}$.
3. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SBC$. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (IEG).

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SEF) \\ AB \parallel EF \\ AB \subset (SAB), EF \subset (SEF) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SEF) = d$ qua S song song với AB.

2. Trong (SAB) gọi $K = IM \cap (ABC)$. Vì $\begin{cases} K \in IM \\ K \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow K = IM \cap (ABC)$.
Ta có $AE = (EIM) \cap (ABC)$. Gọi $H = KE \cap BC \Rightarrow H \in BC \cap (EIM)$.
Gọi O là trung điểm SA. Khi đó IM là đường trung bình của $\triangle SBO$ nên $IM \parallel BO$.
Trong $\triangle AIK$ có $KI \parallel BO \Rightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AO}{OI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{2}BK$.
Gọi V là trung điểm AB, có VE là đường trung bình của $\triangle ABC$.
$\Rightarrow VE = \dfrac{1}{2}BC$. (1)
Và có BH là đường trung bình của $\triangle KEV$
$\Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}VE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BH = \dfrac{1}{4}BC$.



3. Trong (SAF), gọi $L = IG \cap AF \Rightarrow L \in (ABC)$.
Trong (ABC) gọi $P = EL \cap BC$. Trong (SBC) gọi $Q = PG \cap SB$.
Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IEG) là tứ giác $IEPQ$.

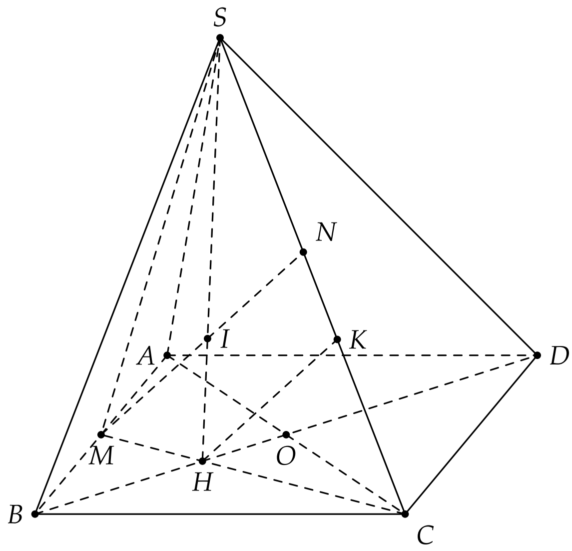
□

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC.

1. Tìm giao tuyến (SMN) và (SBD).

2. Tìm giao điểm I của MN và (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{MI}{MN}$.

Lời giải.



1. Trong $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$, $H = MC \cap BD$. Ta có

$$\begin{cases} H \in CM \subset (SCM) \\ H \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow H \in (SCM) \cap (SBD). \quad (1)$$

Lại có $S \in (SCM) \cap (SBD)$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $SH = (SCM) \cap (SBD)$.
Gọi $I = MN \cap SH \Rightarrow I = MN \cap (SBD)$.
Ta có H là trọng tâm $\triangle ABC$.
Trong $\triangle SCM$, kẻ $HK \parallel MN$ $(K \in SC)$.
Trong $\triangle CMN$ có $MN \parallel KH$ nên $\dfrac{CH}{CM} = \dfrac{CK}{CN} = \dfrac{HK}{MN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}MN.$ (3)
Trong $\triangle SHK$ có $IN \parallel KH$ nên $\dfrac{IN}{HK} = \dfrac{SN}{SK} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow HK = \dfrac{4}{3}IN.$ (4)
Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{2}{3}MN = \dfrac{4}{3}IN \Rightarrow MN = 2IN \Rightarrow \dfrac{MI}{MN} = \dfrac{1}{2}.$

□

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm S không nằm trong $(ABCD)$.

1. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

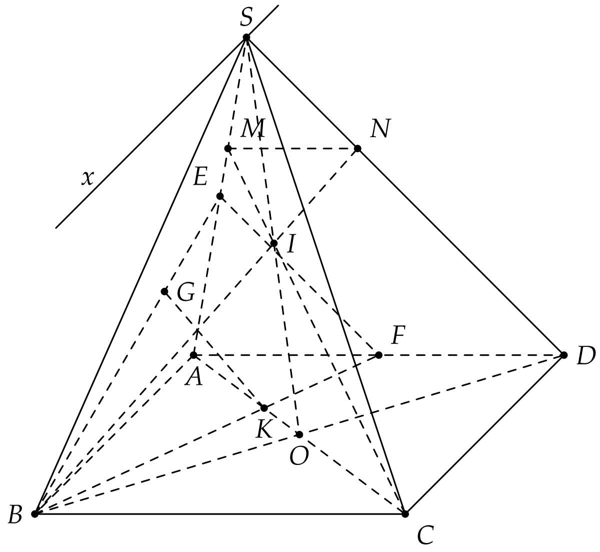
2. Một mặt phẳng (α) qua BC, cắt SA tại M và cắt SD tại N. Chứng minh $MN \parallel BC$.

3. Chứng tỏ giao điểm của BN và CM luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên SA.

4. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$, K là điểm trên cạnh AC sao cho $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh

GK song song với mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



1. Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$. Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. Do đó $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

   Ta cũng có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB.$

2. Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = MN \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (\alpha), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AD \parallel BC.$

3. Trong (α), gọi $I = BN \cap CM$. Vì $\begin{cases} I \in BN \subset (SBD) \\ I \in CM \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

   Suy ra I thuộc giao tuyến SO cố định của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

4. Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA và AD.

   Vì $\dfrac{AK}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AK = \dfrac{2}{3}AO$, mà AO là trung tuyến của $\triangle ABD$ nên G là trọng tâm $\triangle ABD$.

   Theo tính chất trọng tâm có $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BK}{BF} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GK \parallel EF$. (3)

   Mà EF là đường trung bình của $\triangle ADS$ nên $EF \parallel SD$. (4)

   Từ (3) và (4) suy ra $GK \parallel SD \subset (SCD) \Rightarrow GK \parallel (SCD)$.

□

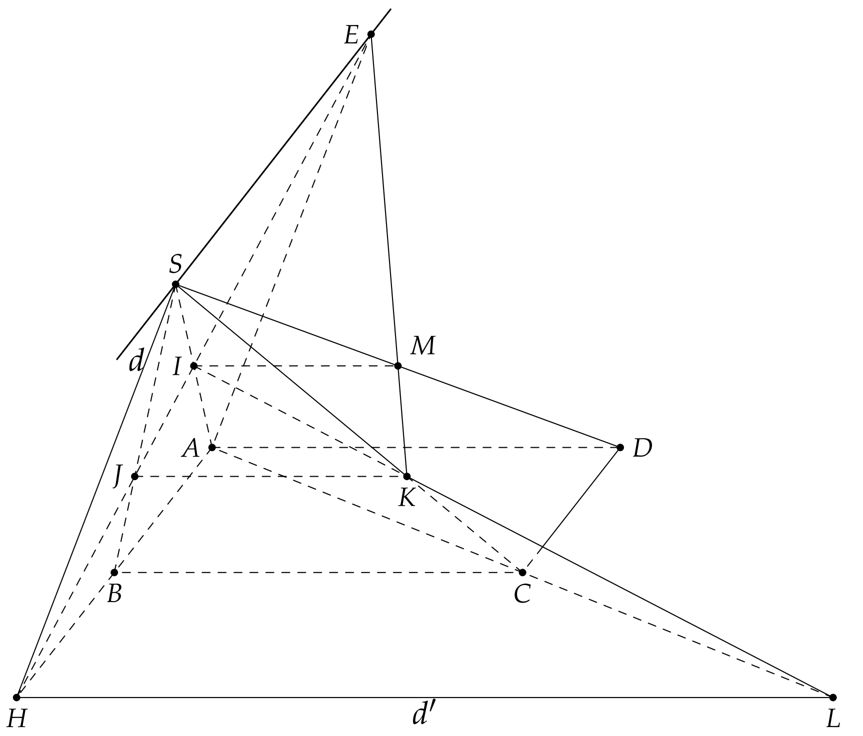
Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SA và J, K là các điểm trên SB, SC và thỏa mãn $JS = 2JB$, $KS = 2KC$.

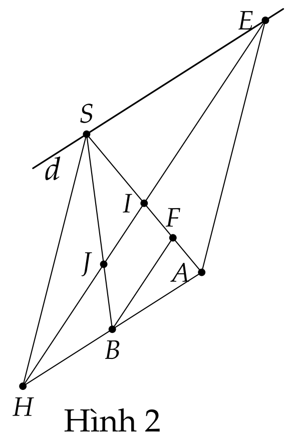
1. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), giao tuyến d' của (IJK) và (ACD).

2. Tìm giao điểm M của SD với (IJK) và chứng minh M là trung điểm SD.

3. Gọi E là giao điểm của IJ với KM, chứng minh $E \in d$ và $\dfrac{EI}{EJ} = \dfrac{EM}{EK} = \dfrac{3}{4}$.

Lời giải.





Hình 2

1. Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \subset (SCD) = d$ là đường thẳng qua S song song với AB.
   Trong mặt phẳng (SAB) gọi $H = AB \cap IJ$, trong mặt phẳng (SAC) gọi $L = AC \cap IK$.
   Ta có H, L là hai điểm chung của hai mặt phẳng (IJK) và $(ABCD)$ nên $(IJK) \cap (ABCD) = HL \equiv d'$.
   Vì $\dfrac{SJ}{SB} = \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{2}{3}$ nên $JK \parallel BC$, từ đó suy ra giao tuyến $HL \parallel JK \parallel BC$.

2. Vì I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (IJK), hai mặt phẳng này có $AD \parallel IJ$ nên giao tuyến của chúng đi qua I và song song với AD. Giao tuyến này cắt SD tại M, khi đó M là giao điểm của SD và (IJK). Từ đó suy ra IM là đường trung bình của $\triangle SAD$ (vì I là trung điểm nên M là trung điểm của SD).

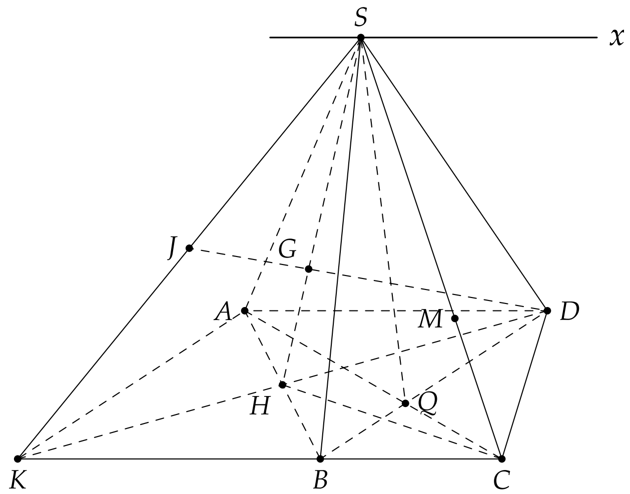
3. Vì $E = IJ \cap KM$ nên $E \in IJ \subset (SAB)$ và $E \in KM \subset (SAD)$ nên E nằm trên giao tuyến d của (SAB) và (SAD). Do đó ba đường thẳng d, IJ, KM đồng quy tại E.
   Mặt phẳng (SAB) được vẽ lại ở Hình 2.
   Dựng $BF \parallel HI$ $(F \in SA)$, ta có $\dfrac{SJ}{JB} = \dfrac{SI}{IF} = 2 \Rightarrow SI = 2IF \Rightarrow AI = 2IF$.
   Vậy F là trung điểm của AI. Từ đó suy ra BF là đường trung bình của tam giác AHI, do đó B là trung điểm của AH.
   Do HI và SB là hai đường trung tuyến của tam giác SAH, cắt nhau tại J nên J là trọng tâm của $\triangle SAH$.
   Ta có $\triangle AIH = \triangle SIE$ (g.c.g), suy ra $SE = HA$. Do đó $AHSE$ là hình bình hành, suy ra $\dfrac{EI}{EJ} = \dfrac{3}{4}$.
   Trong tam giác EJK có $IM \parallel JK$ nên $\dfrac{EI}{EJ} = \dfrac{EM}{EK} = \dfrac{3}{4}$.

□

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD.

1. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD), (SAD) và (SBC).
2. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M là điểm thuộc SC sao cho $SM = 2MC$. Chứng minh $GM \parallel (ABCD)$.
3. Tìm giao điểm J của GD và (SBC). Tính tỉ số $\dfrac{GJ}{GD}$.

Lời giải.



1. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì O và S là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên giao tuyến của chúng là SO.
   Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$ nên $(SAD) \cap (SBC) = Sx$ $(Sx \parallel AD \parallel BC)$.
2. Ta có $\dfrac{SG}{SH} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3}$ nên $GM \parallel HC$. Mà $HC \subset (ABCD)$ nên $GM \parallel (ABCD)$.
3. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của DH và BC. Ta có K và S là hai điểm chung của các mặt phẳng (SDH) và (SBC) nên SK là giao tuyến của (SDH) và (SBC). Trong mặt phẳng (SDH), gọi J là giao điểm của DG và SK, suy ra J là giao điểm của DG và (SBC). Ta có $\triangle HAD = \triangle HBK$ (g.c.g) nên $HD = HK$, suy ra SH là đường trung tuyến của tam giác SDK, do vậy $\dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$. Từ đó suy ra G là trọng tâm của $\triangle SDK$, do đó $\dfrac{GJ}{GD} = \dfrac{1}{2}$.

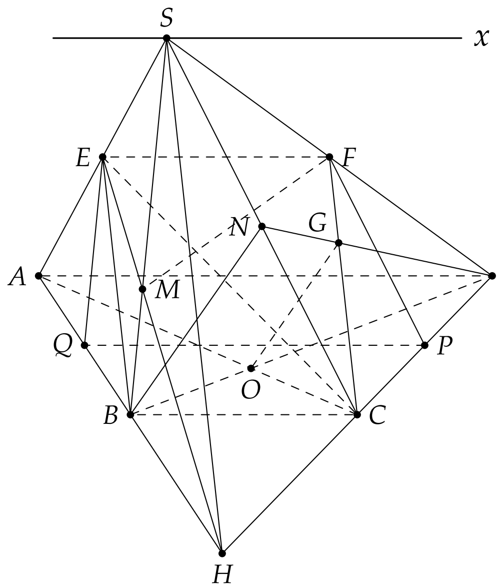
□

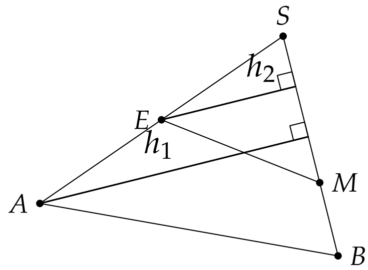
Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $AD = 2BC$ và O là giao điểm của hai đường chéo đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA, SD và G là trọng tâm tam giác SCD.

1. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD), (SAD) và (SBC).
2. Mặt phẳng (P) đi qua E, F và song song với SB. Giả sử (P) cắt cạnh CD, AB lần lượt tại P, Q. Chứng minh $EQ \parallel SB$. Tứ giác $EFPQ$ là hình gì? Chứng minh $BE \parallel (SCD)$ và $GO \parallel (SBC)$.

3. Tìm giao điểm M của SB và (CDE). Chứng minh $\dfrac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SMF}} = \dfrac{S_{\triangle SAB}}{S_{\triangle SBD}}$ và $SM \cdot BD = SB \cdot DO$.

Lời giải.





Hình 2

1. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của AB và CD. Suy ra $H \in (SAB) \cap (SCD)$.
   Do S là điểm chung của (SAB) và (SCD) nên $SH = (SAB) \cap (SCD)$.
   Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$ nên $(SAD) \cap (SBC) = Sx$ $(Sx \parallel AD \parallel BC)$.

2. Ta có $\begin{cases} EQ = (P) \cap (SAB) \\ SB \subset (SAB),\ SB \parallel (P) \end{cases}$ nên $EQ \parallel SB$.
   Lại có $\begin{cases} QP = (P) \cap (ABCD) \\ AD \parallel EF \\ AD \subset (ABCD), EF \subset (P) \end{cases}$ nên $QP \parallel EF \parallel AD$. Suy ra $EFPQ$ là hình thang.
   Vì $\begin{cases} BC = \dfrac{AD}{2} \\ BC \parallel AD \end{cases}$ và $\begin{cases} EF = \dfrac{AD}{2} \\ EF \parallel AD \end{cases}$ nên $BCFE$ là hình bình hành, suy ra $BE \parallel CF$.
   Mà $CF \subset (SCD)$ nên $BE \parallel (SCD)$.
   Ta có $\triangle OAD \backsim \triangle OCB$ nên $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = 2$. Gọi N là trung điểm của SC.
   Trong tam giác BDN có $\dfrac{SG}{SN} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$ nên $OG \parallel BN$. Mà $BN \subset (SBC)$ nên $OG \parallel (SBC)$.

3. Vì H và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (ECD) nên $(SAB) \cap (ECD) = EH$.
   Gọi $M = EH \cap SB \Rightarrow M = SB \cap (ECD)$.
   Trong $\triangle HAD$ có $BC \parallel AD$ nên ta có $\dfrac{HB}{HA} = \dfrac{HC}{HD} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$, suy ra B là trung điểm AH. Do đó M là trọng tâm tam giác SAH.
   Tam giác SAB được vẽ lại ở hình 2.

Ta có $S_{\triangle SME} = \dfrac{1}{2} \cdot h_2 \cdot SM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h_1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}SB = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}h_1 \cdot SB = \dfrac{1}{3}S_{\triangle SAB}$
$\Rightarrow \dfrac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SAB}} = \dfrac{1}{3}$. (*)

Tương tự ta cũng có $\dfrac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SBD}} = \dfrac{1}{3}$. (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra $\dfrac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SAB}} = \dfrac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SBD}} \Rightarrow \dfrac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SMF}} = \dfrac{S_{\triangle SAB}}{S_{\triangle SBD}}$.

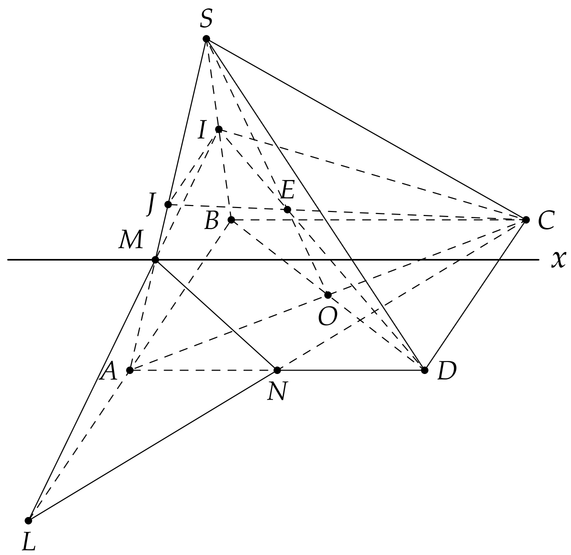
Theo chứng minh trên thì $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{DO}{DB} \Rightarrow SM \cdot BD = SB \cdot DO$.

□

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$ và N là trung điểm của AD.

1. Tìm giao tuyến của (SAD) và (MBC).
2. Tìm giao điểm I của SB và (CMN), giao điểm J của SA và (ICD).
3. Chứng minh ID, JC, SO đồng quy tại E. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SO}$.

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} M \in (SAD) \cap (MBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (MBC) \end{cases}$ nên $(SAD) \cap (MBC) = Mx$ ($Mx \parallel AD \parallel BC$).

2. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi L là giao điểm của AB và CN. Ta có L và M là hai điểm chung của (SAB) và (CMN) nên $(SAB) \cap (CMN) = LM$. Gọi I là giao điểm của LM và $SB \Rightarrow I = SB \cap (CMN)$.

3. Vì I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (ICD), $AB \parallel CD$ nên giao tuyến của chúng đi qua I và song song với AB, giao tuyến này cắt SA tại J thì J là giao điểm của SA với (ICD).
Gọi $E = CJ \cap DI$ (do $CJ,\ DI \subset (ICD)$). (1)

Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SO$.

Vì $\begin{cases} E \in CJ \subset (SAC) \\ E \in DI \subset (SBD) \end{cases}$ nên $E \in (SAC) \cap (SBC) = SO$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra ba đường thẳng CJ, DI, SO đồng quy tại E.

Trong tam giác LBC có $AN = \frac{1}{2}BC$ và $AN \parallel BC$ nên AN là đường trung bình của tam giác LBC, do đó A là trung điểm của LB.

Trong tam giác SBL có SA là đường trung tuyến và $SM = \frac{2}{3}SA$ nên M là trọng tâm $\triangle SBL \Rightarrow I$ là trung điểm của SB.

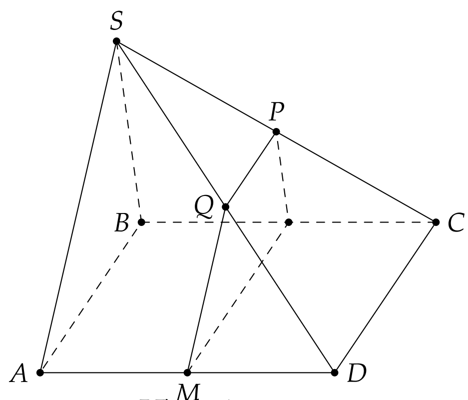
Xét tam giác SBC có E là giao điểm của hai đường trung tuyến SO và DI nên E là trọng tâm $\triangle SBC \Rightarrow \dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

□

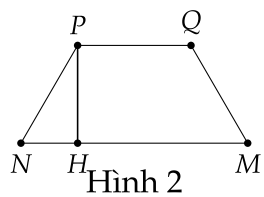
Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác cân. Gọi M là trung điểm của AD, mặt phẳng (α) đi qua M, (α) song song với AB và SA, lần lượt cắt BC, SC, SD tại N, P, Q.

1. Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.
2. Tính tỉ số diện tích của hình thang cân $MNPQ$ và tam giác đều SAB.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

1. Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ AB \parallel (\alpha), AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$.

   Mà $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = MQ \\ SA \parallel (\alpha), SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel SA$.

   Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (SCD) = QP \\ CD \parallel (\alpha), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$.

   Lại có $(\alpha) \parallel AB$, $(\alpha) \parallel SA$ nên $(\alpha) \parallel (SAB) \Rightarrow (\alpha) \parallel SB$.

   Vì $(\alpha) \cap (SBC) = NP \Rightarrow NP \parallel SB$.

   Theo cách dựng ở trên, ta có Q là trung điểm của SD, N là trung điểm của BC, P là trung điểm của SC. Vì $MN \parallel PQ$ (cùng song song với CD), suy ra $MNPQ$ là hình thang.

   Do $NP = \dfrac{SB}{2}$, $MQ = \dfrac{SA}{2}$ nên $NP = MQ$ (do tam giác SAB đều nên $SA = SB$).

Ta thấy $MNPQ$ là hình thang, có hai cạnh bên không song song và bằng nhau nên $MNPQ$ là hình thang cân.

2. Gọi a là độ dài cạnh AB, hình thang cân $MNPQ$ được vẽ lại ở Hình 2.
Ta có $PH = \sqrt{PN^2 - NH^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\triangle SAB} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Mà $S_{MNPQ} = \frac{(MN + PQ) \cdot PH}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} \Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{\triangle SAB}} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{4}$.

□

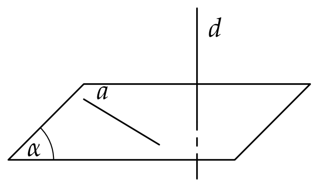
Chương 3. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. Tóm tắt lý thuyết

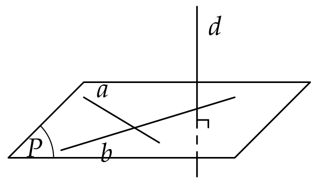
Định nghĩa 1.
Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

$$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a,\ \forall a \subset (\alpha).$$

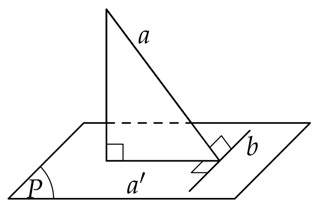


Định lí 1.
Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).

$$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a \cap b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$



Định lí 2. (Định lí ba đường vuông góc)
Cho đường thẳng a không nằm trong (P) đồng thời không vuông góc với (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Gọi a' là hình chiếu vuông góc của a trên (P). Khi đó b vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với a'.



PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
Để chứng minh $a \perp b$ ta thường sử dụng những phương pháp chứng minh sau:

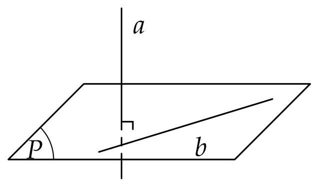
1. Sử dụng các phương pháp hình học phẳng: góc nội tiếp, định lí Pitago đảo, ...

2. Sử dụng phương pháp tích vô hướng của hai véctơ, nếu $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ thì $a \perp b$ (với $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ lần lượt là hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b).

3. Sử dụng tính chất bắc cầu $\begin{cases} c \perp b \\ c \parallel a \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$

4. Tìm một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b. Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), thì $a \perp b$.

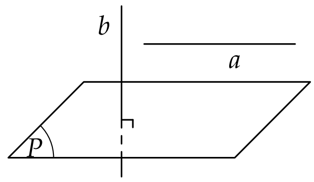
$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$



5.

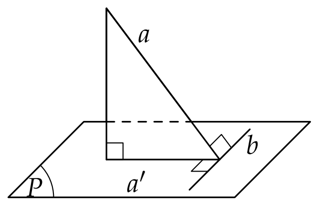
Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), thì suy ra $a \perp b$.

$$\begin{cases} a \parallel (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$



6.

Áp dụng định lí 3 đường vuông góc: a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P), $b \subset (P)$. Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b khi và chỉ khi b vuông góc với a'. Nói ngắn gọn b vuông góc với hình chiếu thì b vuông góc với đường xiên.
Đây là phương pháp rất hay sử dụng, đọc giả phải thành thạo phương pháp này.



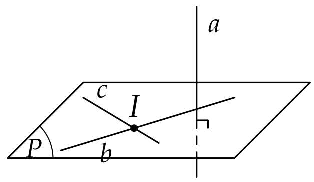
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường sử dụng những phương pháp sau:

1.

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).

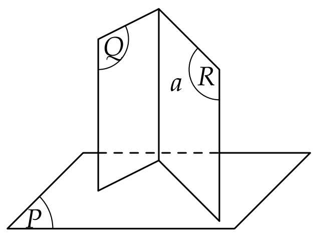
$$\begin{cases} a \perp b,\ a \perp c \\ b \cap c = I \\ b, c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$



2.

Hai mặt phẳng (Q) và (R) có giao tuyến a cùng vuông góc với mặt phẳng (P), thì a vuông góc với (P).

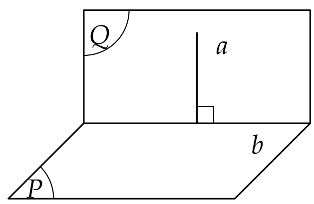
$$\begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \\ (Q) \cap (R) = a \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



3.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến b. Một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với b, thì a vuông góc với mặt phẳng (P).

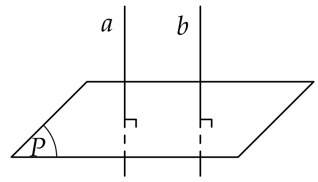
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \\ a \subset (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



4.

Chứng minh đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), đường thẳng a song song với b, thì suy ra a vuông góc với (P).

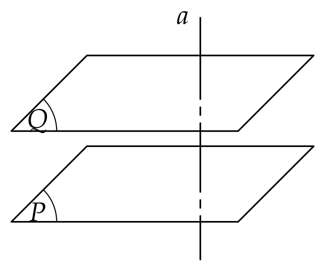
$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



5.

Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q), mặt phẳng (P) song song với (Q), nên a vuông góc với (P).

$$\begin{cases} a \perp (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$



Hai vấn đề chính để giải các bài toán của dạng này:

• Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P).

• Khi đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mọi đường nằm trong (P).

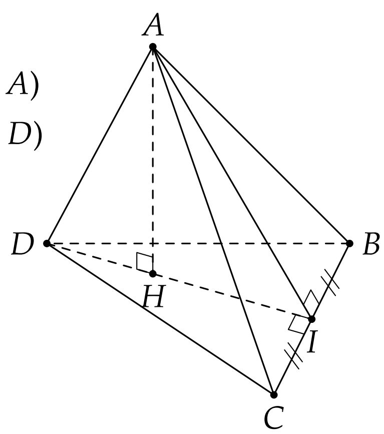
B. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau tạo nên tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \text{ (vì AI là trung tuyến của } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \\ BC \perp DI \text{ (vì DI là trung tuyến của } \triangle DBC \text{ cân tại } D) \\ AI, DI \subset (ADI),\ AI \cap DI = I \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (ADI) \Rightarrow BC \perp AD.$

b) Ta có $\begin{cases} AH \perp DI \text{ (giả thiết)} \\ AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (ADI)) \\ BC, DI \subset (BCD),\ BC \cap DI = I \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (BCD).$

□

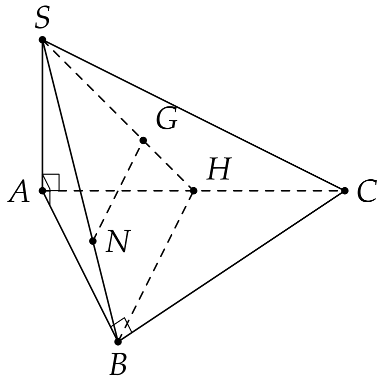
Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$. Chứng minh:

a) $BC \perp (SAB)$.

b) $NG \perp (SAC)$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AC. Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $BH \perp AC$. (1)



a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (giả thiết)} \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

b) Ta có $\begin{cases} BH \perp AC \text{ (theo (1))} \\ BH \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC).$ (2)

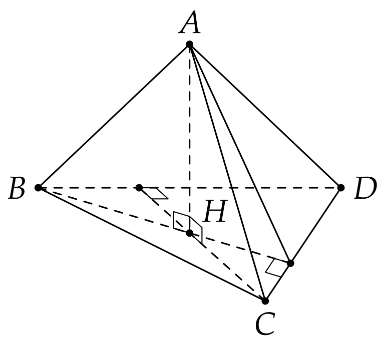
Xét $\triangle SBH$ có $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $NG \parallel BH$. (3)

Từ (2) và (3) ta được $NG \perp (SAC)$.

□

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

Lời giải.



• Ta có $\begin{cases} CD \perp AB \text{ (giả thiết)} \\ CD \perp AH \text{ (vì } AH \perp (BCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH).$

Mà $BH \subset (ABH)$ nên $CD \perp BH$. (1)

Chứng minh tương tự ta được $BD \perp (ACH) \Rightarrow BD \perp CH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của $\triangle BCD$.

• Ta có $\begin{cases} BC \perp DH \text{ (vì } H \text{ là trực tâm } \triangle BCD) \\ BC \perp AH \text{ (vì } AH \perp (BCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH).$

Mà $AD \subset (ADH)$ nên $BC \perp AD$.

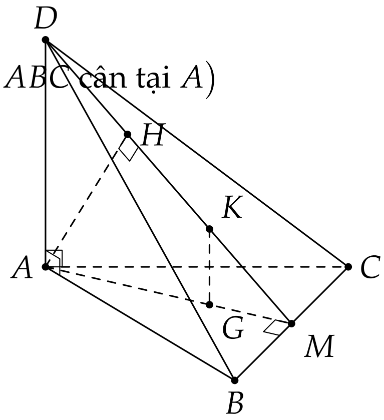
□

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp DM$ tại H.

a) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AM & (\text{vì } AM \text{ là đường trung tuyến trong } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \\ BC \perp AD & (\text{vì } DA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (DAM)$. (1)

Khi đó $\begin{cases} AH \perp BC & (\text{do } (1)) \\ AH \perp DM & (\text{giả thiết}) \\ BC, DM \subset (BCD);\ BC \cap DM = M \end{cases} \Rightarrow$

$AH \perp (BCD)$.

b) Vì G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC

nên theo tính chất trọng tâm ta có $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{DK}{DM} = \dfrac{2}{3}$.

Theo định lí Talet đảo ta được $KG \parallel AD$.

Mà $AD \perp (ABC)$ nên $KG \perp (ABC)$.

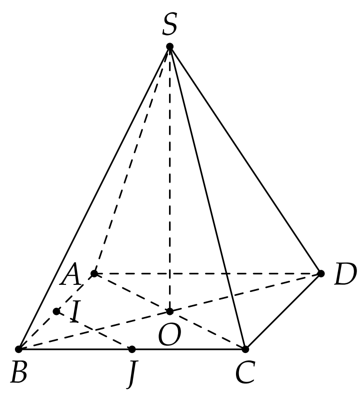
□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$ và $AC \perp SD$.

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.

Lời giải.



a) • Ta có $\begin{cases} SO \perp AC & (\text{vì } \triangle SAC \text{ cân tại } S) \\ SO \perp BD & (\text{vì } \triangle SBD \text{ cân tại } S) \end{cases}$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

• Ta có $\begin{cases} AC \perp BD & (\text{tính chất hình thoi}) \\ AC \perp SO & (\text{vì } SO \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$.

b) Ta có IJ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $IJ \parallel AC$.

Mà $AC \perp (SBD)$ nên $IJ \perp (SBD)$.

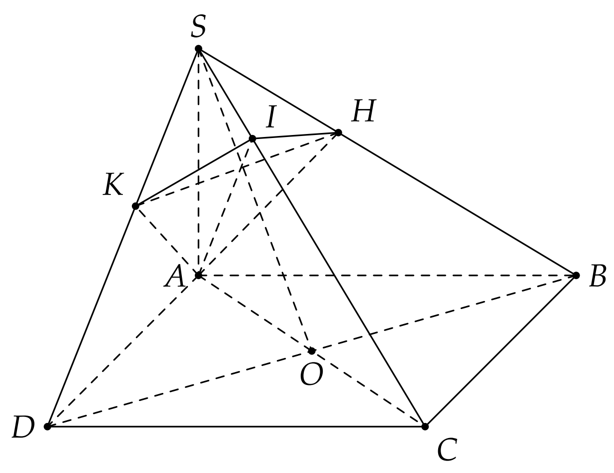
□

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

1. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.
2. Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trên một mặt phẳng
3. Chứng minh rằng $HK \perp (SAC)$. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.

Lời giải.

1.



Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Có $\begin{cases} BC \perp SA\ (SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \text{ (gt)} \\ SA, AB \subset (SAB), SA \cap AB = \{A\} \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Chứng minh $CD \perp (SAD)$

Vì $\begin{cases} CD \perp SA(SA \perp (ABCD)) \\ CD \perp AD \text{ (gt)} \\ SA, AD \subset (SAD), SA \cap AD = \{A\} \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Chứng minh $BD \perp (SAC)$

Vì $\begin{cases} DB \perp SA(SA \perp (ABCD)) \\ BD \perp AC \text{ (gt)} \\ SA, AC \subset (SAC), SA \cap AC = \{A\} \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$.

2. Ta có $\begin{cases} AH \perp SB \text{ (gt)}, AH \perp BC(BC \perp (SAB)) \\ SB, BC \subset (SBC), SB \cap BC = \{B\} \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$

Có $\begin{cases} AK \perp SD \text{ (gt)} \\ AK \perp CD(CD \perp (SAD)) \\ SD, CD \subset (SCD), SD \cap CD = \{D\} \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC.$

Vì AH, AK và AI cùng vuông góc với SC nên AH, AK, AI đồng phẳng.

3. Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c) nên hai đường cao xuất phát từ đỉnh A bằng nhau, hay $AH = AK$. Từ đó suy ra $\triangle SHA = \triangle SKA$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Vậy $SH = SK$.

Do đó $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$, theo định lý đảo Ta-lét ta có $HK \parallel BD$.

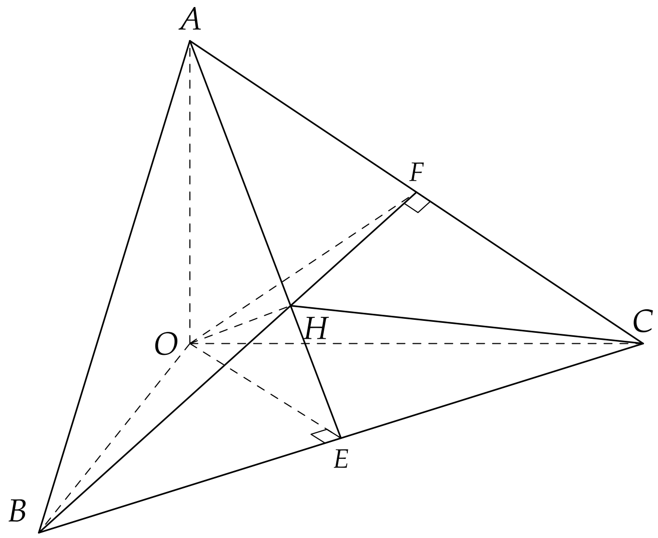
Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI(AI \subset (SAC))$.

□

Bài 7. Cho tứ diện $O.ABC$ có 3 cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh

1. $OA \perp BC, OB \perp CA, OC \perp AB$.
2. H là trực tâm của tam giác ABC.
3. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
4. $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.
5. Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} OA \perp OB, OA \perp OC \\ OB, OC \subset (OBC) \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$

   Ta có $\begin{cases} OB \perp OA, OB \perp OC \\ OA, OC \subset (OAC) \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC.$

   Chứng minh tương tự ta được $OC \perp AB$.

2. Gọi $E = AH \cap BC, F = BH \cap AC$.

   Ta có $\begin{cases} BC \perp OA\,(OA \perp (OBC)) \\ BC \perp OH\,(OH \perp (ABC)) \\ OA, OH \subset (OAE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAE) \Rightarrow BC \perp AE. \quad (1)$

   Ta lại có $\begin{cases} AC \perp OB, AC \perp OH \\ OB, OH \subset (OBF) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBF) \Rightarrow AC \perp BF. \quad (2)$

   Từ (1) và (2) ta có H là trực tâm của tam giác ABC.

3. Trong tam giác OAE vuông tại O có OH là đường cao nên ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2}$.

   Mà trong tam giác OBC vuông tại O có OE là đường cao ta lại có $\dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

   Từ đó suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

4. **Cách 1**

   Trong tam giác OAE vuông tại O có OH là đường cao ta có

$$\begin{aligned} OE^2 = EH \cdot EA &\Leftrightarrow OE^2 \cdot BC^2 = EH \cdot BC \cdot EA \cdot BC \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} OE \cdot BC\right)^2 = \frac{1}{2} EH \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot EA \cdot BC \\ &\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} = S_{\Delta HBC} \cdot S_{\Delta ABC}. \end{aligned}$$

   Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được
   $S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HAC} \cdot S_{\Delta ABC}$;
   $S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta HAB} \cdot S_{\Delta ABC}$.
   Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta HBC} \cdot S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAC} \cdot S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAB} \cdot S_{\Delta ABC} \\ \Leftrightarrow\ & S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC} \cdot (S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAB}) \\ \Leftrightarrow\ & S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta ABC} \\ \Leftrightarrow\ & S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}. \end{aligned}$$

Cách 2
Ta có

$$\begin{aligned}
S^2_{\Delta ABC} &= \frac{1}{4}AE^2\cdot BC^2 = \frac{1}{4}\left(\left(OA^2+OE^2\right)BC^2 = \frac{1}{4}OA^2\cdot BC^2 + \frac{1}{4}OE^2\cdot BC^2\right.\\
&= \frac{1}{4}OA^2\left(OB^2+OC^2\right) + \frac{1}{4}OE^2\cdot BC^2 = \frac{1}{4}OA^2\cdot OB^2 + \frac{1}{4}OA^2\cdot OC^2 + \frac{1}{4}OE^2\cdot BC^2\\
\Leftrightarrow S^2_{\Delta ABC} &= S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}.
\end{aligned}$$

5. Gọi độ dài ba cạnh $OA = a, OB = b, OC = c$.
Trong tam giác ABC, áp dụng định lý cosin có

$$\cos\widehat{A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{a^2+b^2+a^2+c^2-\left(b^2+c^2\right)}{2AB\cdot AC} = \frac{a^2}{AB\cdot AC} > 0.$$

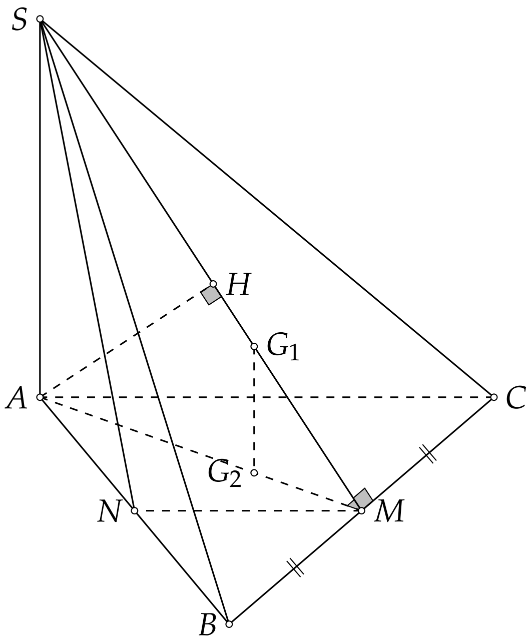
Suy ra $\widehat{A}$ là góc nhọn.
Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{B}, \widehat{C}$ là góc nhọn.

□

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$, đáy là tam giác cân và $DA \perp \text{mp}(ABC)$, $AB = AC = a$, $BC = \dfrac{6a}{5}$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc với MD (H thuộc MD).

1. Chứng minh $AH \perp \text{mp}(BCD)$.
2. Cho $AD = \dfrac{4a}{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.
3. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác DBC và ABC. Chứng minh $G_1G_2 \perp \text{mp}(ABC)$.

Lời giải.



1. Chứng minh $AH \perp \text{mp}(BCD)$.
Vì M là trung điểm của BC nên $BC \perp AM$. (1)
Mặt khác $BC \perp AD$ (Vì $DA \perp \text{mp}(ABC)$) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC \perp \text{mp}(DAM)$. Suy ra $BC \perp AH$ (vì $AH \subset (DBC)$.)
Vậy ta có $\begin{cases} AH \perp DM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp \text{mp}(DBC)$.

2. Cho $AD = \dfrac{4a}{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.
Kẻ $MN \parallel AC$ ($N \in AB$) thì góc giữa đường thẳng DM và AC bằng góc giữa DM và MN, đó là góc $\widehat{DMN}$ hoặc góc $180^\circ - \widehat{DMN}$.
Xét $\triangle ABC$ có $MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$.
Xét $\triangle DAN$ vuông tại A có $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \dfrac{a\sqrt{89}}{10}$.
Xét $\triangle ABM$ vuông tại M có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \dfrac{4a}{5}$.
Xét $\triangle ADM$ vuông tại A có $DM\sqrt{AD^2 + AM^2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{5}$.
Áp dụng định lí cos cho tam giác DMN, ta có
$$\cos \widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2 \cdot DM \cdot MN} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \widehat{DMN} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right).$$

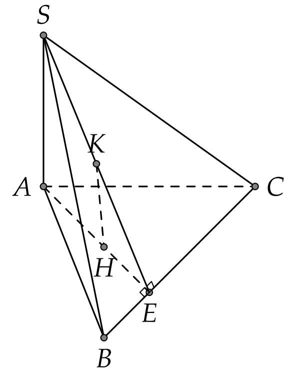
3. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác DBC và ABC. Chứng minh $G_1G_2 \perp \text{mp}(ABC)$.
Vì G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác DBC và ABC nên theo tính chất trọng tâm, ta có $\dfrac{MG_1}{MD} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{MG_2}{MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{MG_1}{MD} = \dfrac{MG_2}{MA} \Rightarrow G_1G_2 \parallel DA$ (theo định lí đảo định lí Talet).
Mà $DA \perp (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \perp (ABC)$.

□

Bài 9. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

1. AH, SK, BC đồng quy.
2. SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).
3. HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



1. Gọi $E = AH \cap BC$

   Ta có: $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE)$

   $\Rightarrow BC \perp SE (SE \subset (SAE))$.

   Vì $SK \perp BC$, suy ra ba điểm S, K, E thẳng hàng.

   Kết luận ba đường thẳng AH, BC, SK đồng quy tại điểm E.

2. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

   Có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC (SC \subset (SAC))$.

   Có: $\begin{cases} SC \perp BH (BH \perp (SAC)) \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

3. HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

   Có $BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp HK (HK \subset (SAE))$ (1)

   Có $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$ (2)

   Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$.

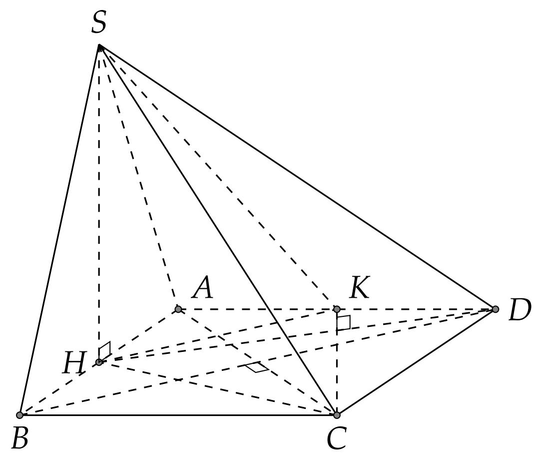
□

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K là trung điểm của AB, AD.

1. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.
2. Chứng minh $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Lời giải.

1.



   Trong $\triangle BCH$ có $HC^2 = BH^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

   và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (SH là đường cao $\triangle SAB$ đều).

   Trong $\triangle SCH$ có $SC^2 = SH^2 + HC^2 = 2a^2$.

   Suy ra tam giác SHC vuông tại H.

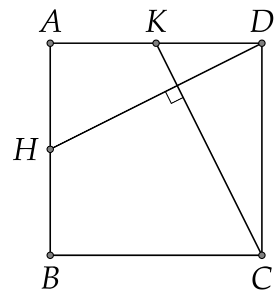
   Có $\begin{cases} SH \perp AB, SH \perp HC \\ AB, HC \subset (ABCD), AB \cap HC = H \end{cases}$

   $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

2. Ta có $\begin{cases} HK \parallel BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$.

   Có $\begin{cases} AC \perp SH, AC \perp HK \\ SH, SK \subset (SHK), SH \cap HK = H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

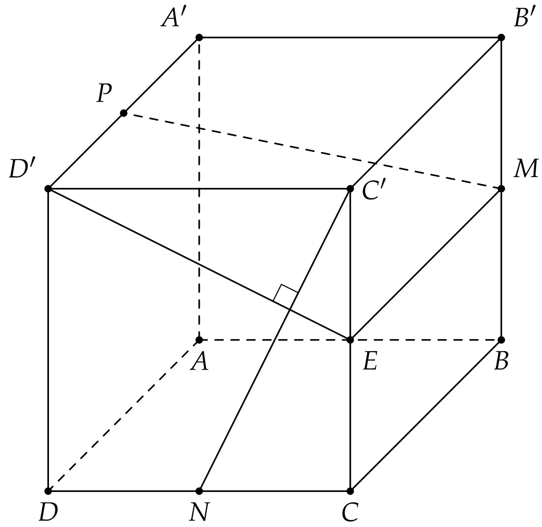
Chứng minh $CK \perp SD$.
Dễ dàng chứng minh $\triangle CDK = \triangle DAH$.
Suy ra $\widehat{CKD} = \widehat{AHD}$ mà $\widehat{AHD} + \widehat{ADH} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{CKD} + \widehat{ADH} = 90^\circ \Rightarrow CK \perp DH$.
Ta có $\begin{cases} CK \perp SH, CK \perp DH \\ SH, DH \subset (SHD), SH \cap DH = H \end{cases}$
$\Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$ (đpcm).



□

Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BB', CD, A'D'$. Chứng minh: $MP \perp C'N$.

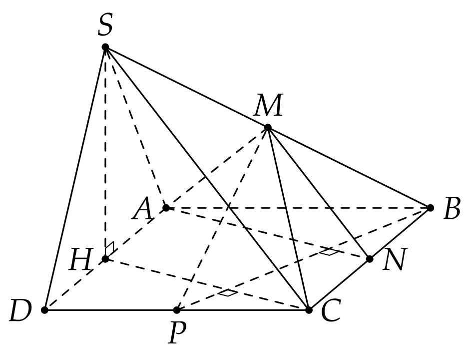
Lời giải.
Gọi E là trung điểm của CC'.
Ta có $ME \parallel A'D'$ nên EM và PD' đồng phẳng. Vì có $CDD'C'$ là hình vuông nên dễ dàng chứng minh được hai tam giác $D'C'E$ và $C'CN$ bằng nhau, suy ra $\widehat{ED'C'} = \widehat{NC'C}$.
Mà $\widehat{ED'C'} + \widehat{C'ED'} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NC'C} + \widehat{C'ED'} = 90^\circ \Rightarrow ED' \perp NC'$ (1).
Ta có $BC \perp (CDD'C') \Rightarrow BC \perp NC'$, mà $ME \parallel BC$ nên $ME \perp NC'$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $NC' \perp (MED'P)$, do đó $NC' \perp PM$ (do $PM \subset (MED'P)$).

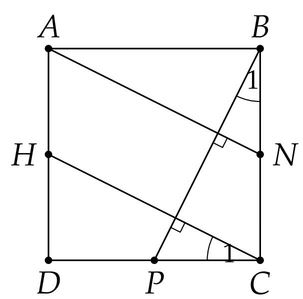


□

Bài 12. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

Lời giải.



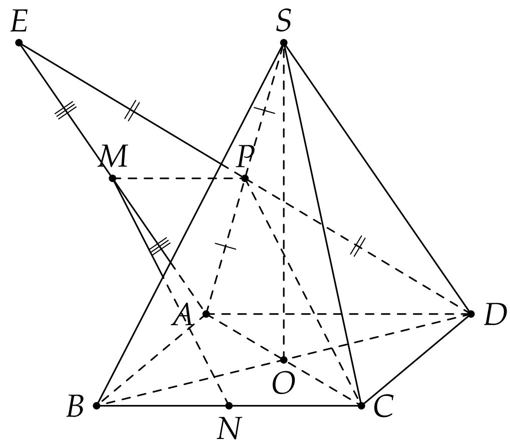


Hạ $SH \perp AD$ tại H.
Vì SAD là tam giác đều nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vì mặt phẳng (SAD) vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ nên có AD là giao tuyến.
Suy ra $SH \perp (ABCD)$.
Ta có $AN \parallel HC$ và $MN \parallel SC$.

Mà $AM, MN \subset (AMN)$ và $HC, SC \subset (SHC)$.
Suy ra mặt phẳng (AMN) song song mặt phẳng (SHC).
Trong hình vuông $ABCD$ ta có $\triangle BCP = \triangle CDH$ (c.g.c) nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.
Mà $\widehat{B_1} + \widehat{P_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{P_1} = 90^\circ \Rightarrow CH \perp PB$.
Ta có $\begin{cases} BP \perp CH \\ BP \perp SH \end{cases} \Rightarrow BP \perp (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$. □

Bài 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh $MN \perp BD$.

Lời giải.
Gọi O là giao điểm của AC và BD. P là trung điểm SA.
Trong $\triangle EAD$ có MP là đường trung bình nên có $MP \parallel AD$,
$MP = \dfrac{1}{2}AD$. (1)
Vì N là trung điểm BC nên $NC \parallel AD$,
$NC = \dfrac{1}{2}AD$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $CPMN$ là hình bình hành nên $MN \parallel BC$.
Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CP$ ($CP \subset (SAC)$).
Suy ra $BD \perp MN$.



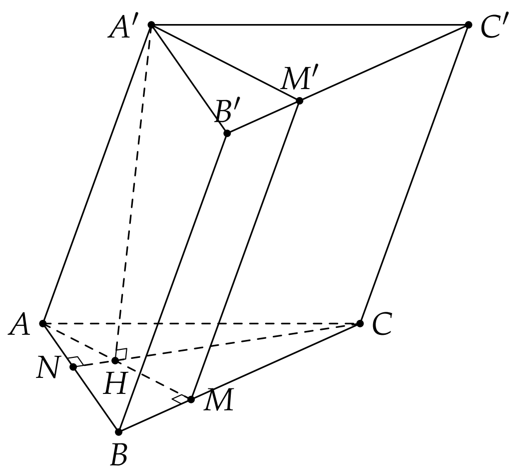
□

Bài 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $AH \perp (ABC)$. Chứng minh rằng:

1. $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.
2. Gọi MM' là giao tuyến của hai (AHA') và $(BCC'B')$ trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

Lời giải.

1. Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \text{ (giả thiết)} \\ BC \perp A'H\, (A'H \perp (ABC)). \end{cases}$
   $\Rightarrow BC \perp (A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$.
   Vì $B'C' \perp BC$ mà $BC \perp AA' \Rightarrow AA' \perp B'C'$.
2. $\begin{cases} (AHA') \cap (BCC'B') = MM' \\ AA' \parallel BB' \\ A' \subset (AHA'), BB' \subset (BCC'B'). \end{cases} \Rightarrow MM' \parallel AA' \parallel BB'$.
   Mà $AA' \perp BC \Rightarrow BB' \perp BC$. Vậy $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

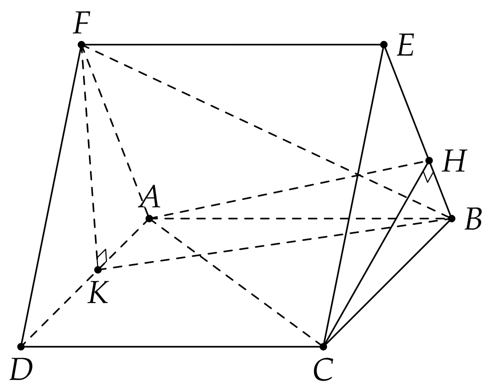


□

Bài 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng chéo nhau sao cho $AC \perp CF$. Gọi CH, FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh

a) ACH và BFK là các tam giác vuông. b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

Lời giải.



1. Ta có $ABCD$, $ABEF$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCE) \Rightarrow AB \perp CH.$ $\begin{cases} CH \perp BE \text{ (giả thiết)} \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp AH.$
   Vậy $\triangle ACH$ vuông tại H.
   Chứng minh tương tự, ta có $FK \perp (ABCD) \Rightarrow FK \perp BK$.
   Vậy $\triangle BFK$ vuông tại K.

2. Ta có $\begin{cases} BF \perp AC \text{ (giả thiết)} \\ BF \perp CH \text{ (vì } H \perp (ABEF)) \end{cases} \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH\, (AH \subset (ACH))$.
   $\begin{cases} AC \perp FB \text{ (giả thiết)} \\ AC \perp FK \text{ (vì } FK \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK.$

□

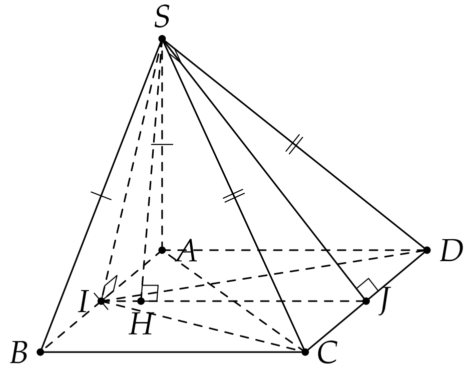
Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác cân đỉnh S. gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1. Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh $SI \perp (SCD)$, $SI \perp (SAB)$.

2. Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$ và tính độ dài SH.

Lời giải.

1.



$\triangle SAB$ đều có $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\triangle SCD$ vuông cân tại S.
Suy ra $SI = CI = DI = \dfrac{a}{2}$; $SC = SD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $IJ = AD = BC = a$.
Xét tam giác SIJ có $IJ^2 = SI^2 + SJ^2 = a^2 \Rightarrow \triangle SIJ$ vuông tại S, suy ra $SI \perp SJ$. (1)
Trong tam giác IBC vuông tại B có: $IC^2 = IB^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$.

Xét tam giác SIC có $IC^2 = IS^2 + SC^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow$ $\triangle SIC$ vuông tại S, hay $SI \perp SC$. (2)
Từ (1) và (2) có $\begin{cases} SI \perp SJ, SI \perp SC \\ SJ, SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (SCD)$.
Chứng minh tương tự $\begin{cases} SJ \perp SI, SJ \perp SB \\ SI, SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

2. Đầu tiên ta chứng minh: $CD \perp (SIJ)$.
Ta có $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SI \text{ (vì } SI \perp (SCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$ (do $SH \subset (SCD)$). (1)
Ta lại có $\begin{cases} SH \perp IJ \text{ (giả thiết)}, SH \perp CD \text{ (do (1))} \\ IJ, CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
Tính SH: xét tam giác SIJ vuông tại S có

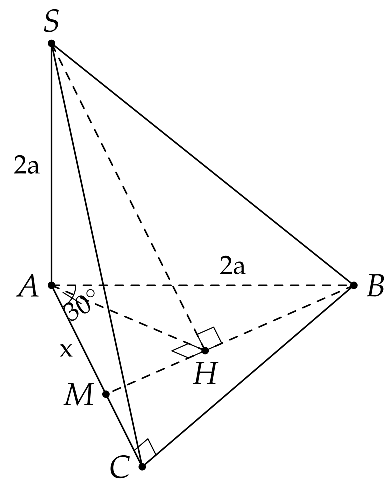
$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

□

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu của S trên BM.

1. Chứng minh $AH \perp BM$.
2. Đặt $AM = x$, $0 \le x \le a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S tới BM theo a và x. Tìm x để khoảng cách này là lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.



1. $\begin{cases} BM \perp SH \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AH.$

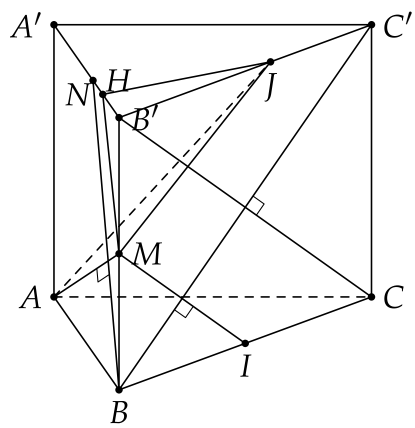
2. Khoảng cách từ H tới BM chính là SH.
   Trong tam giác ABC có $AC = AB \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}, BC = AB \cdot \sin 30^\circ = a$.
   Xét tam giác BCM có $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2}$.
   Xét tam giác ABM có $S_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BM = \dfrac{1}{2}AM \cdot AB \cdot \sin 30^\circ$
   $\Rightarrow AH = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2}}$
   Xét tam giác SAH có $SH^2 = SA^2 + AH^2 = 4a^2 + \dfrac{a^2 \cdot x^2}{a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2}$.
   Để SH lớn nhất thì AH lớn nhất. AH lớn nhất khi M trùng với C khi đó AH là AC và SH là SC. Để SH nhỏ nhất thì AH nhỏ nhất. AH nhỏ nhất khi M trùng với A khi đó AH bằng 0 và SH chính là SA.

□

Bài 18. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $CC' = a$.

1. Gọi I trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.
2. Gọi M trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.
3. Lấy điểm N thuộc $A'B'$ sao cho $NB' = \dfrac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

Lời giải.
Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và $AB = AC = BC = CC' = a$ nên các mặt bên là các hình vuông.



1. Chứng minh $AI \perp BC'$.
   $\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'.$

2. Chứng minh $AM \perp BC'$
   $AM \parallel CB', CB' \perp BC' \Rightarrow IM \perp BC'$.
   Ta có $\begin{cases} AI \perp BC' \\ IM \perp BC' \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (AMI) \Rightarrow BC' \perp AM.$

3. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.
   Gọi H là trung điểm của $A'B'$, suy ra N là trung điểm của HB'.
   Ta có $MN \parallel BH, BH \perp AM$ (tính chất hình vuông).
   Suy ra $MN \perp AM$. (1)
   $MJ \perp BC', AM \perp BC'$ (tính chất hình vuông).

Suy ra $AM \perp MJ$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AM \perp (MNI)$.

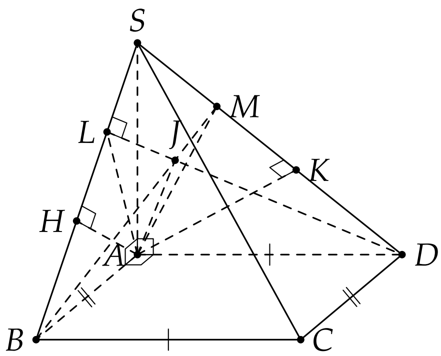
□

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$.

1. Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
2. Kẻ $AJ \perp (SBD)$. Chứng minh J là trực tâm của tam giác SBD.

Lời giải.

1.



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. (1)
$\begin{cases} AH \perp SB \text{ (giả thiết)} \\ AH \perp BC \text{ (do (1))} \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (2)
Lại có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$. (3)
$\begin{cases} AK \perp SD \text{ (giả thiết)} \\ AK \perp CD \text{ (do (3))} \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $SC \perp (AHK)$.

2. Gọi $L = DJ \cap SB$ (vì $DJ, SB \subset (SBD)$). $M = BJ \cap SD$ (vì $BJ, SD \subset (SBD)$).
Ta có $AD \perp mp\,(SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.
Suy ra $\begin{cases} SB \perp AD, SB \perp AJ \text{ (do } AJ \perp (SBD)) \\ AD, AJ \subset (ADL)\,. \end{cases}$
$\Rightarrow SB \perp (ADL) \Rightarrow SB \perp DL$.
Chứng minh tương tự thì $SD \perp BM$.
Xét tam giác SBD, có J là giao điểm hai đường cao.
Suy ra J là trực tâm của $\triangle SBD$.

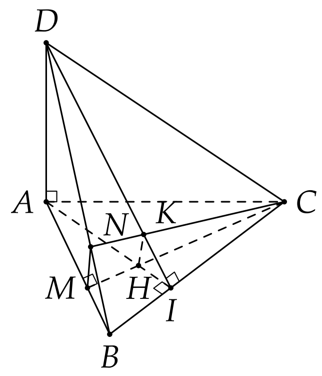
□

Bài 20. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$. Gọi AI là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Hạ HK vuông góc với DI tại K. Chứng minh

a) $HK \perp BC$.

b) K là trực tâm của tam giác DBC.

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} BC \perp AI, BC \perp DA \\ AI, DA \subset (DAI), DA \cap AI = A \end{cases}$
   $\Rightarrow BC \perp (DAI) \Rightarrow BC \perp HK.$

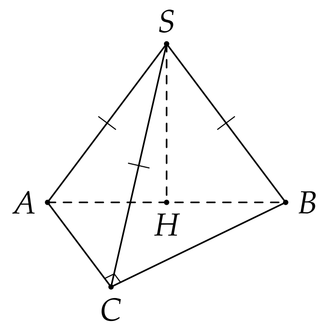
2. Ta có $BC \perp (DAI) BC \perp DI.$ $(*)$
   Trong tam giác ABC gọi $M = CH \cap AB$.
   Trong tam giác BCD gọi $N = CK \cap BD$.
   $\begin{cases} HK \perp DI \text{ (giả thiết)}, HK \perp BC \\ DI, BC \subset (BCD), DI \cap BC = I \end{cases} \Rightarrow HK \perp (BCD).$ (1)
   $\begin{cases} CM \perp AB, CM \perp DA \\ AB, DA \subset (ABD), AB \cap DA = A \end{cases} \Rightarrow CM \perp (DAB).$ (2)
   $\begin{cases} BD \perp CM \text{ (do (1))} \\ BD \perp HK \text{ (do (**))} \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CMN) \Rightarrow BD \perp CN.$ $(**)$
   Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra K là trực tâm tam giác BCD.

□

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120°$, $\widehat{BSC} = 90°$, $\widehat{CSA} = 60°$.

1. Chứng minh ta giác ABC vuông.
2. Xác định hình chiếu H của S trên (ABC). Tính SH theo a.

Lời giải.



a) $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cos \widehat{ASB} = 3a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}.$
   $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}.$
   $AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cos \widehat{CSA} = a^2 \Rightarrow AC = a.$
   Ta có $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
   Vậy tam giác ABC vuông tại C.

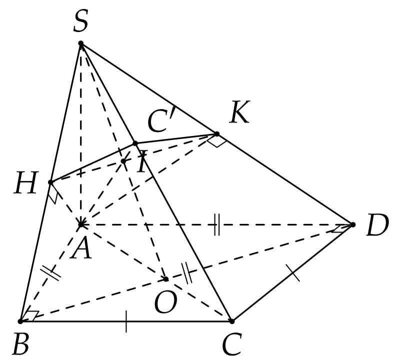
b) Vì $\begin{cases} SH \perp (ABC) \\ SA = SB = SC \end{cases}$ nên $HA = HB = HC$.
   Do đó H là trung điểm của AB.
   Vì tam giác ASH là nửa tam giác đều nên $SH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$.

□

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác, có ABD là tam giác đều, BCD là tam giác cân tại C có $\widehat{BCD} = 120°$, $SA \perp (ABCD)$.

1. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
2. Gọi C' là giao điểm của SC với (AHK). Tính diện tích tứ giác $AHC'K$ khi $AB = SA = a$.

Lời giải.



Vì $\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$ nên AC là đường trung trực của đoạn BD.
Tam giác ABD đều, $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 60^\circ$.
Tam giác BCD cân tại C có $\widehat{BCD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 30^\circ$.
Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB, BC \perp SA \,(\text{vì } SA \perp (ABCD)) \\ AB, SA \subset (SAB), AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$.

1. $\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA \,(\text{vì } SA \perp (ABCD)) \\ AD, SA \subset (SAD), AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp AK.$

   $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$; $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC.$

   Vậy $\begin{cases} SC \perp AH, SC \perp AK \\ AH, AK \subset (AHK), AH \cap AK = A \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK).$

2. $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$

   Ta có $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c), suy ra $AH = AK$ (đường cao xuất phát từ 2 đỉnh tương ứng).
   Nên $SH = SK$, mà $SB = SD$, suy ra $HK \parallel BD$ (định lí Ta-lét).
   Ta có $\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \parallel HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC).$
   Vậy $HK \perp AC'$ (vì $AC' \subset (SAC)$). $(*)$
   Ta lại có $AB = SA \Rightarrow \triangle SAB$ vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB.
   Xét $\triangle SBD$ có HK là đường trung bình nên $HK = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2}$.
   Xét $\triangle ABC$ vuông tại B nên $AC = \dfrac{AB}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.
   Vì $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp AC'$ (vì $AC' \subset (AHK)$).
   Xét $\triangle SAC$ vuông tại A, ta có $\dfrac{1}{AC'^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{3}{4a^2} = \dfrac{7}{4a^2} \Rightarrow AC' = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$.
   Từ $(*)$ thì tứ giác $AHC'K$ có 2 đường chéo vuông góc nên $S_{AHC'K} = \dfrac{1}{2} \cdot AC' \cdot HK = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{7}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{7}}$.

□

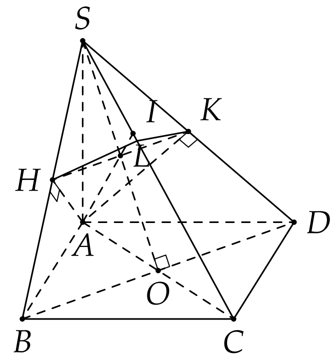
Bài 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $AB = SA = a$, SA vuông góc với đáy. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC, SD tại H, I, K.

1. Chứng minh $HK \parallel BD$.
2. Chứng minh $AH \perp SB$, $AK \perp SD$.
3. Chứng minh tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích $AHIK$ theo a.

Lời giải.

1.

Chứng minh $HK \parallel BD$.
Trong (SAC), gọi $L = AI \cap SO$.
Vì $\begin{cases} BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \\ (P) \perp SC \end{cases}$ nên $BD \parallel (P)$.
Ta có $\begin{cases} L \in (P) \cap (SBD) \\ BD \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBD) = HK$, HK đi qua L và $HK \parallel BD$.



2. Chứng minh $AH \perp SB$, $AK \perp SD$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.
Theo chứng minh trên, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \,(\text{vì } BC \perp (SAB)) \\ AH \perp SC \,(\text{vì } SC \perp (P)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$.
Tương tự ta chứng minh được $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SD$.

3. Chứng minh tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích $AHIK$ theo a.
Do $BD \perp (SAC)$ và $BD \parallel HK$ suy ra $HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI$ (vì $AI \subset (SAC)$).
Trong $\triangle SAC$ có AI là đường cao, ta có $AI \cdot SC = SA \cdot AC \Rightarrow AI = \dfrac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên H là trung điểm của BC, suy ra $HK = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $S_{AHIK} = \dfrac{1}{2} \cdot AI \cdot HK = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

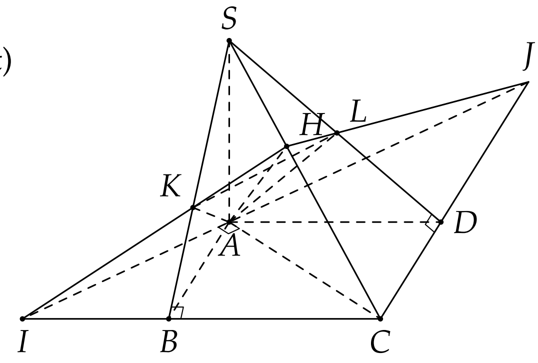
□

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

1. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.
2. Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB, CD tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, K và L là giao điểm của SB, SD với (HIJ). Chứng minh $AK \perp (SBC)$ và $AL \perp (SCD)$.
3. Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

Lời giải.

1.



Chứng minh $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

• Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (vì } ABCD \text{ là hình chữ nhật)} \\ BC \perp SB \text{ (vì } \triangle SBC \text{ vuông tại } B) \\ AB, SB \subset (SAB),\ AB \cap SB = B \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Vậy $(SAB) \perp (ABCD)$ (vì $BC \subset (ABCD)$) $(*)$

Chứng minh tương tự thì $CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow (SAD) \perp (ABCD)$. $(**)$

Ta có $(SAB) \cap (SAD) = SA$. $(***)$

Từ $(*)$, $(**)$ và $(***)$ suy ra $SA \perp (ABCD)$.

• Xét $\triangle SAD$ vuông tại A, ta có $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a\sqrt{2}$.

2. Chứng minh $AK \perp (SBC)$ và $AL \perp (SCD)$.

   Ta có $(HIJ) \cap (SBC) = IH$.

   Gọi $K = SB \cap IH \Rightarrow K = SB \cap (HIJ)$.

   $(HIJ) \cap (SCD) = JH$, gọi $L = SD \cap JH \Rightarrow L = SD \cap (HIJ)$.

   • Chứng minh $AK \perp (SBC)$.

   $\begin{cases} IA \perp AC \text{ (giả thiết)} \\ IA \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD),\ IA \subset (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow IA \perp (SAC) \Rightarrow IA \perp SC \qquad (1)$

   $\begin{cases} SC \perp AH \text{ (giả thiết)} \\ SC \perp IA \text{ (do (1))} \end{cases} \Rightarrow SC \perp (P);\ \begin{cases} SC \perp (P) \\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (SBC).$

   $\begin{cases} (P) \cap (SAB) = AK \\ (P) \perp (SBC) \\ (SAB) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC).$

   • Chứng minh hoàn toàn tương tự $AL \perp (SCD)$.

3. Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

   Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có đường cao AK nên $AK = \dfrac{AB \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

   Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có đường cai AL nên $AL = \dfrac{AD \cdot AS}{SD} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

   Xét $\triangle SAC$ vuông tại A Có đường cao AH nên $AH = \dfrac{AC \cdot SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

   Vì $AK \perp (SBC)$ nên $AK \perp KH$.

   Xét $\triangle AKH$ vuông tại K nên $KH = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

   Vì $AL \perp (SCD)$ nên $AL \perp LH$.

   Xét $\triangle ALH$ vuông tại L nên $LH = \sqrt{AH^2 - AL^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$.

   $S_{AKHL} = S_{\triangle AKH} + S_{\triangle ALH} = \dfrac{1}{2} AK \cdot HK + \dfrac{1}{2} AL \cdot HL = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right) = \dfrac{8a^2}{15}$.

□

Bài 2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. Tóm tắt lý thuyết

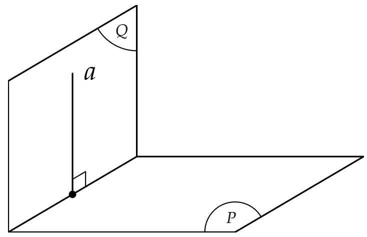
1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

2. Các định lí và hệ quả

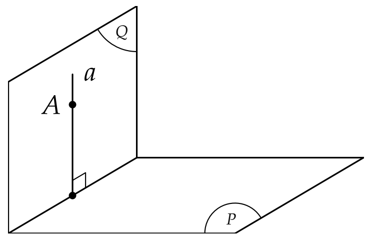
Định lí 1.
Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt thẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



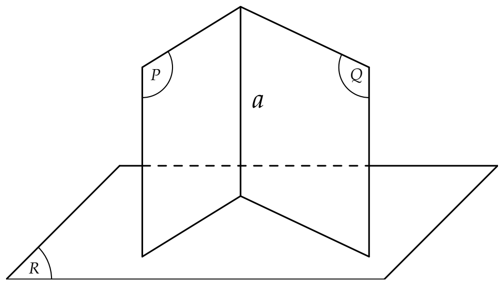
Hệ quả 1.
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (Q) thì đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với (P) sẽ nằm trong (Q).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (Q) \\ A \in a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \subset (Q).$$



Định lí 2.
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R).$$



3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Định nghĩa 2. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

1. Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác, ...

2. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều. Ta có các loại lăng trụ đều như hình lăng trụ tam giác đều, hình lăng trụ tứ giác đều, hình lăng trụ ngũ giác đều ...

   (a) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

   (b) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.

   (c) Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là hình lập phương.

4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa 3. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

!

1. Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
2. Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa 4. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

B. Bài tập rèn luyện

DẠNG 2.1. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Cách 1. Ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
Cách 2. Ta chứng minh góc giữa chúng bằng 90°.

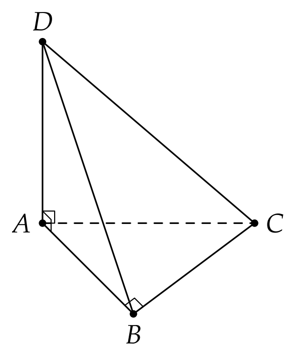
Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông tại B và $AD \perp (ABC)$. Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (vì } \triangle ABC \text{ vuông tại } B) \\ BC \perp DA \text{ (vì } AD \perp (ABC)) \\ AB \subset (ABD) \\ AD \subset (ABD). \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (ABD)$.

Mà $BC \subset (BCD)$ nên $(BCD) \perp (ABD)$.



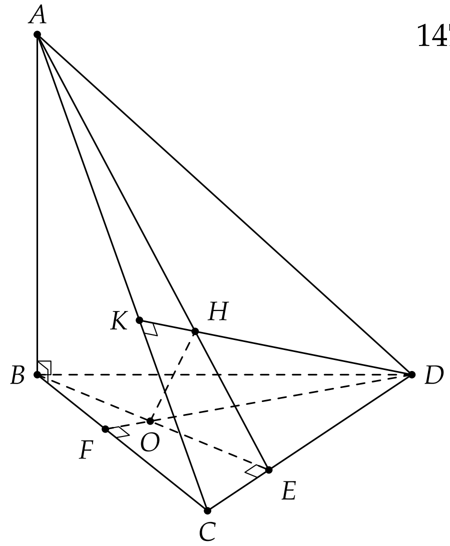
□

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ $DK \perp AC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

1. Chứng minh $(ACD) \perp (ABE)$ và $(ACD) \perp (DFK)$.
2. Chứng minh $OH \perp (ACD)$.

Lời giải.

1. Ta có $\begin{cases} CD \perp BE \text{ (giả thiết)} \\ CD \perp AB \text{ (vì } AB \perp (BCD)) \\ BE, AB \subset (ABE). \end{cases}$



$\Rightarrow CD \perp (ABE)$.
Mà $CD \subset (ACD)$ nên $(ACD) \perp (ABE)$.

Ta có $\begin{cases} DF \perp BC \text{ (giả thiết)} \\ DF \perp AB \text{ (vì } AB \perp (BCD)) \\ BC, AB \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow DF \perp (ABC)$.
Mà $AC \subset (ABC)$ nên $DF \perp AC$. (1)

Ta có $\begin{cases} AC \perp DF \text{ (do (1))} \\ AC \perp DK \text{ (giả thiết)} \Rightarrow AC \perp (DFK). \\ DF, DK \subset (DFK). \end{cases}$

Mà $AC \subset (ACD)$ nên $(ACD) \perp (DFK)$.

2. Ta có $CD \perp (ABE)$ và $OH \subset (ABE)$ nên $CD \perp OH$. (2)
Ta có $AC \perp (DKF)$ và $OH \subset (DKF)$ nên $AC \perp OH$. (3)

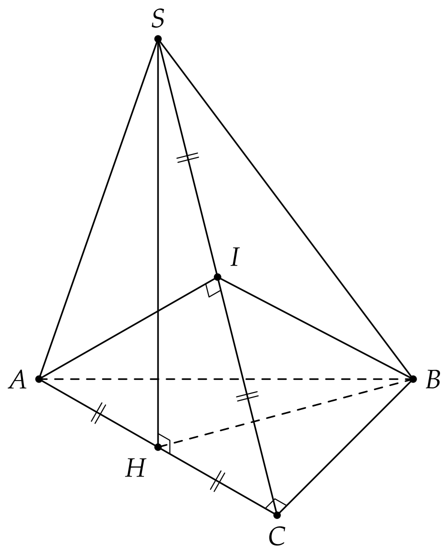
Từ (2) và (3) ta có $\begin{cases} OH \perp CD \\ OH \perp AC \\ CD, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.

□

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

1. Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$.
2. Chứng minh $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải.



1. Gọi H là trung điểm của AC.

Ta có $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ AC \perp SH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \text{ (giả thiết)} \\ BC \perp SH \text{ (vì } SH \perp (ABC)) \\ AC, SH \subset (SAC). \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAC)$.
Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAC)$.

2. Ta có $\begin{cases} AI \perp SC \text{ (giả thiết)} \\ AI \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAC)) \\ SC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC)$.

Mà $AI \subset (ABI)$ nên $(ABI) \perp (SBC)$.

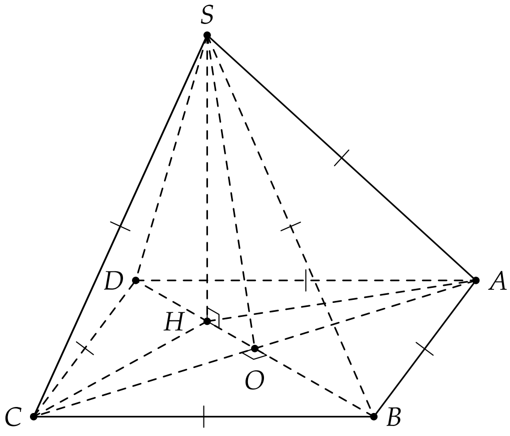
□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $SA = SB = SC = a$.

1. Chứng minh $(SBD) \perp (ABCD)$.
2. Chứng minh tam giác SBD vuông.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$.
Suy ra H nằm trên đường trung trực của đoạn AC. Vậy $H \in BD$.



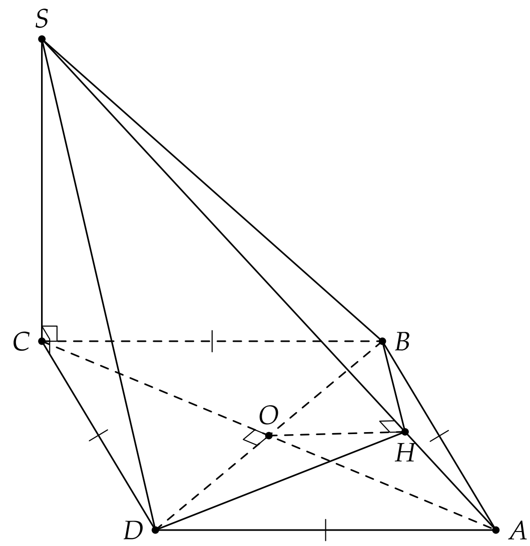
1. $\begin{cases} AC \perp BD \text{ (vì } ABCD \text{ là hình thoi)} \\ AC \perp SO \text{ (}\triangle SAC \text{ cân tại } S\text{)} \\ BD, SO \subset (SBD). \end{cases}$
   $\Rightarrow AC \perp (SBD)$.
   Mà $AC \subset (ABCD)$ nên $(ABCD) \perp (SBD)$.

2. Ta có $\triangle SAC = \triangle BAC = \triangle DAC$ (c.c.c)
   Suy ra ba đường trung tuyến xuất phát từ 3 đỉnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau, nghĩa là $SO = BO = DO$.
   Trong $\triangle SBD$ có SO là trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}BD$.
   $\Rightarrow \triangle SBD$ vuông tại S.

□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, có cạnh bằng a và đường chéo $BD = a$, $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$.

Lời giải.
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SA$ tại H.

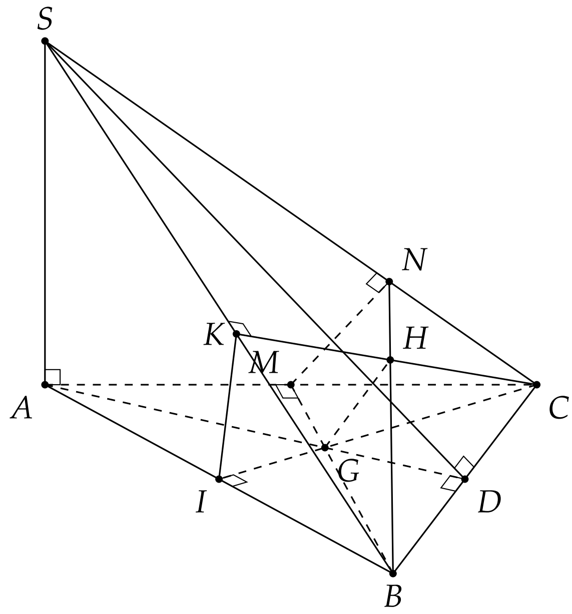


Ta có $\triangle ABD$ đều nên $AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.
Trong $\triangle SAC$ có $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.
Ta có $\triangle AHO \backsim \triangle ACS$ (g.g)
$$\Rightarrow \frac{HO}{CS} = \frac{AO}{AS} \Rightarrow HO = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{2}.$$
$\triangle HBD$ có HO là đường trung tuyến và $HO = \frac{1}{2}BD$.
$\Rightarrow \triangle HBD$ vuông tại H.
$\begin{cases} BD \perp AC \text{ (vì } ABCD \text{ là hình thoi)} \\ BD \perp SC \text{ (}SC \perp (ABCD)\text{)} \\ AC, SC \subset (SAC) \end{cases}$
$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$.
Có $\begin{cases} SA \perp BD, SA \perp OH \\ BD, OH \subset (BDH) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BDH) \Rightarrow \begin{cases} BH \perp SA \\ DH \perp SA. \end{cases}$
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là $\widehat{BHD}$.
Theo chứng minh trên ta có $\widehat{BHD} = 90^\circ \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$. □

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Trên đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC)$ tại A lấy điểm S. Gọi D là trung điểm của BC.

1. Chứng minh $(SAD) \perp (SBC)$.
2. Kẻ $CI \perp AB$, $CK \perp SB$. Chứng minh $SB \perp (ICK)$.
3. Kẻ $BM \perp AC$, $MN \perp SC$. Chứng minh $SC \perp BN$.
4. Chứng minh $(CIK) \perp (SBC)$ và $(BMN) \perp (SBC)$.
5. MB cắt CI tại G, CK cắt BN tại H. Chứng minh $GH \perp (SBC)$.

Lời giải.



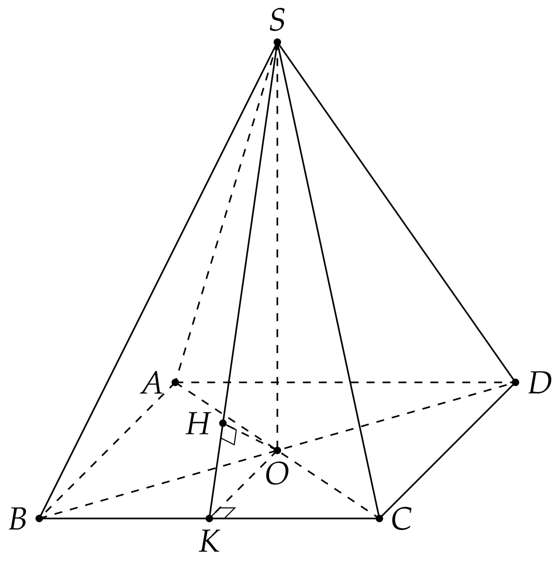
1. Chứng minh $(SAD) \perp (SBC)$.
   Vì $\triangle ABC$ đều nên $AD \perp BC$
   Ta có $\begin{cases} BC \perp AD, BC \perp SA \\ AD, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD)$.
   Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$.
2. Chứng minh $SB \perp (ICK)$.
   Ta có $\begin{cases} CI \perp AB, CI \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB). \end{cases}$
   $\Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB$.
   Do đó $\begin{cases} SB \perp CK, SB \perp CI \\ CK, CI \subset (CIK) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CIK)$.
3. Chứng minh $SC \perp BN$.
   Ta có $\begin{cases} BM \perp AC, BM \perp SA \\ AC, SA \subset (SAC). \end{cases}$
   $\Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp SC$.
   Do đó $\begin{cases} SC \perp MN, SC \perp BM \\ MN, BM \subset (BMN). \end{cases}$
   $\Rightarrow SC \perp (BMN) \Rightarrow SC \perp BN$.
4. Chứng minh $(CIK) \perp (SBC)$ và $(BMN) \perp (SBC)$.
   Ta có $SB \perp (CIK)$, mà $SB \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (CIK)$.
   Lại có $SC \perp (BMN)$, mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (BMN)$.
5. Chứng minh $GH \perp (SBC)$.
   Ta có $\begin{cases} (CIK) \perp (SBC) \\ (BMN) \perp (SBC) \\ (CIK) \cap (BMN) = HG \end{cases} \Rightarrow HG \perp (SBC)$.

□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $ABCD$.

1. Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
2. Từ O kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh $BC \perp (SOK)$.
3. Chứng minh $(SBC) \perp (SOK)$.
4. Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh $OH \perp (SBC)$.

Lời giải.



1. Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
   Ta có $\begin{cases}(SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO.\end{cases}$
   $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
   Có $\begin{cases}AC \perp BD & \text{(vì } ABCD \text{ là hình thoi)} \\ AC \perp SO & \text{(vì } SO \perp (ABCD)) \\ BD, SO \subset (SBD).\end{cases}$
   $\Rightarrow AC \perp (SBD)$.
   Mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

2. Chứng minh $BC \perp (SOK)$.
   Ta có $\begin{cases}BC \perp OK \\ BC \perp SO & \text{(vì } SO \perp (ABCD)) \\ OK, SO \subset (SOK).\end{cases}$
   $\Rightarrow BC \perp (SOK)$.

3. Chứng minh $(SBC) \perp (SOK)$.
   Ta có $\begin{cases}BC \perp (SOK) \\ BC \subset (SBC)\end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SOK)$.

4. Chứng minh $OH \perp (SBC)$.
   Ta có $\begin{cases}OH \perp SK \\ OH \perp BC & \text{(vì } BC \perp (SOK)) \\ SK, BC \subset (SBC)\end{cases} \Rightarrow$
   $OH \perp (SBC)$.

□

Bài 8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là điểm trong không gian sao cho tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC.

1. Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$.

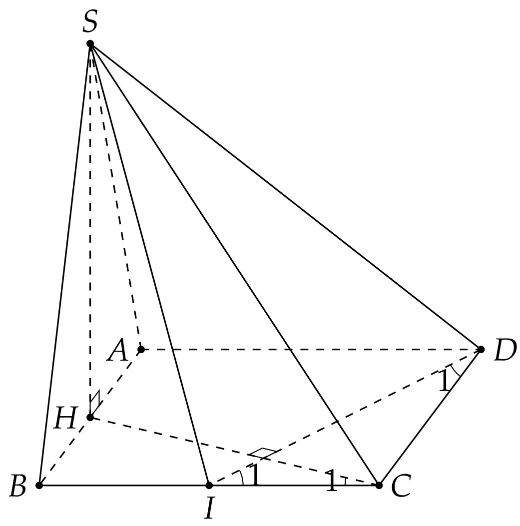
2. Chứng minh $(SHC) \perp (SDI)$.

Lời giải.

Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Có $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB\end{cases}$

1. Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$ và $(SAB) \perp (SBC)$.
   Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \\ AB, SH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.
   Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$.
   Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $(SAB) \perp (SBC)$.



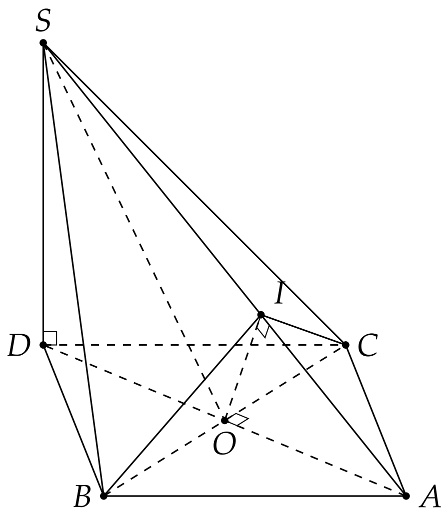
2. Chứng minh $(SHC) \perp (SDI)$.
   Có $\triangle BCH = \triangle CDI$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1$.
   Mà $\widehat{D}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ$. Do đó $HC \perp DI$.
   Ta có $\begin{cases} DI \perp CH \\ DI \perp SH \\ CH, SH \subset (SHC) \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SHC)$.
   Mà $DI \subset (SDI) \Rightarrow (SDI) \perp (SHC)$.

□

Bài 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh

1. $(SBC) \perp (SAD)$.
2. $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải.



1. Chứng minh $(SBC) \perp (SAD)$.
   Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD)$.
   Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAD)$.

2. Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$.
   Gọi $O = AC \cap BD$. Dựng $OI \perp SA$ tại I.
   Ta có $\begin{cases} SA \perp OI \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (IBC)$.
   Suy ra $\begin{cases} SA \perp IB \\ SA \perp IC \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = (BI, CI)$.
   Ta có $\triangle AIO \backsim \triangle ADS$ (g-g).
   Suy ra $\dfrac{OI}{DS} = \dfrac{AO}{AS} \Rightarrow OI = \dfrac{AO \cdot DS}{AS}$. (1)
   Trong đó

$$SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

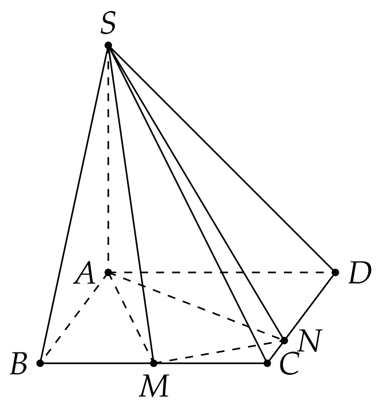
$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = a\sqrt{3}.$$

$$SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào (1), ta có $OI = \frac{a}{2}$.
Xét tam giác BIC có $OI = \frac{BC}{2}$ nên tam giác BIC vuông tại I. Hay $\widehat{BIC} = 90^\circ$.
Do đó $((SAB), (SAC)) = 90^\circ$.
Vậy $(SAB) \perp (SAC)$. □

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh $(SAM) \perp (SMN)$.

Lời giải.



Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông ABM, CMN, ADN. Ta có

$$\begin{cases} AM^2 = AB^2 + BM^2 = \dfrac{5a^2}{4} \\ MN^2 = CM^2 + CN^2 = \dfrac{5a^2}{16} \\ AN^2 = AD^2 + DN^2 = \dfrac{25a^2}{16} \end{cases} \Rightarrow AM^2 + MN^2 = AN^2.$$

Suy ra tam giác AMN vuông tại M.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AM \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAM)$.

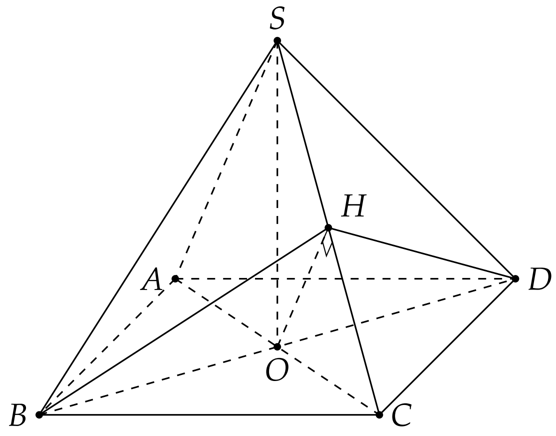
Mà $MN \subset (SMN)$ nên $(SAM) \perp (SMN)$.

□

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $SB = SD = a$, $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy

1. Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.
2. Chứng minh $(SBC) \perp (SCD)$.

Lời giải.



1. Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.
   Ta có $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
   $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.
   Tam giác SAC có trung tuyến $SO = \dfrac{1}{2}AC$, nên tam giác SAC vuông tại S.
2. Chứng minh $(SBC) \perp (SCD)$.
   Kẻ $OH \perp SC$ tại H, ta có $OH \parallel SA$, suy ra H là trung điểm của SC.
   Ta có tam giác BSC cân tại B nên $BH \perp SC$.
   Tam giác DSC cân tại D nên $DH \perp SC$.
   Do đó $((SBC),(SCD)) = (BH, DH)$.
   Xét tam giác SOC vuông tại O có
   $$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{OS \cdot OC}{\sqrt{OS^2 + OC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$
   Xét tam giác BHD có HO là đường trung tuyến và $HO = \dfrac{BD}{2}$ nên tam giác BHD vuông tại H.
   Suy ra $((SBC),(SCD)) = \widehat{BHD} = 90^\circ$.
   Vậy $(SBC) \perp (SCD)$.

□

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy là hình vuông $ABCD$. Gọi O là tâm của đáy, vẽ CI vuông góc với SO tại I, vẽ DH vuông góc với SB tại H. Chứng minh rằng

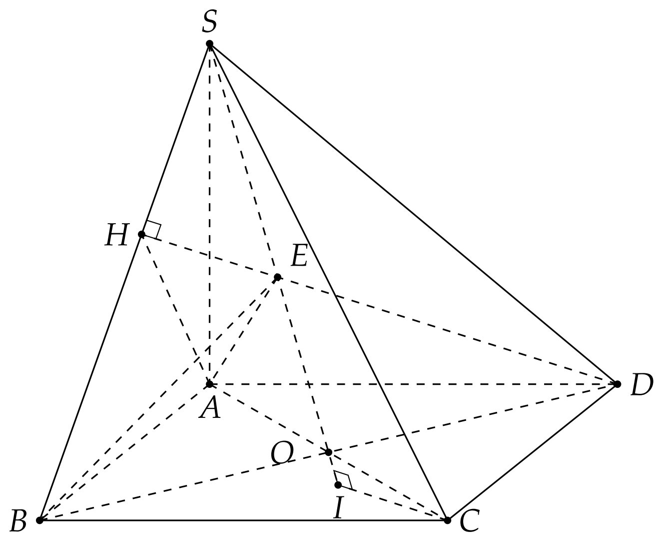
1. $(SAB) \perp (ADH)$.
2. $CI \perp (SBD)$.
3. $(ABE) \perp (SCD)$, với E là giao điểm của SO và DH.

Lời giải.

1. Chứng minh $(SAB) \perp (ADH)$.
   Có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.
   Có $\begin{cases} SB \perp DH \\ SB \perp AD \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ADH)$.
   Mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ADH)$.

2. Chứng minh $CI \perp (SBD)$.
   Có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CI$.
   Có $\begin{cases} CI \perp SO \\ CI \perp BD \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SBD)$.

3. Chứng minh $(ABE) \perp (SCD)$.
   Có $\begin{cases} SD \perp BE \\ SD \perp AB \end{cases} \Rightarrow SD \perp (ABE)$.
   Mà $SD \subset (SCD) \Rightarrow (ABE) \perp (SCD)$.



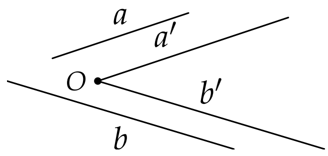
□

Bài 3. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. Tóm tắt lý thuyết

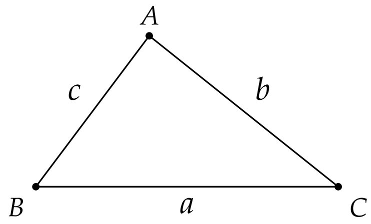
1. Cách xác định góc giữa hai đường thẳng

1. Chọn điểm O tùy ý.
2. Qua O kẻ hai đường thẳng a', b' sao cho $a' \parallel a$, $b' \parallel b$.
3. Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b chính bằng góc giữa hai đường thẳng a', b'.



2. Các phương pháp tính góc

1. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác.
   Xét $\triangle ABC$, đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Ta có
   (a) Định lí sin $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.
   (b) Định lí cos $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.



2. Tính theo véc-tơ chỉ phương
   Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a và b. Nếu đường thẳng a, b có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ thì $\cos\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2\right|}{\left|\overrightarrow{u}_1\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}_2\right|}$.
   Chú ý: $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.
3. $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
4. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng là $\varphi = 0^\circ$.

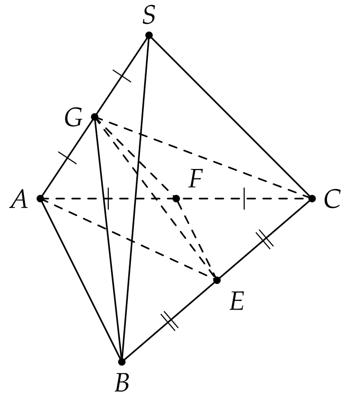
B. Bài tập rèn luyện

DẠNG 3.1. Tính góc giữa hai đường thẳng

Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:
Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: $a' \parallel a$ và $b' \parallel b$. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b'.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải.



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, SA.
Ta có $EF \parallel AB$, $FG \parallel SC$
$\Rightarrow \widehat{(SC, AB)} = \widehat{(EF, FG)} = \widehat{EFG}$.
Ta có $FE = FG = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.
$\triangle BAG = \triangle CAG$(c.g.c) $\Rightarrow GB = GC$.
Tam giác GBC cân tại G có GE là trung tuyến nên GE là đường cao.

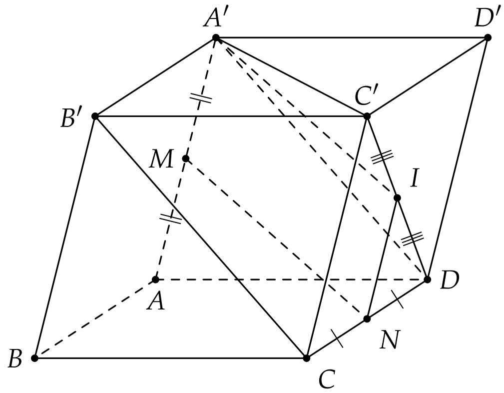
$$GE = \sqrt{BG^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Tam giác EFG đều vì có 3 cạnh bằng nhau.
Vậy $\widehat{EFG} = 60^\circ$.

□

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$ và $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Chứng minh MN song song với mặt phẳng $(A'C'D)$ và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và $B'C$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của DC'.
Trong tam giác CDC' có NI là đường trung bình của tam giác, nên $\begin{cases} NI \parallel CC' \\ NI = \frac{1}{2}CC'. \end{cases}$

Mà $\begin{cases} CC' \parallel AA' \\ CC' = AA' \end{cases}$ (tính chất hình hộp)

$\Rightarrow \begin{cases} NI \parallel AA' \\ NI = \frac{1}{2}AA'. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} NI \parallel MA' \\ NI = MA'. \end{cases}$

Vậy tứ giác $MNIA'$ là hình bình hành nên $MN \parallel IA'$.
Mà $IA' \subset (A'C'D) \Rightarrow MN \parallel (A'C'D)$.

Vì $\begin{cases} MN \parallel IA' \\ CB' \parallel DA' \end{cases} \Rightarrow \widehat{(CB', MN)} = \widehat{(DA', IA')} = \widehat{DA'I}$ hoặc $180^\circ - \widehat{DA'I}$.

Ta có tam giác DAA' đều nên $DA' = a$.
Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{ABC} = 120^\circ$; $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.
Tương tự, áp dụng định lý cosin cho $\triangle A'AB'$ ta có $AB' = a\sqrt{3}$.
Ta có $AC = A'C' = a\sqrt{3}$, $AB' = DC' = a\sqrt{3}$.
Trong $\triangle DA'C'$ có $A'I$ là đường trung tuyến:

$$IA'^2 = \frac{DA'^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{2} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow IA' = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Trong $\triangle A'DI$ ta có: $\cos \widehat{DA'I} = \dfrac{DA'^2 + IA'^2 - DI^2}{2 \cdot DA' \cdot IA'} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} > 0$.

Kết luận: $\cos\widehat{(MN, CB')} = \left|\cos \widehat{DA'I}\right| = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. □

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $CC' = m$ $(m > 0)$. Tìm m biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, kẻ $BD \parallel AB'(D \in A'B')$

$\Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = \widehat{(BD, BC')} = 60^\circ$.

Vậy $\widehat{DBC'} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{DBC'} = 120^\circ$.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $BB' \perp (A'B'C')$.

Áp dụng Pytago cho $\triangle BB'D$ vuông tại B ta có

$BD = \sqrt{DB'^2 + BB'^2} = \sqrt{1+m^2}$.

Áp dụng Pytago cho $\triangle BB'C'$ vuông tại B' ta có

$BC' = \sqrt{C'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{1+m^2}$.

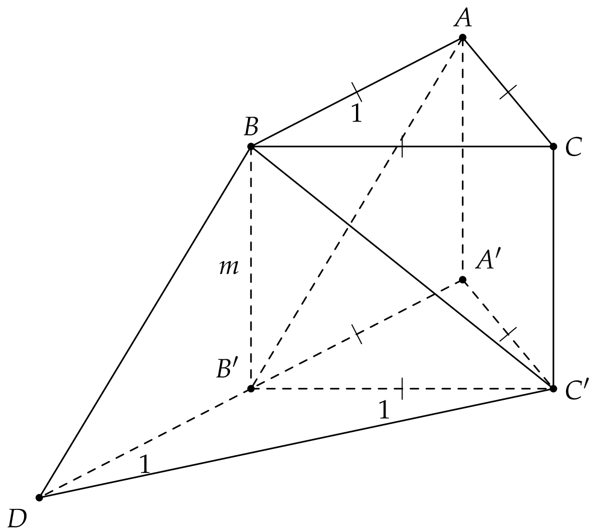
Áp dụng định lý cosin $\triangle DB'C'$ ta có

$DC'^2 = DB'^2 + C'B'^2 - 2DB' \cdot C'B' \cdot \cos 120^\circ = 3 \Rightarrow DC' = \sqrt{3}$.

Trường hợp 1: Nếu $\widehat{DBC'} = 60^\circ$ thì tam giác BDC' đều nên:

$BD = DC' \Leftrightarrow \sqrt{m^2+1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $\widehat{DBC'} = 120^\circ$ áp dụng định lý cosin cho $\triangle BDC'$. Suy ra $m = 0$ (loại).



□

Bài 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC, theo đề $A'H \perp (ABC)$.

Mà $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp (A'B'C')$.

Tam giác ABC vuông tại A ta có

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow BH = a$.

Ta có $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AA', B'C')} = \widehat{(BB', BC)} = \widehat{B'BH}$.

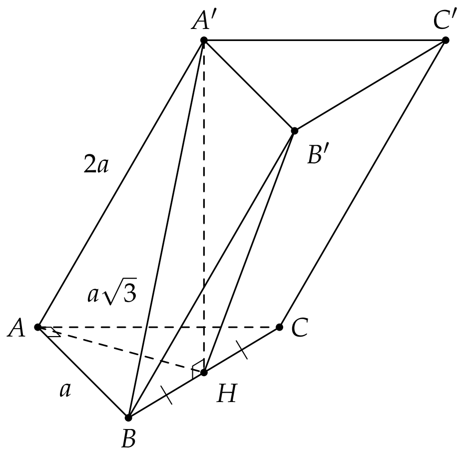
Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AH = \dfrac{BC}{2} = a$ nên

$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác $A'B'H$ vuông tại A' có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác $B'BH$ có:

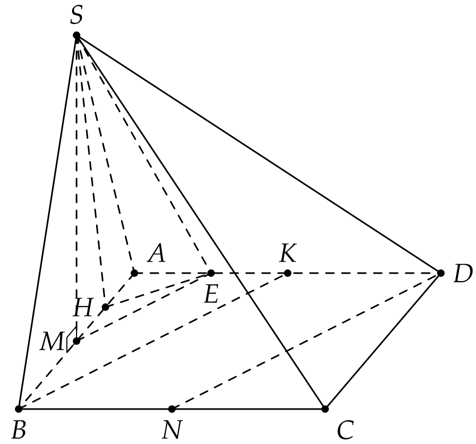
$\cos \widehat{B'BH} = \dfrac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2 \cdot BB' \cdot BH} = \dfrac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2 \cdot 2a \cdot a} = \dfrac{1}{4} > 0$ (thỏa).



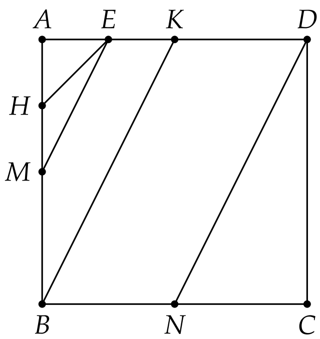
□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Lời giải.



Hạ $SH \perp AB$ tại H.
Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ có AB là giao tuyến nên $SH \perp (ABCD)$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ M kẻ $ME \parallel DN$ với E thuộc AD. Vậy góc giữa SM và DN chính là góc giữa SM và ME.
Xét tam giác SAB có $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$.
Vậy $\triangle SAB$ vuông tại S.
Và $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác SHA vuông tại H:
$HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}$.
Gọi K là trung điểm của AD ta có $ME \parallel BK \parallel DN$.
Do đó ME là đường trung bình tam giác ABK.



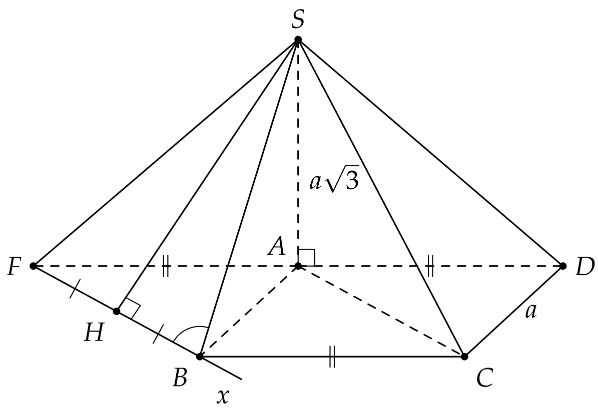
Vậy $AE = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a}{2}$; $ME = \dfrac{1}{2}BK = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Tam giác HAE vuông tại A có $HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tam giác SHE vuông tại H có $SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác SME có:

$$\cos\widehat{SME} = \dfrac{SM^2 + ME^2 - SE^2}{2 \cdot SM \cdot ME} = \dfrac{a^2 + \dfrac{5a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot a \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} > 0.$$

□

Bài 6. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Lời giải.



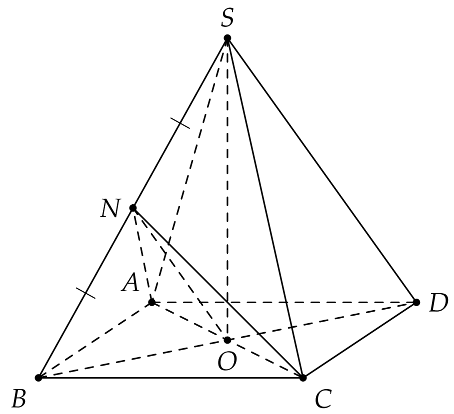
Qua B kẻ đường thẳng Bx song song AC. Bx cắt AD tại F.
Góc giữa AC và SB, chính là góc giữa Bx và SB.
Ta có $AFBC$ là hình bình hành, nên $AF = BC$ và $AC = FB$.
Suy ra $SF = SB$, tam giác SBF cân tại S.
Có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$; $FB = AC = a\sqrt{2}$.
Hạ $SH \perp FB$ tại H thì H là trung điểm FB.

Khi đó $\cos\widehat{SBF} = \dfrac{HB}{SB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN, AN và SD.

Lời giải.



Theo đề bài $SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = a$.

Gọi $O = AC \cap BD$, có $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle SAB$ đều), $CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle SBC$ đều).

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANC ta có $\cos\widehat{ANC} = \dfrac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2 \cdot AN \cdot CN} = -\dfrac{1}{3} < 0 \Rightarrow \widehat{ANC} = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Trong tam giác BDS có ON là đường trung bình của tam giác nên

$\widehat{(AN, SD)} = \widehat{(AN, NO)} = \widehat{ANO}$.

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ANO$ ta có

$\cos\widehat{ANO} = \dfrac{AN^2 + ON^2 - AO^2}{2 \cdot AN \cdot ON} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ANO} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

□

Bài 4. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

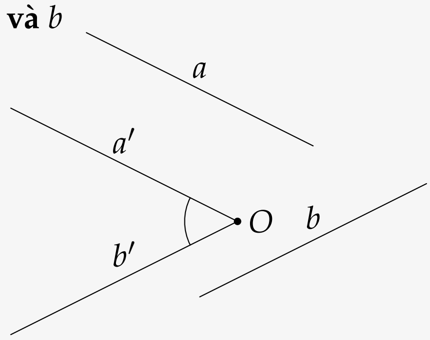
A. Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa 1. Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng trong không gian
Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

B. Bài tập rèn luyện

DẠNG 4.1. Tính góc giữa hai đường thẳng

Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b
Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua $O : a' \parallel a$ và $b' \parallel b$.

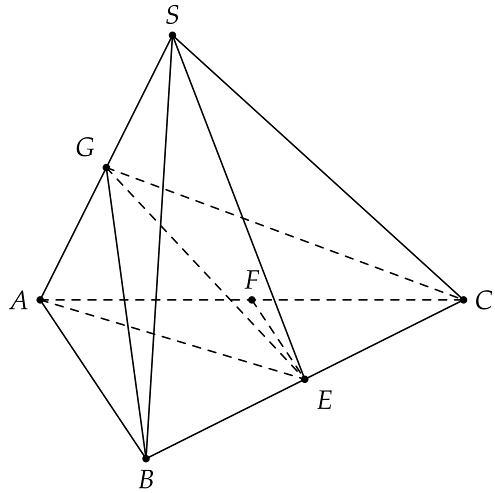


1. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác.
   Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.
   Định lý cô-sin: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
   Trong đó: a, b, c là 3 cạnh; A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$.
2. Tính góc theo véc-tơ chỉ phương: $\cos \varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.
   Chú ý: $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.
3. $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
4. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^\circ$.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải.

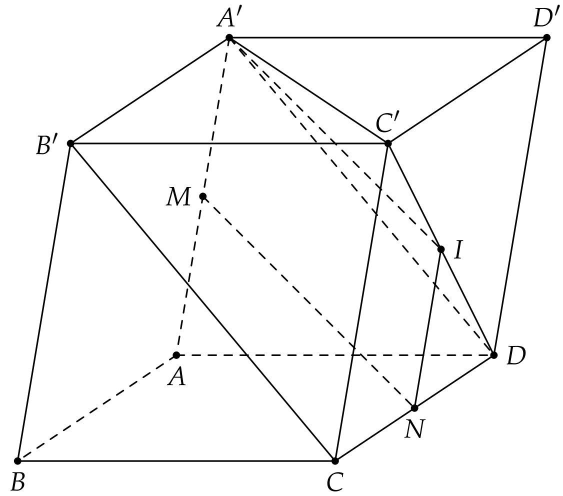
Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, SA.
Ta có: $EF \parallel AB, FG \parallel SC$
$\Rightarrow \left[\widehat{SC, AB}\right] = \left[\widehat{EF, FG}\right] = \widehat{EFG}$.
Ta có $FE = FG = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}$.
$\triangle BAG = \triangle CAG$ (c.g.c) $\Rightarrow GB = GC$.
Tam giác GBC cân tại G có GE là đường cao.
$GE = \sqrt{BG^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{2}$.
Tam giác EFG đều vì có 3 cạnh bằng nhau.
Vậy $\widehat{EFG} = 60^\circ$.



□

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$ và $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Chứng minh $MN \parallel (A'C'D)$ và tính cô-sin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và $B'C$.

Lời giải.
Gọi I là trung điểm của DC'.
Trong tam giác CDC' có NI là đường trung bình của tam giác
nên $\begin{cases} NI \parallel CC' \\ NI = \dfrac{1}{2}CC' \end{cases}$.
Mà $\begin{cases} CC' \parallel AA' \\ CC' = AA' \end{cases}$ (Tính chất hình hộp)
$\Rightarrow \begin{cases} NI \parallel AA' \\ NI = \dfrac{1}{2}AA' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} NI \parallel MA' \\ NI = MA' \end{cases}$.
Vậy tứ giác $MNIA'$ là hình bình hành nên $MN \parallel IA'$.



Mà $IA' \subset (A'C'D) \Rightarrow MN \parallel (A'C'D)$.
Vì $\begin{cases} MN \parallel IA' \\ CB' \parallel DA' \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{CB', MN}\right] = \left[\widehat{DA', IA'}\right] = \widehat{DA'I}$ hoặc $180^\circ - \widehat{DA'I}$.
Ta có tam giác DAA' đều nên $DA' = a$.
Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{ABC} = 120^\circ$; $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.
Tương tự, áp dụng định lý cô-sin cho $\triangle A'AB' : AB' = a\sqrt{3}$.
Ta có $AC = A'C' = a, AB' = DC' = a\sqrt{3}$.
Trong $\triangle DA'C'$ có $A'I$ là đường trung tuyến:
$IA' = \dfrac{DA'^2 + A'C'^2}{2} - \dfrac{DC'^2}{4} = \dfrac{a^2 + 3a^2}{2} - \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow IA' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Trong $\triangle A'DI$ ta có: $\cos \widehat{DA'I} = \dfrac{DA'^2 + IA'^2 - DI^2}{2 \cdot DA' \cdot IA'} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} > 0$.
Kết luận: $\cos \left[\widehat{MN, CB'}\right] = \left|\cos \widehat{DA'I}\right| = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$. □

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1, CC' = m (m > 0)$. Tìm m biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60°.

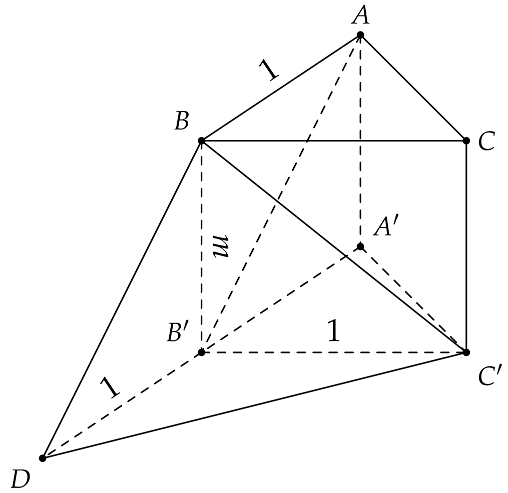
Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, kẻ $BD \parallel AB'(D \in A'B)$
$\Rightarrow \left[\widehat{AB', BC'}\right] = \left[\widehat{BD, BC'}\right] = 60^\circ$.
Vậy: $\widehat{BDC'} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{DBC'} = 120^\circ$.
Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $BB' \perp (A'B'C')$.
Áp dụng Py-ta-go cho $\triangle BB'D$ vuông tại B:

$$BD = \sqrt{DB'^2 + BB'^2} = \sqrt{1+m^2}.$$

Áp dụng Py-ta-go cho $\triangle BB'C'$ vuông tại B':

$$BC' = \sqrt{C'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{1+m^2}.$$



Áp dụng Cô-sin cho $\triangle DB'C'$:

$$DC'^2 = DB'^2 + C'B'^2 - 2DB' \cdot C'B' \cdot \cos 120^\circ = 3 \Rightarrow DC' = \sqrt{3}.$$

Trường hợp 1: Nếu $\widehat{BDC'} = 60^\circ$ thì tam giác BDC' đều nên:

$$BD = DC' \Leftrightarrow \sqrt{m^2+1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\widehat{BDC'} = 120^\circ$, áp dụng định lý cô-sin cho $\triangle BDC'$ suy ra $m = 0$ (loại).
□

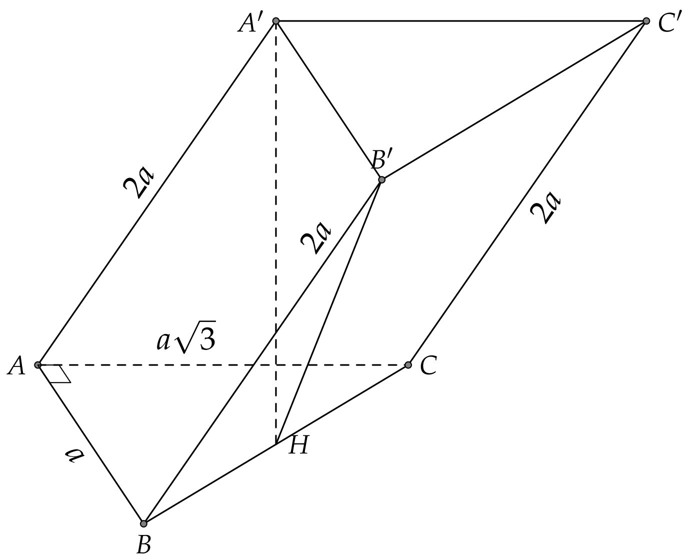
Bài 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$.

Lời giải.
Gọi H là trung điểm BC, theo đề bài $A'H \perp (ABC)$.
Mà $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow A'H \perp (A'B'C')$.
Tam giác ABC vuông tại A:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow BH = a.$$

Ta có: $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ B'C' \parallel BC \end{cases}$
$\Rightarrow \left(\widehat{AA', B'C'}\right) = \left(\widehat{BB', BC}\right) = \widehat{B'BH}$.
Trong tam giác $A'B'H$ vuông tại A' có:

$$HB' = \sqrt{A'B^2 + A'H^2} = 2a.$$



Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác $B'BH$ có:

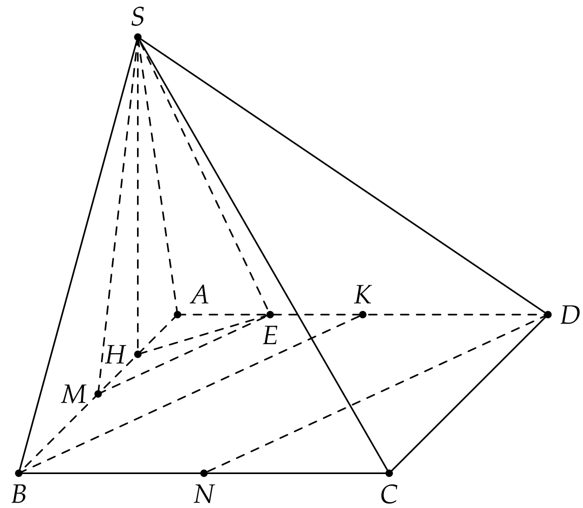
$$\cos\widehat{B'BH} = \frac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2 \cdot BB' \cdot BH} = \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2 \cdot 2a \cdot a} = \frac{1}{4} > 0 \text{ thỏa.}$$

□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Lời giải.

Hạ $SH \perp AB$ tại H.
Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ có AB là giao tuyến.
Suy ra: $SH \perp (ABCD)$.

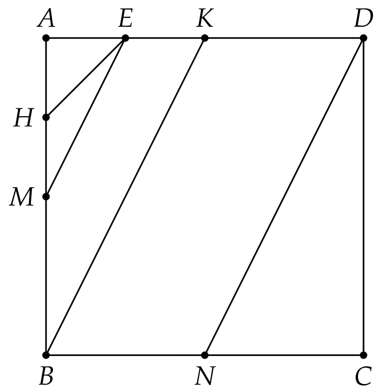


Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ M kẻ $ME \parallel DN$ với E thuộc AD. Vậy góc giữa SM và DN chính là góc giữa SM và ME.
Xét tam giác SAB có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2.$$

Vậy $\triangle SAB$ vuông tại S.
Và: $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$
$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác SHA vuông tại H:

$$HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$



Gọi K là trung điểm của AD.
Ta có $ME \parallel BK \parallel DN$.
Suy ra ME là đường trung bình của tam giác ABK.
Vậy $AE = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a}{2}$;

$$ME = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Tam giác HAE vuông tại A:

$$HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác SHE vuông tại H:

$$SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác SME có:

$$\cos\widehat{SME} = \frac{SM^2 + ME^2 - SE^2}{2 \cdot SM \cdot ME} = \frac{a^2 + \dfrac{5a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}}{2 \cdot a \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0.$$

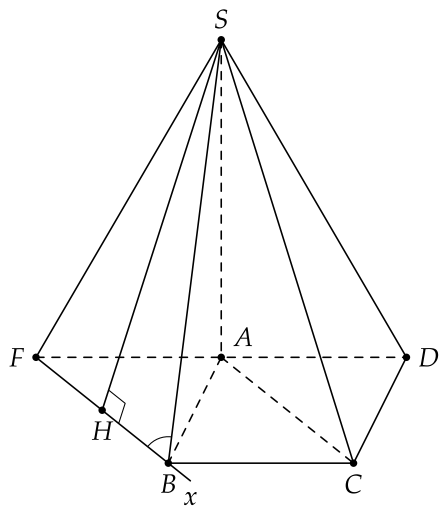
□

Bài 6. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

Lời giải.

Qua B kẻ đường thẳng Bx song song với AC. Bx cắt AD tại F.
Góc giữa AC và SB chính là góc giữa Bx và AC.
Ta có $AFBC$ là hình bình hành nên $AF = BC$ và $AC = FB$.
Suy ra $SF = SB$, tam giác SBF cân tại S.
Có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a, FB = AC = a\sqrt{2}$.
Hạ $SH \perp FB$, thì H là trung điểm FB.

$$\cos \widehat{SBF} = \frac{HB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



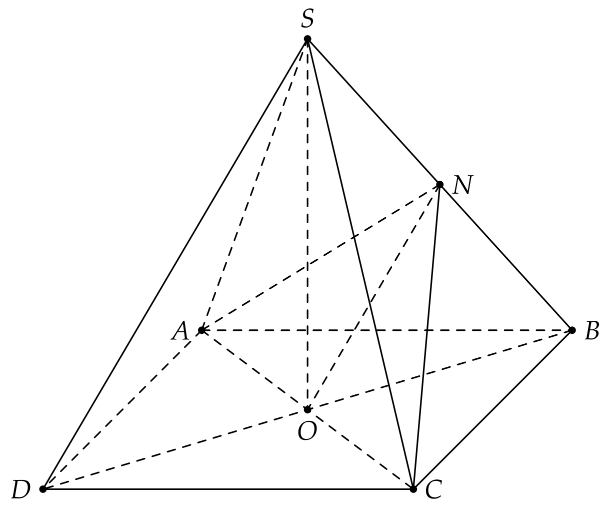
□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN, AN và SD.

Lời giải.
Theo đề bài: $SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = a$.
Gọi $O = AC \cap BD$ có $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle SAB$ đều).
$CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle SBC$ đều).
Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác ANC:

$$\cos \widehat{ANC} = \frac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2 \cdot AN \cdot CN} = -\frac{1}{3} < 0$$

$\Rightarrow \widehat{ANC} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.
Trong tam giác BDS có ON là đường trung bình của tam giác.
$\Rightarrow \left[\widehat{AN, SD}\right] = \left[\widehat{AN, NO}\right] = \widehat{ANO}$.
Áp dụng định lý cô-sin cho $\triangle ANO$:



$$\cos \widehat{ANO} = \frac{AN^2 + ON^2 - AO^2}{2 \cdot AN \cdot ON} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ANO} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

□

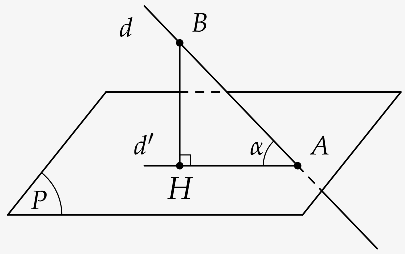
C. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P).
Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0° \leq \alpha \leq 90°$.

DẠNG 4.2. Xác định và tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

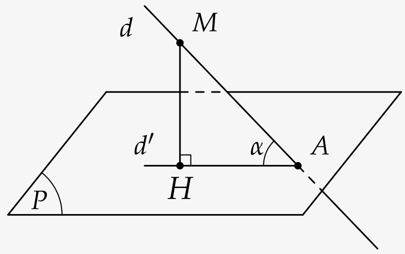
Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta làm như sau

- Tìm giao điểm A của d và (P).
- Trên d chọn điểm B khác A, dựng BH vuông góc (P) tại điểm H.



Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).
Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.
Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng $BH \perp (P)$) thì ta sử dụng công thức sau đây.
Gọi α là góc giữa d và (P), suy ra

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{d}(M,(P))}{AM}.$$



Ta phải chọn điểm M trên d mà có thể tính được khoảng cách đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và (P).

D. Bài tập rèn luyện

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa

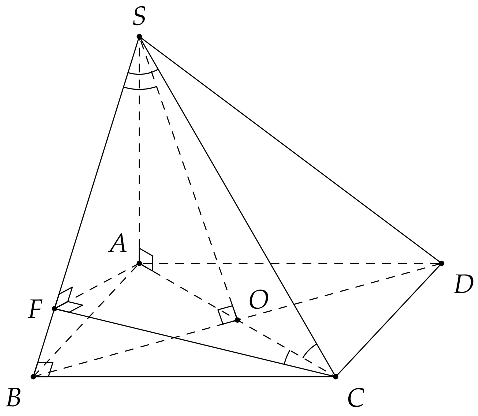
a) SC và $(ABCD)$.

b) SC và (SAB).

c) AC và (SBC).

d) SB và (SAC).

Lời giải.



1. AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.
   Do đó $(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.
   Xét tam giác vuông SAC, ta có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

   Suy ra $\widehat{SCA} = 60^\circ$.

2. Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$ nên $BC \perp (SAB)$.
   Suy ra SB là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB).
   Do đó $(SC,(SAB)) = (SB, SC) = \widehat{CSB}$.
   Xét tam giác vuông SBC, ta có

$$\tan\widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

   Suy ra $\widehat{CSB} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

3. Gọi F là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB.
   Ta có $\begin{cases} AF \perp SB \\ AF \perp BC \end{cases}$ nên $AF \perp (SBC)$.
   Suy ra FC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC).
   Do đó $(AC,(SBC)) = (AC, FC) = \widehat{ACF}$.
   Xét tam giác vuông SAB, ta có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Leftrightarrow AF = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

   Xét tam giác vuông ACF, ta có

$$\sin\widehat{ACF} = \frac{AF}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{42}}{7}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

   Suy ra $\widehat{ACF} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

4. Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases}$ nên $BO \perp (SAC)$.
   Suy ra SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC).
   Do đó $(SB,(SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.
   Xét tam giác vuông SAO, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{6a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}.$$

Xét tam giác vuông SBO, ta có

$$\tan\widehat{BSO} = \frac{OB}{OS} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

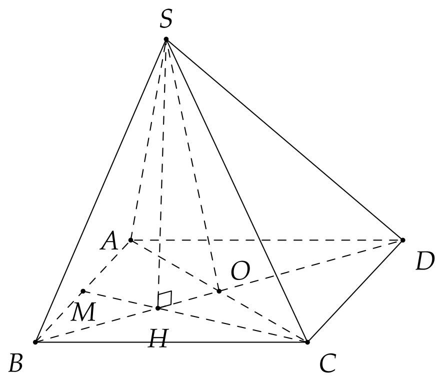
Suy ra $\widehat{BSO} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$.

□

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Biết $SD = a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.

1. Chứng minh (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC và SBD là tam giác vuông.
2. Xác định góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.



1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$. Theo đề bài $SA = SB = SC$ suy ra $HA = HB = HC$. Vậy H thuộc đường trung trực của đoạn AC hay H thuộc BD.
   Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SH\ (SH \subset (SBD)) \end{cases}$ nên $AC \perp (SBD)$. (1)
   Mặt khác, O là trung điểm của AC và là giao điểm của AC và (SBD). (2)
   Từ (1) và (2) suy ra (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC.
   Ta có $\triangle SAC = \triangle BAC$ (c.c.c) suy ra $BO = SO$.
   Trong tam giác SBD, $SO = \frac{1}{2}BD$ nên tam giác SBD vuông tại S.

2. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên HD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.
   Do đó $(SD, (ABCD)) = (SD, HD) = \widehat{SDH}$.
   Xét tam giác vuông SBD, ta có

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

   Xét tam giác vuông SHD, ta có

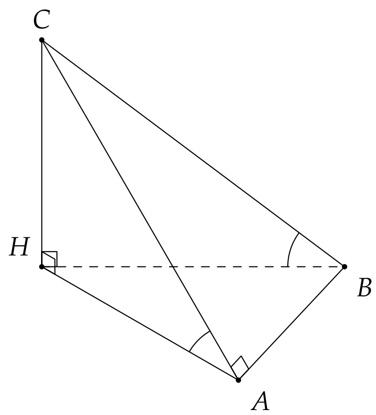
$$\sin\widehat{SDH} = \frac{SH}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Suy ra $\widehat{SDH} = 45^\circ$.

□

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và tạo với (P) một góc 60°. Tính góc giữa BC và (P).

Lời giải.



Xét tam giác vuông ABC, ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên (P).
Khi đó AH là hình chiếu vuông góc của AC lên (P).
Do đó, $(AC, (P)) = (AC, AH) = \widehat{CAH} = 60^\circ$.
Xét tam giác vuông CAH, ta có

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{CA} \Leftrightarrow CH = CA \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ta có BH là hình chiếu vuông góc của BC lên mặt phẳng (P).
Do đó, $(BC, (P)) = (BC, BH) = \widehat{CBH}$.

Xét tam giác vuông BHC, ta có

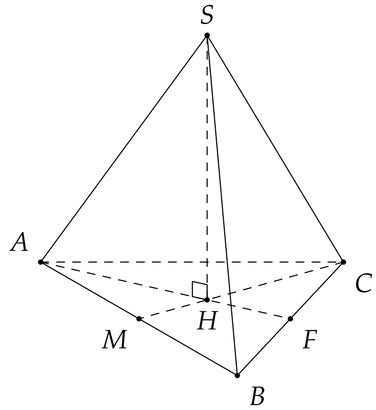
$$\sin \widehat{CBH} = \frac{CH}{CB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{CBH} = 45^\circ$. □

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

1. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Tính SH.
2. Tính góc giữa SA và (ABC).

Lời giải.



1. Ta có H là trọng tâm của tam giác đều ABC nên

$$AH = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác vuông SAH, ta có

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{3} - \frac{a^2}{3}} = a.$$

2. Ta có AH là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC).
Do đó, $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.
Xét tam giác vuông SAH, ta có

$$\tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

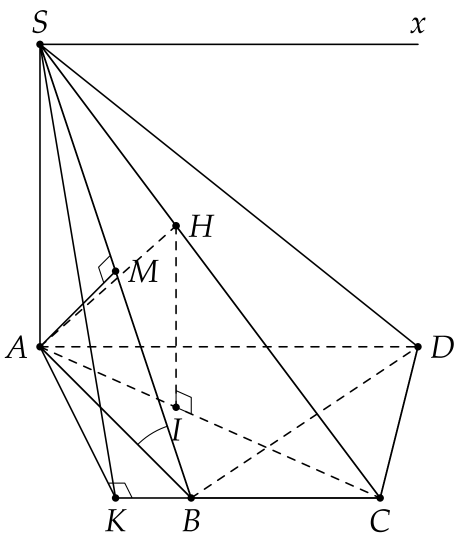
□

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD, $AB = BC = DC = a$, $DA = 2a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm SB. Góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45°. Tính góc:

a) $\left(\widehat{AM, (SBD)}\right)$; b) $\left(\widehat{AH, (ABCD)}\right)$; c) $\left(\widehat{(SAD), (SBC)}\right)$.

Lời giải.

1.



Theo đề bài $ABCD$ nửa lục giác đều, nên $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AD, có: $AC = BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB)$.

Vậy AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$, nên $\left(\widehat{SB, (ABCD)}\right) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

$\Rightarrow SA = AB = a$ (Vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Có: $\begin{cases} AM \perp SB \,(\text{gt}) \\ AM \perp BD \,(BD \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow \left(\widehat{AM, (SBD)}\right) = 90^\circ$.

2. Trong tam giác SAC: Kẻ $HI \parallel SA \Rightarrow HI \perp (ABCD)$.
Vậy AI là hình chiếu của AI trên mặt phẳng $(ABCD)$: $\left(\widehat{AH, (ABCD)}\right) = \widehat{HAI} = \widehat{HAC}$.

Trong tam giác SAC vuông tại A: $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Trong $\triangle HAC$: $\widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^\circ$.

3. Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), ta phải tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

Có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBD) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBD) = Sx\ (Sx \parallel AD \parallel BC)$ (1)

Kẻ $AK \perp BC$ tại K. Có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp SK$ (2)

Từ (1) và (2) $\begin{cases} SA \perp Sx \\ SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{(SAD), (SBC)}\right] = \widehat{ASK}$.

Trong tam giác AKB vuông tại K: $AK = AB \cdot \cos \widehat{KAB} = a \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Vì $\widehat{DAB} = 60^\circ$)

Trong tam giác SAK vuông tại A: $\tan \widehat{ASK} = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASK} = \arctan \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

□

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A, có đáy lớn AB, $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm của AB. Góc giữa (SDC) và (ABC) là 60°. Tính:

a) $\left(\widehat{SD, (SAB)}\right)$;

b) $\left(\widehat{(SAD), (SMC)}\right)$;

c) Chứng minh $BC \perp (SAC)$.

Lời giải.

1. Có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD,\ SD \perp CD \\ AD \subset (ABCD),\ SD \subset (SCD) \end{cases}$

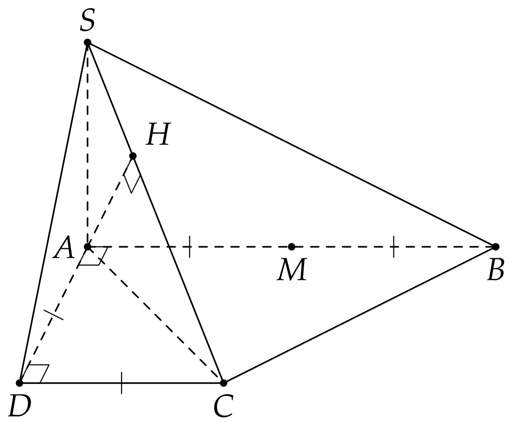
$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD), (ABCD)}\right) = \widehat{SDA} = 60^\circ$,

trong $\triangle SAD$ có $SA = AD \cdot \tan 60^\circ$

Có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

Suy ra SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mp(SAB).

Vậy $\left(\widehat{SD, (SAB)}\right) = \widehat{DSA} = 30^\circ$.



2. Ta có $AD \parallel CM$ (dễ dàng chứng minh được).

Tìm giao tuyến của mp(SAD) và mp(SCM).

Có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SCM) \\ AD \parallel CM \\ AD \subset (SAD),\ CM \subset (SCM) \end{cases} \Rightarrow (SAD \cap (SCM) = Sx\ (Sx \parallel AD \parallel CM)$.

Ta có $DA \perp SA$ (vì $DA \perp (SAB)$) $\Rightarrow SA \perp Sx$.

$M \perp (SAB)$ (Vì $CM \parallel AD$) $\Rightarrow SM \perp CM \Rightarrow SM \perp Sx$.

Vậy $\left[\widehat{(SAD),(SCM)}\right] = \left(\widehat{SA,SM}\right) = \widehat{ASM}$.

Có: $\tan\widehat{ASM} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASM} = 30^\circ$.

3. Ta có $ACDM$ là hình vuông nên $CM = a$, trong tam giác ACB có CM là đường trung tuyến và bằng một nửa cạnh BC. Suy ra tam giác ACB vuông tại C.
   Có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

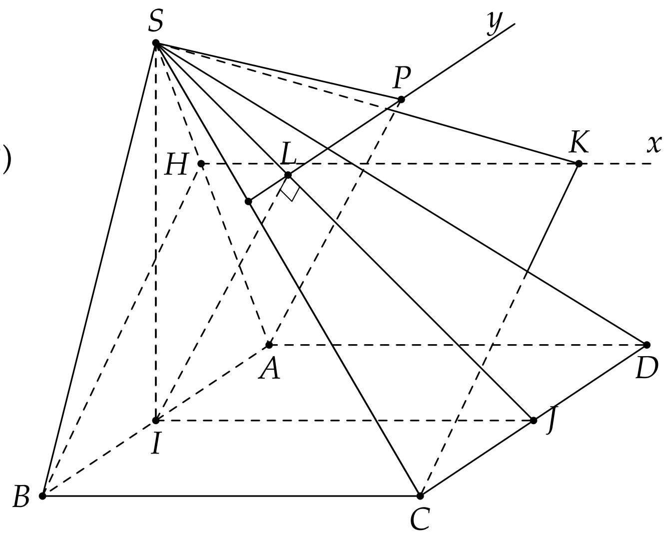
□

Bài 14. Cho hình vuông ABD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của AB.

1. Chứng minh $SI \perp (ABCD)$ và tính góc hợp bởi SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
2. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD). Từ đó tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAD).
3. Gọi J là trung điểm của CD, chứng minh $(SIJ) \perp (ABCD)$.
4. Tính góc hợp bởi SI và mặt phẳng (SDC).
5. Xác định và tính góc hợp bởi SA và mặt phẳng (SCD).

Lời giải.

1.



Chứng minh $SI \perp (ABCD)$
$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SI \perp AB (\text{vì } \triangle ABC \text{ đều}),\ SI \subset (SAB) \end{cases}$
$\Rightarrow SI \perp (ABCD)$.
Tính góc hợp bởi SC và mp$(ABCD)$.
Ta có IC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$, nên $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCI}$.
SI là đường cao của tam giác đều SAB nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác IBC vuông tại B:
$IC = \sqrt{BC^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong tam giác SCI vuông tại I: $\tan\widehat{SCI} = \dfrac{SI}{CI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCI} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

2. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).
   Có: $\begin{cases} AD \perp AB (ABCD \text{ là hình vuông}) \\ AD \perp SI \, (\text{vì } SI \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.
   $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$.
   Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SA.
   Dựng $BH \perp SA$ tại $H \Rightarrow SH \perp (SAD)$.
   Vậy $\mathrm{d}\,(B,(SAD)) = BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Vì $\triangle SAB$ đều).
   Trong mp(SAD) kẻ $Hx \parallel AD$; Trong mp(BC, Hx) qua C kẻ đường thẳng song song với BH cắt Hx tại K thì $CK \perp (SAD)$. Suy ra SK là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD) nên góc giữa SC và (SAD) là góc $\widehat{CSK}$.
   Theo chứng minh trên thì $BCKH$ là hình bình hành nên $BH = CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Trong $\triangle SCI$ có: $SC = \sqrt{SI^2 + IC^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.
   Có: $\sin \widehat{CSK} = \dfrac{CK}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \widehat{CSK} = \arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.
   Kết luận $\left(\widehat{SC,(SAD)}\right) = \arcsin \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Có: $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ)$, mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SCD) \perp (SIJ)$.

4. Tính góc hợp bởi SI và mp(SDC).
   Hai mặt phẳng (SCD) và (SIJ) vuông góc với nhau theo giao tuyến SJ.
   Dựng $IL \perp SJ \Rightarrow IL \perp (SCD)$. Suy ra SL là hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (SCD).
   Vậy góc giữa SI mà mặt phẳng (SCD) là góc $\widehat{ISL}$.
   Trong tam giác SIJ có: $\dfrac{1}{IL^2} = \dfrac{1}{IS^2} + \dfrac{1}{IJ^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow IL = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$;
   $\sin \widehat{ISL} = \dfrac{IL}{SI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \widehat{ISL} = \arcsin \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.
   Kết luận $\left(\widehat{SI,(SCD)}\right) = \arcsin \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

5. Xác định và tính góc hợp bởi SA và mặt phẳng (SCD).
   Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $Ly \parallel CD$.
   Trong mp(AB, Ly) qua A kẻ đường thẳng song song với IL cắt Ly tại P thì $AP \perp (SCD)$.
   Suy ra SP là hình chiếu vuông góc của SA trên mp(SCD) nên góc giữa SA và (SCD) là góc $\widehat{ASP}$.
   Theo chứng minh trên thì $AILP$ là hình bình hành nên $AP = IL = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
   Trong $\triangle SAP$ có $\sin \widehat{ASP} = \dfrac{AP}{SA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{ASP} = \arcsin \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
   Kết luận: $\left(\widehat{SA,(SCD)}\right) = \arcsin \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

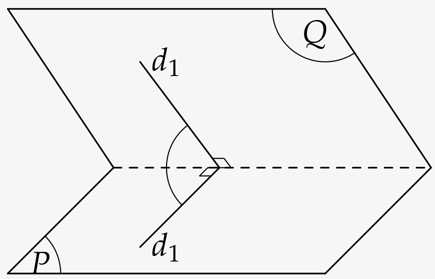
□

E. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 3. Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng
Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng.

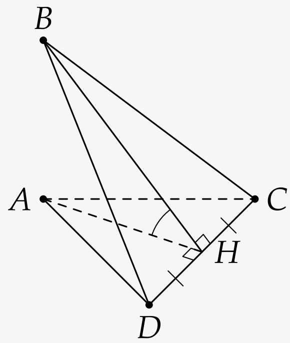
DẠNG 4.3. Tính góc giữa hai mặt phẳng

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

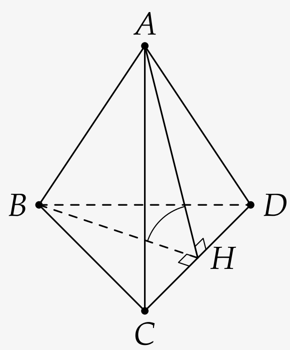


Những trường hợp đặc biệt dễ hay xảy ra:

1. **Trường hợp** 1: Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



2. **Trường hợp** 2: Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD. Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



3. **Trương hợp** 3: Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A, mp(Q)\right)}{d(A, a)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q), A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

4. **Trường hợp** 4: Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$.

5. **Trường hợp** 5: Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d'.

6. **Trường hợp** 6: Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

   (a) Bước 1: Xác định giao tuyến d.

   (b) Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh , dựng $AH \perp d$

   (c) Bước 3: Góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.
   Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

F. Bài tập rèn luyện

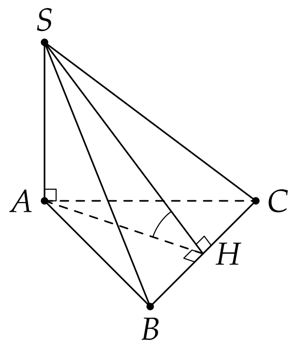
Bài 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).

Lời giải.

Ta có BC là giao tuyến của mp(SBC) và mp(ABC). Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A, dựng $AH \perp BC$.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH.$

Kết luận góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SHA}$.

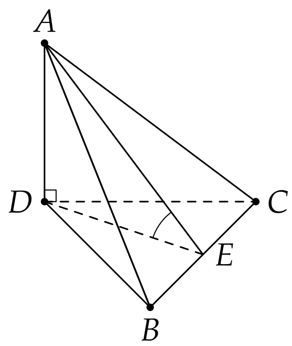


□

Bài 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (BCD)$ và $AB = 3a$. Biết BCD là tam giác đều cạnh $2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a) (ACD) và (BCD). b) (ABC) và (DBC).

Lời giải.



1. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).
   Vì AD vuông góc với (BCD) nên hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau, suy ra góc giữa chúng bằng 90°.

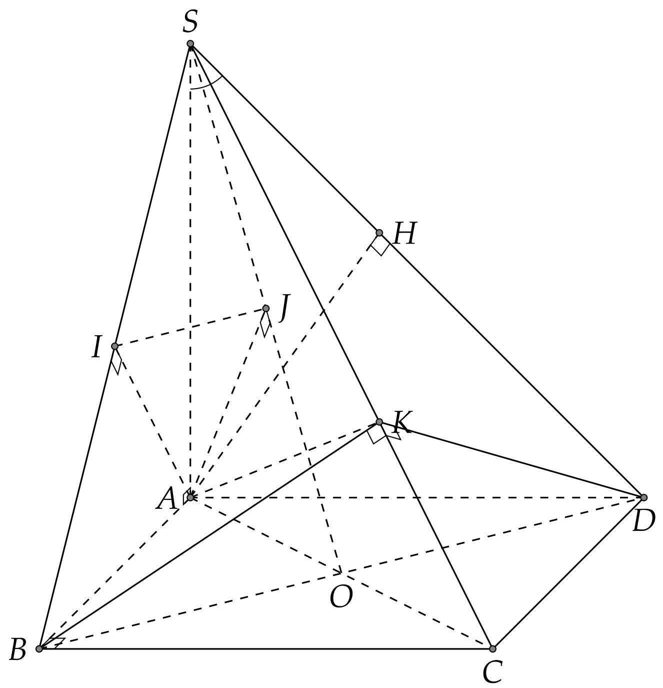
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD). Dựng $DE \perp BC$ tại E.
   Ta có: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp DE \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SBC) \Rightarrow BC \perp AE.$
   Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) có BC là giao tuyến và hai đường thẳng DE, AE lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC. Nên góc giữa (ABC) và (DBC) là góc giữa DE và AE chính là góc $\widehat{AED}$.
   Tam giác BCD đều nên có $DE = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.
   Tam giác ABD vuông tại D có $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$.
   Trong ΔADE vuông tại D, có:
   $$\tan \widehat{AED} = \frac{AD}{DE} = \frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \widehat{AED} = \arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right).$$

□

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAB) và (SBC).
b) (SAD) và (SCD).
c) (SAB) và (SCD).
d) (SBC) và (SAD).
e) (SBD) và $(ABCD)$.
f) (SBD) và (SAB).
g) (SBC) và $(ABCD)$.
h) (SCD) và $(ABCD)$.
i) (SBD) và (SBC).
j) (SBC) và (SCD).

Lời giải.



1. Góc giữa (SAB) và (SBC)
   Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$
   $\Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ vì $(BC \subset (SBC))$.
   Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 90°.
2. Góc giữa (SAD) và (SCD)
   Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ vì $(CD \subset (SCD))$.
   Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90°.
3. Góc giữa (SAB) và (SCD)
   Dựng $AH \perp SD$, $H \in SD$.
   Ta có $AH \perp SD$ và $AH \perp CD$ vì $CD \perp (SAD)$.
   Từ đó $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ (2)
   Ngoài ra ta có $AD \perp (SAB)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5, thì góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AD chính là góc $\widehat{HAD}$.
   Ta có $\widehat{DAH} = \widehat{DSA}$ (vì cùng phụ với $\widehat{SAH}$).

   $\tan \widehat{DSA} = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{DSA} = 30^\circ$.

4. Góc giữa (SBC) và (SAD).
   Dựng $AI \perp SB$, $I \in SB$.
   Ta có $AI \perp SB$ và $AI \perp CB$ vì $CB \perp (SAB)$.
   Từ đó suy ra $AI \perp (SBC)$
   Ngoài ra ta có $AB \perp (SAD)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5, thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng AI và AB chính là góc $\widehat{BAI}$.
   Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{BSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAI}$).
   có $\tan \widehat{BSA} = \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^\circ$.
   Vậy $((SBC), (SAD)) = \widehat{BAI} = 30^\circ$.

5. Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.
   Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$.
   Hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ có giao tuyến BD, hai đường thẳng AO và SO lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BD nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AO và SO chính là góc $\widehat{SOA}$.

Ta có: $\tan\widehat{SOA} = \dfrac{AO}{SO} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \widehat{SOA} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Vậy $((SBD),(ABCD)) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

6. Góc giữa (SBD) và (SAB).
   Vì $(SAC) \perp (SBD)$ theo giao tuyến SO. Dựng $AJ \perp SO$, $J \in SO$
   Suy ra $AJ \perp (SBD)$.
   Ta có $AJ \perp (SBD)$, $AD \perp (SAB) \Rightarrow ((SBD),(SAB)) = (AJ, AD) = \widehat{DAJ}$.
   Có $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
   Vì $AJ \perp (SBD) \Rightarrow AJ \perp JD$, $JD \subset (SBD) \Rightarrow \triangle AJD$ vuông tại J nên:
   $$\cos\widehat{DAJ} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{DAJ} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right).$$
   Vậy $((SBD),(SAB)) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

7. Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$.
   Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
   Hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ có giao tuyến BC và $AB \perp BC$, $SB \perp BC$
   $\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (AB, SB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$ (vì $\widehat{BSA} = 30^\circ$).

8. Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.
   Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.
   Hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ có giao tuyến CD và $AD \perp CD$, $SD \perp CD$
   $\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (AD, SD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$ (vì $\widehat{DSA} = 30^\circ$).

9. Góc giữa (SBD) và (SBC).
   Ta có $AI \perp (SBC)$, $AJ \perp (SBD) \Rightarrow ((SBC),(SBD)) = (AI, AJ)$.
   Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAB và SAO ta có:
   $$SA^2 = SI \cdot SB \Rightarrow SI = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2};$$
   $$SA^2 = SJ \cdot SO \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SO} = \dfrac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{3a^2}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{2}}} = \dfrac{3a\sqrt{14}}{7}.$$
   $AI \cdot SB = SA \cdot AB \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Trong tam giác vuông SBO tại O có $\cos\widehat{BSO} = \dfrac{SO}{SB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{14}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.
   Trong ΔSJI có:
   $$IJ^2 = SI^2 + SJ^2 - 2SI \cdot SJ \cdot \cos\widehat{BSO} = \dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{18a^2}{7} - 2 \cdot \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{3a\sqrt{14}}{7} \cdot \dfrac{\sqrt{14}}{4} = \dfrac{9a^2}{28}.$$
   Trong $\triangle AIJ$ có:
   $$\cos\widehat{IAJ} = \dfrac{AI^2 + AJ^2 - IJ^2}{2AI \cdot AJ} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{7} - \dfrac{9a^2}{28}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{7}} = \dfrac{2\sqrt{27}}{7} \Rightarrow \widehat{IAJ} = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Kết luận $((SBC),(SBD)) = \widehat{JAI} = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

10. góc giữa (SBC) và (SCD).
Ta có $\triangle SBC = \triangle SDC$ (Cạnh huyền - cạnh góc vuông).
Dựng $BK \perp SC, (K \in SC) \Rightarrow DK \perp SC$ và $DK = BK$.
Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) có cạnh SC chung nên:
$$((SBC),(SCD)) = (BK, DK) = \widehat{BKD} \text{ hoặc } 180^\circ - \widehat{BKD}.$$
Xét $\triangle SBC$ vuông tại B có:
$$BK \cdot SC = BS \cdot BC \Rightarrow BK = \frac{BS \cdot BC}{SC} = \frac{BS \cdot BC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$
Trong $\triangle BDK$ có:
$$\cos\widehat{BKD} = \frac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2 \cdot BK \cdot DK} = \frac{\dfrac{4a^2}{5} + \dfrac{4a^2}{5} - 2a^2}{2 \cdot \dfrac{4a^2}{5}} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow (BK, DK) = \widehat{BKD} = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

□

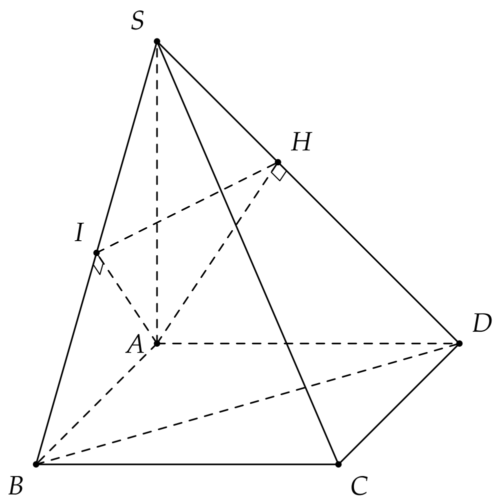
Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc giữa các mặt phẳng sau:

a) Góc giữa mặt bên và mặt đáy.

b) Góc giữa hai mặt bên liên tiếp.

c) Góc giữa hai mặt bên đối diện.

Lời giải.



1. Góc giữa các mặt bên và mặt đáy.
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases}$
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAD) với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 90°.
$BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$. (đl ba đường vuông góc)
Hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ có giao tuyến BC nên góc của chúng là góc giữa SB và AB là $\widehat{SBA}$.
Tam giác SAB vuông tại A có $AB = SA$ nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A, suy ra: $\widehat{SBA} = 45^\circ$.
Suy ra $((SBC),(ABCD)) = 45^\circ$.
$CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp SD$. (đl ba đường vuông góc)
Hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ có giao tuyến CD nên góc của chúng là góc giữa SD và CD là $\widehat{SDA}$.
Tam giác SAD vuông tại A có $\tan\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SDA} = \arctan\dfrac{1}{2}$.

2. Góc giữa hai mặt bên liên tiếp.
   Góc giữa (SAB) và (SBC)
   Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ (vì $BC \subset (SBC)$).
   Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90°.
   Góc giữa (SAB) và (SAD)
   Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$ (vì $AD \subset (SAD)$).
   Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAD) bằng 90°.
   Góc giữa (SAD) và (SCD)
   Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$ (vì $CD \subset (SCD)$).
   Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90°.
   Góc giữa (SBC) và (SCD)
   Gọi I là trung điểm SB, khi đó $AI \perp SB$ mà $BC \perp AI \Rightarrow AI \perp (SBC)$.
   Dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.
   Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SCD) là góc giữa AI và AH chính là góc $\widehat{IAH}$ hoặc $180^\circ - \widehat{IAH}$.
   Ta có $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên $SB = a\sqrt{2}, AI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\triangle SAD$ vuông tại A nên $SD = a\sqrt{5}$.
   $AH \cdot SD = SA \cdot AD \Rightarrow AH = \dfrac{SA \cdot AD}{SD} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}; SI = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SH = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

   Áp dụng định lí cosin trong hai tam giác BSD và ISH có chung góc S.

   $$\cos\widehat{S} = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2 \cdot SB \cdot SD} = \frac{2a^2 + 5a^2 - 5a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$
   $$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2 \cdot SI \cdot SH \cdot \cos\widehat{S} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{a^2}{2}.$$
   $$\cos\widehat{IAH} = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2 \cdot AI \cdot AH} = \frac{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{4a^2}{5} - \dfrac{a^2}{2}}{2 \cdot \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2a}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{IAH} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

   Kết luận $((SBC),(SCD)) = \widehat{IAH} = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

3. Góc giữa hai mặt bên đối diện.
   Góc giữa (SAB) và (SCD)
   Vì $AD \perp (SAB)$ và $AH \perp (SCD)$ nên góc giữa (SAB) và (SCD) là góc giữa AD và AH là góc nhọn $\widehat{DAH}$.
   Ta có $\tan\widehat{DSA} = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{DSA} = \arctan 2$.
   Vì góc $\widehat{DAH}$ và $\widehat{DSA}$ cùng phụ với góc $\widehat{SAH}$ nên $\widehat{DAH} = \arctan 2$.
   Góc giữa (SBC) và (SAD)
   Vì $AB \perp (SAD)$ và $AI \perp (SBC)$ nên góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa AB và AI là góc nhọn $\widehat{BAI}$.
   Ta có $\widehat{ASB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = 45^\circ$.

□

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, dựng $AH \perp SC (H \in SC)$, gọi M là trung điểm của AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Tính góc giữa SD và (SAB).

b) Tính góc giữa (SAD) và (SMC).

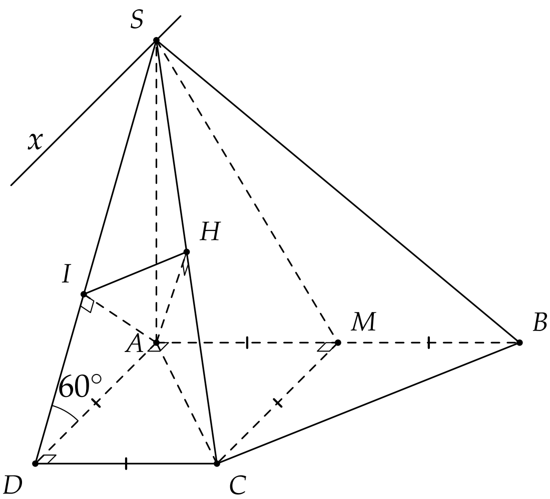
c) Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$.

d) Tính góc giữa (SBC) và (SCD).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) có SD là giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) là góc giữa AD và SD chính là góc $\widehat{SDA} = 60^\circ$, nên có $SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.



1. Tính góc giữa SD và (SAB).
   $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.
   Hình chiếu vuông góc của SD lên mặt phẳng (SAB) là đường thẳng SA nên góc giữa SD và (SAB) là góc $\widehat{DSA}$.
   Suy ra $(SD, (SAB)) = \widehat{DSA} = 30^\circ$.
   Vậy $(SD, (SAB)) = \widehat{DSA} = 30^\circ$.

2. Tính góc giữa (SAD) và (SMC).
   Hai mặt phẳng (SAD) và (SMC) có điểm chung S và có $AD \parallel MC$ nên giao tuyến của chúng là đường thẳng Sx và song song với AD và MC.
   $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SM$ mà $CM \parallel Sx$ nên $SM \perp Sx$. (1)
   $SA \perp AD$ mà $AD \parallel Sx$ nên $SA \perp Sx$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $((SAD), (SMC)) = (SA, SM) = \widehat{MSA}$.
   Tam giác $\triangle SAM$ vuông tại A có $\tan \widehat{ASM} = \dfrac{AM}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASM} = 30^\circ$.
   Vậy $((SAD), (SMC)) = \widehat{ASM} = 30^\circ$.

3. Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$.
   Trong tam giác ABC có CM là trung tuyến và $CM = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C.
   Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.
   Hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ có giao tuyến BC, hai đường thẳng SC và AC lần lượt nằm trong hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC, nên góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC là góc $\widehat{SCA}$.
   Trong tam giác vuông SAC vuông tại A có $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2 + DC^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $((SBC),(ABCD)) = \widehat{SCA} = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Tính góc giữa (SBC) và (SCD).
$\begin{cases} BC \perp (SAC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.
Hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) vuông góc với nhau theo giao tuyến SC.
Dựng $AH \perp SC(H \in SC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$. (3)
Hai mặt phẳng (SAD) và (SDC) vuông góc với nhau theo giao tuyến SD.
Dựng $AI \perp SD(I \in SD) \Rightarrow AI \perp (SCD)$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $((SBC),(SDC)) = (AH, AI)$.

Hai tam giác SAD và SAC vuông vuông tại A ta có

$$SA \cdot AD = AI \cdot SD \Rightarrow AI = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$
$$SA^2 = SI \cdot SD \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{SD} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}.$$
$$SA \cdot AC = AH \cdot SC \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5};$$
$$SA^2 = SH \cdot SC \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SC} = \frac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

Tam giác SAC vuông tại D có $\cos\widehat{CSD} = \dfrac{SD}{SC} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lí cosin trong hai tam giác SIH và AIH.

$$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2SI \cdot SH \cdot \cos\widehat{CSD} = \frac{9a^2}{4} + \frac{9a^2}{5} - 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9a^2}{20}.$$
$$\cos\widehat{IAH} = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2 \cdot AI \cdot AH} = \frac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{6a^2}{5} - \dfrac{9a^2}{20}}{2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{30}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4} > 0,$$

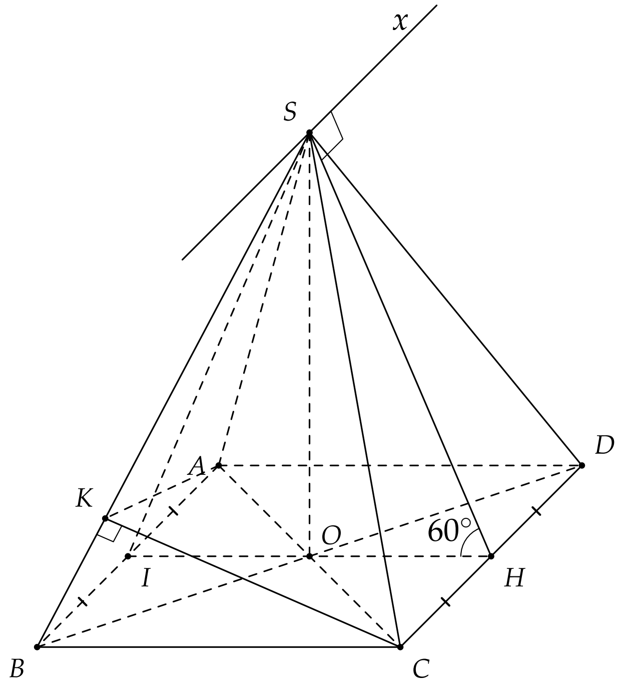
suy ra $\widehat{IAH}$ nhọn và $\widehat{IAH} = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.
Vậy $((SBC),(SDC)) = \widehat{IAH} = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

□

Bài 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy góc $60°$. Tính góc giữa các mặt phẳng:

a) (SAB) và (SCD). b) (SAB) và (SBC).

Lời giải.



1. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).
   Gọi O là tâm đáy và I, H lần lượt là trung điểm AB, CD.
   Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ OH \perp CD, OH \subset (ABCD) \\ SH \perp CD, SH \subset (SCD) \end{cases}$
   $\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SHO} = 60^\circ$.
   Tam giác SHO vuông tại O.
   $\tan \widehat{SHO} = \dfrac{SO}{OH} \Rightarrow SO = OH \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$
   $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx (Sx \parallel AB \parallel CD)$.
   $AB \perp SI \Rightarrow SI \perp Sx$, $CD \perp SH \Rightarrow SH \perp Sx$
   Suy ra $((SAB), (SCD)) = \widehat{ISH}$.
   Vì $\triangle SIH$ cân tại S có $\widehat{SHI} = 60^\circ$ nên $\triangle SIH$ đều nên $\widehat{ISH} = 60^\circ$.
   Vậy $((SAB), (SCD)) = \widehat{ISH} = 60^\circ$.

2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).
   Ta có $(SAB) \cap (SBC) = SB$.
   Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau do đó $\triangle SAB = \triangle SBC$.
   Từ A kẻ $AK \perp SB$ thì $CK \perp SB$. Suy ra: $((SAB), (SBC)) = (AK, CK)$.
   Trong tam giác SOB vuông tại O, có $SB = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
   Trong tam giác SAB có $S_{\triangle SAB} = \dfrac{1}{2} SI \cdot AB = \dfrac{1}{2} AK \cdot SB \Rightarrow AK = \dfrac{SI \cdot AB}{SB} = \dfrac{a \cdot a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
   Tam giác ACK cân tại K từ chứng minh trên, nên $AK = CK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
   Áp dụng định lí cosin trong tam giác AKC. $\cos \widehat{AKC} = \dfrac{AK^2 + CK^2 - AC^2}{2AK \cdot CK} = \dfrac{\dfrac{4a^2}{5} + \dfrac{4a^2}{5} - 2a^2}{2 \cdot \dfrac{4a^2}{5}} = -\dfrac{1}{4} < 0$.
   Suy ra $(AK, CK) = \arccos \dfrac{1}{4}$.

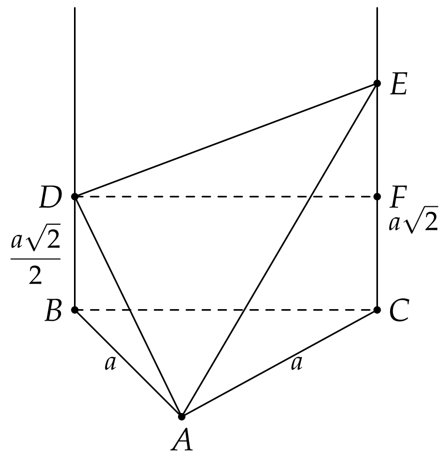
Vậy $((SAB),(SBC)) = \arccos\dfrac{1}{4}$.

□

Bài 21. Cho tam giác đều ABC cạnh a nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

1. Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích tam giác này.
2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và (P).

Lời giải.



1. Gọi F là trung điểm của CE có $FE = FC = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
   Áp dụng định lý Pi-ta-go cho các tam giác ABD, ACE, DEF.
   - $AD^2 = AB^2 + BD^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.
   - $AE^2 = AC^2 + CE^2 = 3a^2$.
   - $DE^2 = DF^2 + FE^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.

   Trong tam giác ADE có $AE^2 = AD^2 + DE^2 = \dfrac{3a^2}{2} + \dfrac{3a^2}{2} = 3a^2$.
   Vậy tam giác ADE vuông tại D.

2. Vì $BD \perp (ABC)$, $CE \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác ADE.
   Khi đó mặt phẳng (ABC) chính là mặt phẳng (P).
   Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và mp(P). Khi đó

$$S_{\triangle ABC} = \cos\varphi S_{\triangle ADE} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{1}{2}DE\cdot DA} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{3a^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

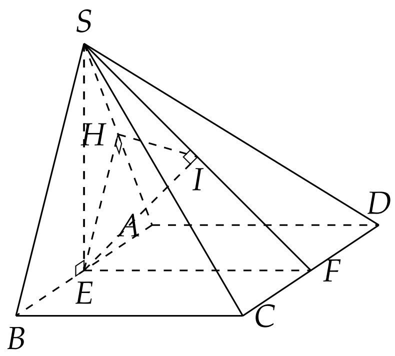
Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính góc giữa:

1. (SCD) và $(ABCD)$.
2. (SCD) và (SAD).

Lời giải.

1.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Có $SE \perp AB$ ($\triangle SAB$ đều)
$\Rightarrow SE \perp ABCD$.
Có $\begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow CD \perp SF$.
Vậy $[\widehat{(SCD),(ABCD)}] = \widehat{SFE}$.
Trong tam giác $\triangle SEF$ vuông tại E: $\tan \widehat{SFE} = \dfrac{SE}{EF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



2. Ta có $\begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow (SCD) \perp (SEF)$.
Dựng $EI \perp SF$ ($I \in SF$) $\Rightarrow EI \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(E,(SCD)) = EI$.
Trong tam giác $\triangle SEF$ vuông tại E ta có

$$\frac{1}{EI^2} = \frac{1}{ES^2} + \frac{1}{EF^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Vì $AE \parallel CD$ nên $AE \parallel (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(E,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Ta có $SD^2 = SE^2 + ED^2 = SE^2 + EA^2 + AD^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + a^2 = 2a^2$.
Dựng $AH \perp SD$ ($H \in SD$), vì $\triangle SAD$ cân tại A nên $AH^2 = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ta có $(SAD) \cap (SCD) = SD; A \in (SAD)$;
$\mathrm{d}(A,SD) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).
Sử dụng công thức tính góc ở trường hợp 3 ta được

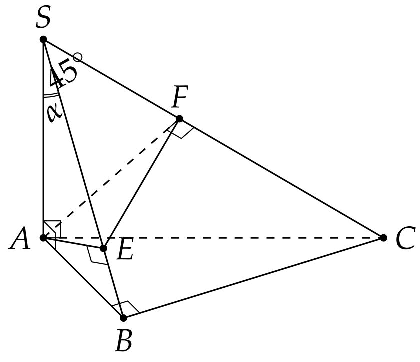
$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}(A,(SCD))}{\mathrm{d}(A,SD)} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right).$$

□

Bài 23. Cho tứ diện $S.ABC$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc nhau, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{ASB} = \alpha$.

1. Chứng minh BC vuông góc với SB.
2. Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau một góc 60°.

Lời giải.



1. Chứng minh BC vuông góc với SB.
   Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$ (1).
   Theo đề bài $(SAB) \perp (SBC)$ (2).
   Và $(ABC) \cap (SBC) = BC$ (3).
   Từ (1),(2) và (3) suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ (hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba).

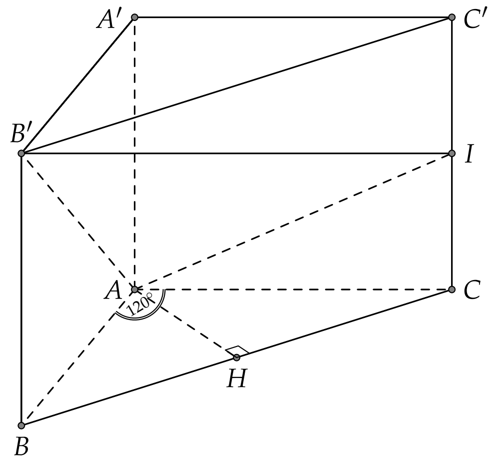
2. Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau một góc $60°$.
   Dựng $AE \perp SB$ tại E. Dựng $AF \perp SC$ tại F.
   Theo câu a) thì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.
   Vậy $SC \perp (AEF) \Rightarrow SC \perp EF$.
   Hai đường thẳng AF và EF thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với giao tuyến SC nên $[\widehat{(SAC),(SBC)}] = \widehat{AFE} = 60°$.
   Ta có $\triangle\ AEF$ vuông tại E (vì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp EF$) có $AE = EF \tan 60° = EF \cdot \sqrt{3}$.
   Xét $\triangle\ SAE$ có $AE = SE \tan \alpha$.
   Xét $\triangle\ SEF$ có $EF = SE \sin 45° = \dfrac{SE\sqrt{2}}{2}$.
   Suy ra $AE = EF \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow SE \tan \alpha = \dfrac{SE\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

□

Bài 24. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'.

1. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A.
2. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Lời giải.



1. Gọi H là trung điểm của BC. Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AH \perp BC$.
   Do $\widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACH} = 30^\circ$.
   Xét $\triangle ACH$ vuông tại H có $\begin{cases} AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = \dfrac{a}{2} \\ CH = AC \cdot \cos \widehat{ACH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
   $\Rightarrow BC = 2CH = a\sqrt{3}$.
   - Xét $\triangle B'C'I$ vuông tại I nên $IB'^2 = B'C'^2 + IC'^2 = \dfrac{13a^2}{4}$.
   - Xét $\triangle ABB'$ vuông tại B nên $AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = 2a^2$.
   - Xét $\triangle ACI$ vuông tại C nên $AI^2 = AC^2 + IC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$.

   Ta thấy $IB'^2 = AB'^2 + AI^2 = \dfrac{13a^2}{4}$. Chứng tỏ $\triangle B'AI$ vuông tại A.

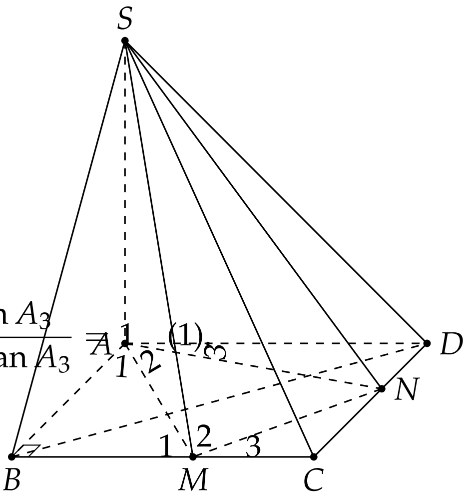
2. Ta có $S_{\triangle B'AI} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
   Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.
   Ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB'I} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} : \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

□

Bài 25. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lấy hai điểm M, N thuộc CB và CD. Đặt $CM = x$, $CN = y$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A lấy một điểm S. Tìm liên hệ giữa x, y để

1. $\left(\widehat{(SAM),(SAN)}\right) = 45^\circ$.
2. $(SAM) \perp (SMN)$.

Lời giải.



1. Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM, SA \perp AN$.
   Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có giao tuyến là SA. Nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AM và AN chính là góc $\widehat{MAN} = 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{A_2} = 45^\circ$.
   Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45^\circ$.
   Lại có
   $$\tan(A_1 + A_3) = \frac{\tan A_1 + \tan A_3}{1 - \tan A_1 \cdot \tan A_3} \Leftrightarrow \frac{\tan A_1 + \tan A_3}{1 - \tan A_1 \cdot \tan A_3} = 1 \quad (1).$$
   Xét trong hai tam giác vuông ABM và ADN có
   $$\tan A_1 = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a}; \tan A_2 = \frac{DN}{AD} = \frac{a-y}{a} \quad (2).$$
   Thay (2) vào (1)
   $$\begin{aligned} & \frac{\frac{a-x}{a} + \frac{a-y}{a}}{1 - \frac{a-x}{a} \cdot \frac{a-y}{a}} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a(2a - x - y) = a(x+y) - xy \\ \Leftrightarrow \quad & 2a^2 = 2a(x+y) - xy. \end{aligned}$$
   Vậy liên hệ giữa x, y là $2a^2 = 2a(x+y) - xy$.
2. Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAM) \perp (ABCD)$. Giả sử $(SMN) \perp (SAM)$ thì hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SMN) cùng vuông góc với (SAM) nên giao tuyến của chúng là MN vuông góc với mặt phẳng (SAM). Suy ra $MN \perp AM$ hay $\widehat{AMN} = 90^\circ$. Lúc đó $\widehat{M_1} + \widehat{M_3} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{A_1}$ nên có
   $$\tan M_3 = \tan A_1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow x^2 = a(x-y).$$
   Vậy liên hệ giữa x, y là $x^2 = a(x-y)$.

□

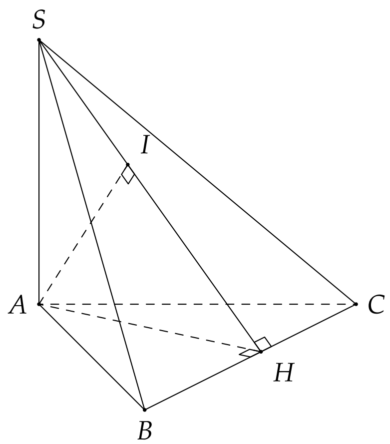
Bài 5. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

A. Phương pháp giải toán

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, là một dạng toán rất quan trọng trong chương vuông góc của lớp 11 và là một phần hay ra trong đề thi Đại học. Để giải quyết vấn đề này các bạn phải thành thạo hai công cụ sau và nó liên quan với nhau.
Bài toán 1. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên
Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

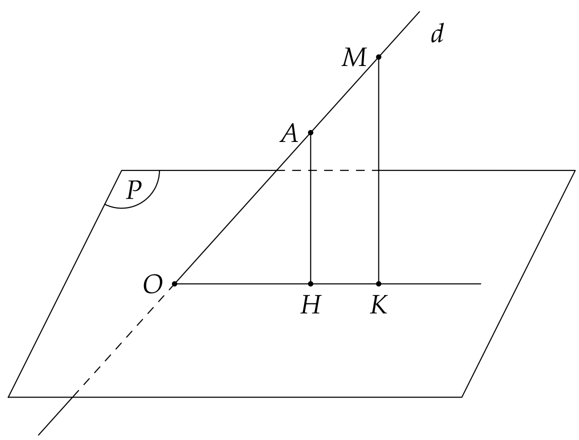
- **Bước 1.** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2.** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3.** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

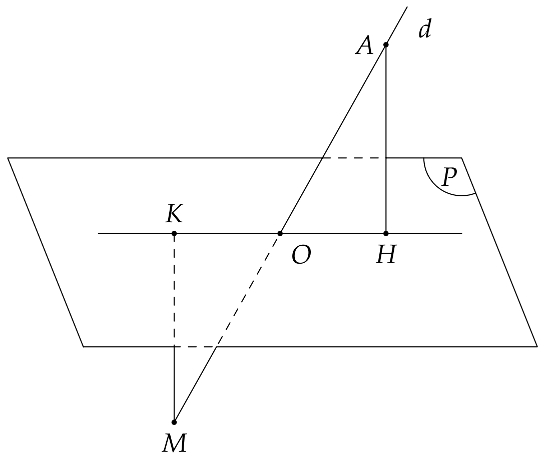
Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kì đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của Bài toán 2.
Ví dụ điển hình: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC). Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).
Lời giải.
Ta có BC là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).
Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A.
Dựng $AH \perp BC$ tại H. Dựng $AI \perp SH$ tại I.
Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.
Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAH) theo giao tuyến SH có $AI \perp SH$ nên $AI \perp (SBC)$.
Vậy $\mathrm{d}\left(A, \mathrm{mp}(SBC)\right) = AI$.



□

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến một mặt phẳng
Thường sử dụng công thức sau:



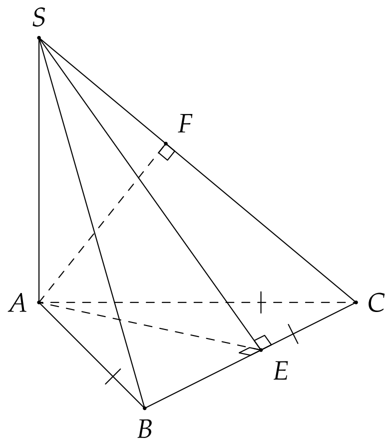


Công thức tính tỉ lệ khoảng cách $\dfrac{\mathrm{d}\left(M, \mathrm{mp}(P)\right)}{\mathrm{d}\left(A, \mathrm{mp}(P)\right)} = \dfrac{MO}{AO}$.
Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).
Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). Kinh nghiệm thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

B. Bài tập mẫu

Bài 1 (Dự bị Đại học khối D- 2002). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.



Gọi E là trung điểm của BC thì $BC \perp AE$ (vì ABC đều).
Dựng $AF \perp SE$ tại F.
Có $BC \perp SA$, $BC \perp AE$ nên $BC \perp \mathrm{mp}(SAE)$.
Suy ra $(SBC) \perp (SAE)$.
Mp (SBC) vuông góc với mp (SAE) theo giao tuyến SE có $AF \perp SE$.
Suy ra $AF \perp (SBC)$.
Vậy $\mathrm{d}\left(A, (SBC)\right) = AF$.
Trong tam giác SAE có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2}$$

$\Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

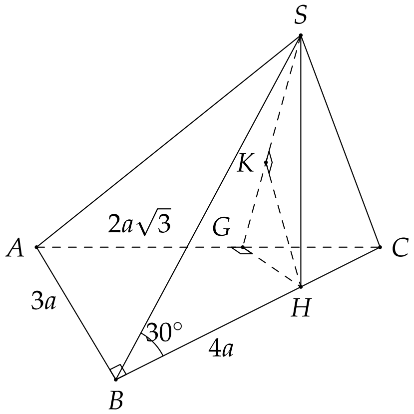
Kết luận $\mathrm{d}\left(A, (SBC)\right) = AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 2 (Đề thi TSĐH Khối A- 2011). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải.

Nhận xét. *H là hình chiếu vuông góc của đỉnh và điểm B cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAC) tại C. Nên bước đầu tiên ta phải tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAC), sau đó sử dụng công thức tỉ số khoảng cách để tính khoảng cách từ điểm B.*



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC.
Do $\text{mp}(SBC) \perp \text{mp}(ABC)$ nên $SH \perp \text{mp}(ABC)$.
Trong $\triangle SBH$ vuông tại H có:
$SH = SB \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{3}$, $BH = SB \cdot \cos 30^\circ = 3a$.
Dựng $HG \perp AC$ tại G.
Dựng $HK \perp SG$ tại K.
Ta có $\begin{cases} AC \perp HG \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp \text{mp}(SHG)$.
$\Rightarrow \text{mp}(SAC) \perp \text{mp}(SHG)$ (vì $AC \subset \text{mp}(SAC)$).
Và $(SAC) \cap (SHG) = SG \Rightarrow HK \perp \text{mp}(SAC)$.
Vậy $\text{d}\left(H, \text{mp}(SAC)\right) = HK$.
Ta có $\triangle CGH \backsim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{GH}{BA} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow GH = \dfrac{a}{5a} \cdot 3a = \dfrac{3a}{5}$.
Trong $\triangle SHG$ vuông tại H ta có

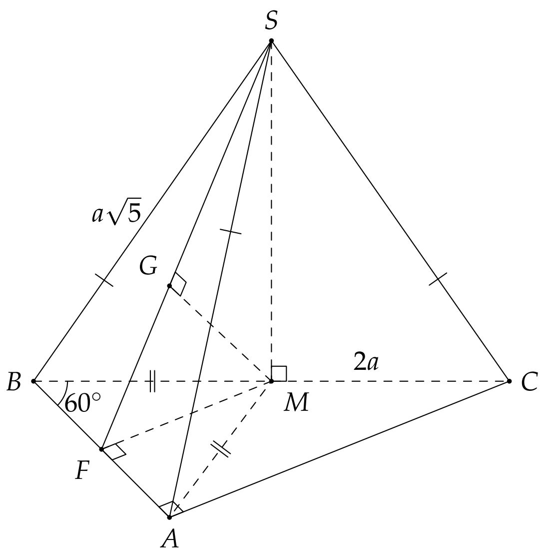
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{25}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Hai điểm H và B nằm trên đường thẳng có giao điểm với $\text{mp}(SAC)$ tại C nên có $\dfrac{\text{d}\left(B, \text{mp}(SAC)\right)}{\text{d}\left(H, \text{mp}(SAC)\right)} = \dfrac{BC}{HC} = 4$.
Vậy $\text{d}\left(B, \text{mp}(SAC)\right) = 4\text{d}\left(H, \text{mp}(SAC)\right) = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$. □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

1. Tính chiều cao của hình chóp.
2. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB).

Lời giải.



1. Tính chiều cao của hình chóp.
Vì $\triangle ABC$ vuông tại A, M là trung điểm của BC nên ta có $MA = MB = MC$. (1)
Theo đề $SA = SB = SC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra M là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).
Vậy $\mathrm{d}(S,(ABC)) = SM$.
Trong $\triangle SBM$ có $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$.

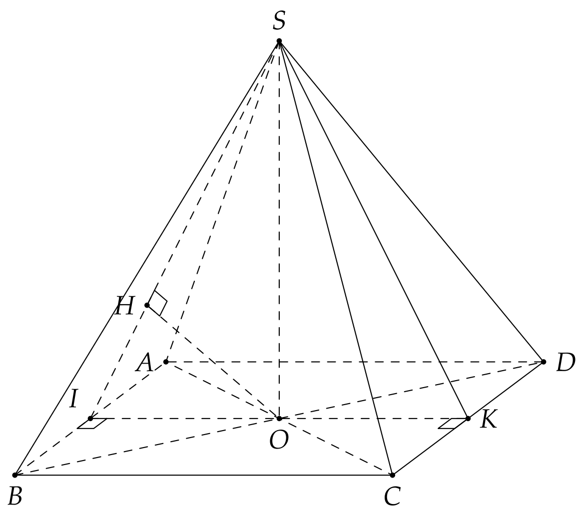
2. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB).
⚠ *M là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC).*
Kẻ $MF \perp AB$ tại F. Kẻ $MG \perp SF$ tại $G \Rightarrow MG \perp (SAB)$.
MAB là tam giác cân có góc 60° nên MAB đều $\Rightarrow MF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác vuông SMF ta có
$$\frac{1}{MG^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MF^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow MG = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

□

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AB = 2a$, $SA = 4a$. Tính

1. Khoảng cách từ O đến (SAB).
2. Khoảng cách từ A đến (SCD).

Lời giải.



1. Khoảng cách từ O đến (SAB).
Theo đề bài thì $SO \perp (ABCD)$. Dựng $OI \perp AB$ tại I thì $AB \perp (SIO) \Rightarrow (SAB) \perp (SIO)$.
Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI.
Dựng $OH \perp SI$ tại H. Suy ra $OH \perp (SAB)$. Vậy $\mathrm{d}(O,(SAB)) = OH$.
OI là đường trung bình của $\triangle BAD \Rightarrow OI = \dfrac{1}{2}AD = a$.
Trong $\triangle SAO$ vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{16a^2 - 2a^2} = a\sqrt{14}$.
Trong $\triangle SOI$ vuông tại O, ta có
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{14a^2} = \frac{15}{14a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}.$$

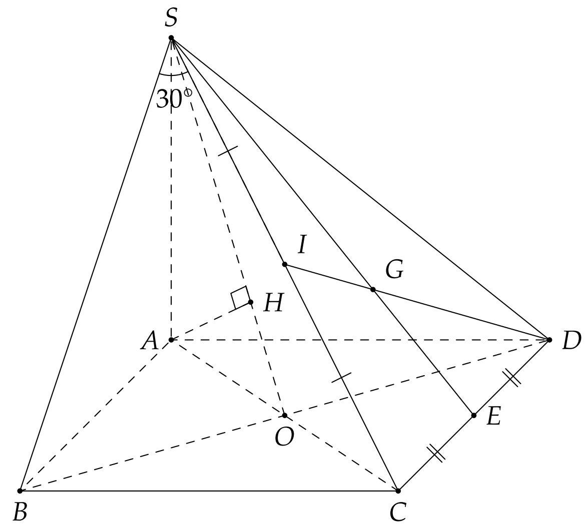
2. Khoảng cách từ A đến (SCD).
Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên khoảng cách từ tâm O đến các mặt bên bằng nhau, có $\mathrm{d}\,(O,(SAB)) = \mathrm{d}\,(O,(SCD)) = OH = \dfrac{a\sqrt{210}}{15}$.
Hai điểm A và O nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại C, nên có $\dfrac{\mathrm{d}\,(A,(SCD))}{\mathrm{d}\,(O,(SCD))} = \dfrac{AC}{AO} = 2$.
Vậy $\mathrm{d}\,(A,(SCD)) = 2\cdot \mathrm{d}\,(O,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{10}}{15}$.

□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30°.

1. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).
2. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).
3. Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC, trọng tâm G của tam giác SCD đến mặt phẳng (SBD).
4. Tính khoảng cách từ O, I và G đến mặt phẳng (SAB).

Lời giải.



1. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).
Vì $\begin{cases} CB\perp AB \\ CB\perp SA \end{cases} \Rightarrow CB\perp (SAB)$. Do đó SB là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB).
$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SC,SB}\right) = \widehat{CSB} = 30^\circ$.
Trong $\triangle SBC$ vuông tại B có $SB = BC\cdot\cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.
Trong $\triangle SAB$ vuông tại A có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $\begin{cases} SA\perp BD \\ AC\perp BD \end{cases} \Rightarrow BD\perp (SAC) \Rightarrow (SBD)\perp (SAC)$.
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $AH\perp SO \Rightarrow AH\perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}\,(A,(SBD)) = AH$.
Trong $\triangle SAO$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

2. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).
   Vì hai điểm A và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với (SBD) tại O nên ta có $\dfrac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))} = \dfrac{CO}{AO} = 1$.
   Suy ra $\mathrm{d}(C,(SBD)) = \mathrm{d}(A,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

3. Tính khoảng cách từ I và G đến mặt phẳng (SBD).
   Vì hai điểm I và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với (SBD) tại S nên ta có $\dfrac{\mathrm{d}(I,(SBD))}{\mathrm{d}(C,(SBD))} = \dfrac{IS}{CS} = \dfrac{1}{2}$.
   Do đó $\mathrm{d}(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.
   Vì hai điểm I và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với (SBD) tại D nên ta có $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SBD))}{\mathrm{d}(I,(SBD))} = \dfrac{GD}{ID} = \dfrac{2}{3}$.
   Suy ra $\mathrm{d}(G,(SBD)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(I,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{15}$.

4. Tính khoảng cách từ O, I và G đến mặt phẳng (SAB).
   Theo câu a) ta có $CB \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SAB)) = CB = a$.
   Vì hai điểm I và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại S nên có $\dfrac{\mathrm{d}(I,(SAB))}{\mathrm{d}(C,(SAB))} = \dfrac{IS}{CS} = \dfrac{1}{2}$
   $\Rightarrow \mathrm{d}(I,(SAB)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,(SAB)) = \dfrac{a}{2}$.
   Vì hai điểm O và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại A nên có $\dfrac{\mathrm{d}(O,(SAB))}{\mathrm{d}(C,(SAB))} = \dfrac{OA}{CA} = \dfrac{1}{2}$
   $\Rightarrow \mathrm{d}(O,(SAB)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,(SAB)) = \dfrac{a}{2}$.
   Vì $CE \parallel AB$ nên $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(E,(SAB)) = a$.
   Vì hai điểm E và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại S nên có $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SAB))}{\mathrm{d}(E,(SAB))} = \dfrac{GS}{ES} = \dfrac{2}{3}$
   $\Rightarrow \mathrm{d}(G,(SAB)) = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}(E,(SAB)) = \dfrac{2a}{3}$.

Thông qua bài tập này các bạn thấy mấu chốt chủ yếu của bài toán là dựa vào khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh ở đây là điểm A, sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách. □

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

1. Tính khoảng cách từ A, B đến (SCD).
2. Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

Lời giải.

1. Tính khoảng cách từ A, B đến (SCD).

Theo đề bài ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD \perp (SAC) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$ theo giao tuyến SC.

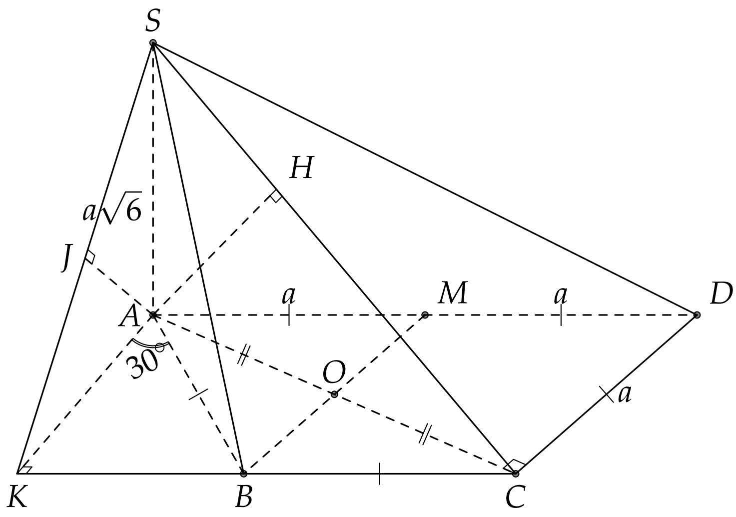
Kẻ $AH \perp SC$ $(H \in SC) \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Do đó $\mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.

Xét tam giác vuông ACD có $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông SAC có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Gọi M là trung điểm AD thì $BM \parallel CD$

$\Rightarrow BM \parallel (SCD)$.

Gọi $\{O\} = AC \cap BM$

$\Rightarrow \mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(O, (SCD))$.

Vì $\{C\} = AO \cap (SCD)$ và $OC = \dfrac{1}{2}AC$

nên $\mathrm{d}(O, (SCD)) = \dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{d}(A, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

2. Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

   Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

   $\Rightarrow \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.

   Kẻ $AK \perp BC$ $(K \in BC)$.

   Ta có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (SAK) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ theo giao tuyến SK.

   Kẻ $AJ \perp SK$ $(J \in SK) \Rightarrow AJ \perp (SBC)$. Do đó $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AJ$.

   Xét tam giác vuông SAK có $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

   Xét tam giác vuông SAK có $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

   Vậy $\mathrm{d}(AD, (SBC)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

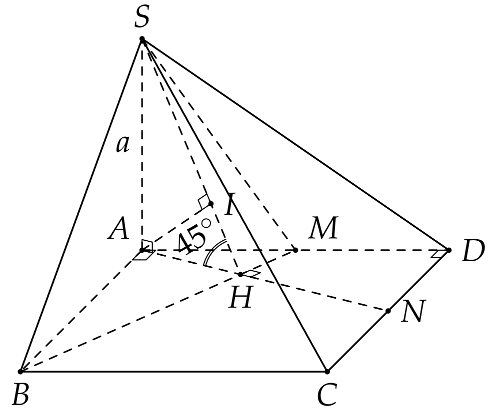
□

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC. Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM).

Lời giải.

Gọi H là giao điểm của BM và AN.
Ta có $\triangle DAN = \triangle ABM$ ($c.g.c$) $\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{ABM}$ mà $\widehat{ABM} + \widehat{AMH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAM} + \widehat{AMH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$ hay $BM \perp AN$.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AN \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAN) \Rightarrow BM \perp SH$.



BM là giao tuyến của (SBM) và $(ABCD)$.
Khi đó góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa hai đường thẳng AN và SH hay $\widehat{SHA} = 45^\circ$.
Tam giác SAH vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AS = a$.
Xét tam giác vuông ABM có
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Leftrightarrow AB^2 = 5AH^2 \Leftrightarrow AB = AH\sqrt{5} = a\sqrt{5}$.
Dựng $AI \perp SH$ ($I \in SH$). Hai mặt phẳng (SBM) và (SAN) vuông góc với nhau theo giao tuyến SH
$\Rightarrow AI \perp (SBM) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SBM)) = AI$.
Xét tam giác vuông SAH có $AI = \dfrac{SH}{2} = \dfrac{AH\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai điểm A và D nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBM) tại M với M là trung điểm của AD, nên có $\dfrac{\mathrm{d}(D, (SBM))}{\mathrm{d}(A, (SBM))} = \dfrac{DM}{AM} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}(D, (SBM)) = \mathrm{d}(A, (SBM)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\mathrm{d}(D, (SBM)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. □

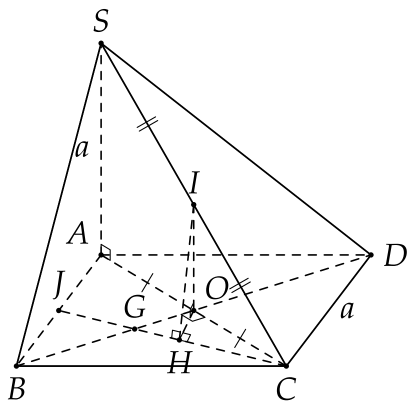
Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SC và AB.

1. Chứng minh rằng $IO \perp (ABCD)$.
2. Tính khoảng cách từ I đến CJ.

Lời giải.

1. Chứng minh rằng $IO \perp (ABCD)$.

   Ta có OI là đường trung bình của $\triangle SAC$
   $\Rightarrow \begin{cases} OI \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases}$
   $\Rightarrow OI \perp (ABCD)$.



2. Tính khoảng cách từ I đến CJ.
   Kẻ $OH \perp CJ$ tại H.
   Ta có $\begin{cases} CJ \perp OI \\ CJ \perp OH \end{cases} \Rightarrow CJ \perp (IOH) \Rightarrow CJ \perp IH \Rightarrow \mathrm{d}(I, CJ) = IH$.
   Gọi $\{G\} = BO \cap CJ$ suy ra G là trọng tâm của $\triangle ABC$.
   Ta có $OG = \dfrac{1}{3}OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Xét tam giác vuông COG có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OG^2} = \dfrac{20}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{20}}$.

Xét tam giác vuông OIH có $IH = \sqrt{OH^2 + OI^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{20} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vậy $\mathrm{d}(I, CJ) = IH = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

□

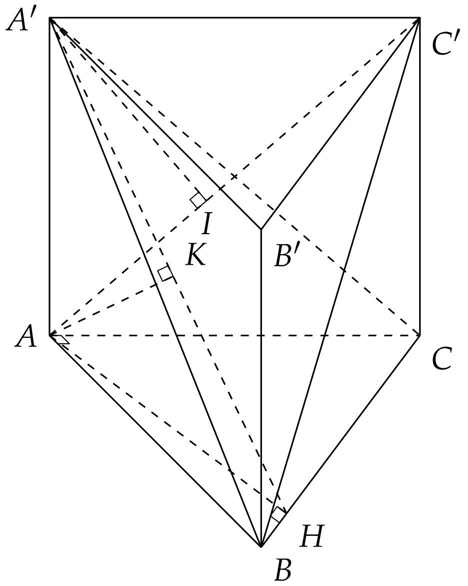
Bài 9. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.
2. Tính khoảng cách từ A tới $(A'BC)$.
3. Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Lời giải.

1. Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.

Dựng $AH \perp BC$ tại H, ta có:
$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCB'C') \Rightarrow$
$d(A,(BCB'C')) = AH$.
$\triangle ABC$ vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$
$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Kết luận $d(A,(BCB'C')) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vì $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$
$\Rightarrow d(AA',(BCB'C')) = d(A,(BCB'C')) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Vậy $d(AA',(BCB'C')) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



2. Tính khoảng cách từ A tới $(A'BC)$.
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH) \Rightarrow$
$(A'BC) \perp (A'AH)$.
$(A'BC) \cap (A'AH) = A'H$.
Dựng $AK \perp A'H, (K \in A'H) \Rightarrow AK \perp (A'BC)$.
Do đó $d(A,(A'BC)) = AK$.
Trong $\triangle A'AH$ vuông tại A có:
$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Vậy $d(A,(A'BC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
3. Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$.
Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A')$.
Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').
$AB \perp (ACC'A') \Rightarrow (ABC') \perp (ACC'A')$.
$(ABC') \cap (ACC'A') = AC'$.
Dựng $A'I \perp AC' \Rightarrow A'I \perp (ABC')$.
Do đó $d(A',(ABC')) = A'I$.
Trong $\triangle AA'C'$ vuông tại A' có:
$\dfrac{1}{A'I^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{A'C'^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow A'I = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Vậy $d(A,(A'BC)) = A'I = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
2. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).
3. Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

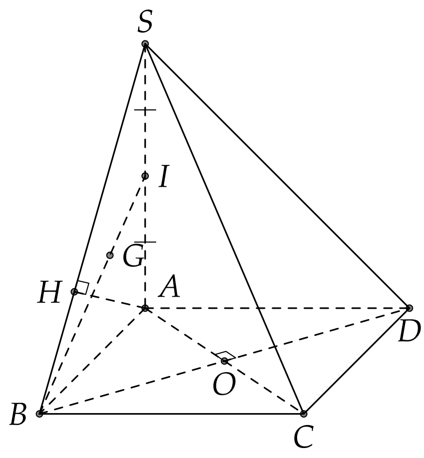
Lời giải.

1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

   Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

   Hai mặt phẳng này này vuông góc với nhau theo giao tuyến SB.
   Kẻ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$.
   Vậy: $\mathrm{d}(A,(SBC)) = AH$.
   Trong $\triangle SAB$ ta có:
   $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

   Kết luận: $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



2. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).
   Hai điểm A và O nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBC) tại B.Nên ta có:
   $\dfrac{\mathrm{d}(O,(SBC))}{\mathrm{d}(A,(SBC))} = \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

   Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

3. Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mặt phẳng (SAC).

   Ta có $BO \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{d}(B,(SAC)) = BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

   Hai điểm B và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAC) tại I với I là trung điểm của SA.

   Do đó ta có $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SAC))}{\mathrm{d}(B,(SAC))} = \dfrac{GI}{BI} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(G,(SAC)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(B,(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

   Vậy $\mathrm{d}(G,(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

□

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

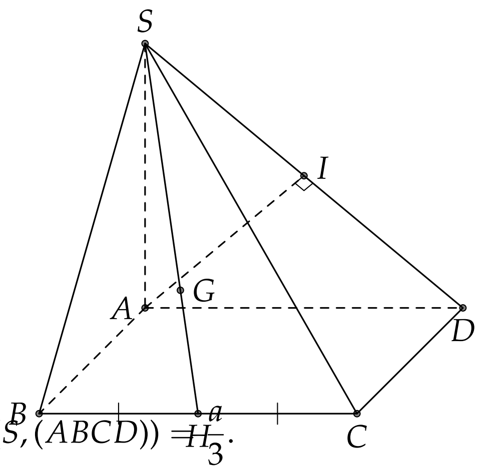
1. Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh $AI \perp (SCD)$.
2. Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SBC đến mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

1. Chứng minh $AI \perp (SCD)$.

   Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$.

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SD.
Mặt khác $AI \perp SD$ vì tam giác SAD cân tại A.
Suy ra $AI \perp (SCD)$.



2. Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SBC đến mặt phẳng $(ABCD)$.
Gọi H là trung điểm của BC.
Hai điểm S và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H nên có:

$$\frac{\mathrm{d}(G,(ABCD))}{\mathrm{d}(S,(ABCD))} = \frac{GH}{SH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}(G,(ABCD)) = \frac{1}{3}\mathrm{d}(S,(ABCD)) = \frac{a}{3}.$$

Vậy $\mathrm{d}(G,(ABCD)) = \frac{a}{3}$.

□

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của SC, CD.

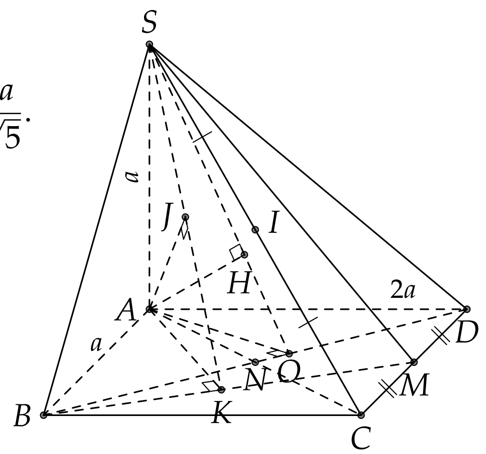
1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).
2. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD).
3. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).

Lời giải.

1. Tính $\mathrm{d}(A,(SBD))$.
Kẻ $AO \perp BD$ tại O.
Có $BD \perp AO$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$.
Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SO.
Dựng $AH \perp SO$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBD)$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.

Trong tam giác ABD có:

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AO = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$



Trong $\triangle SAO$ có:
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow$$
$AH = \frac{2a}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \frac{2a}{3}$.

2. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD).
Gọi $N = AC \cap BD$.
Vì hai điểm A và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBD) tại N, nên có:
$$\frac{\mathrm{d}(C,(SBD))}{\mathrm{d}(A,(SBD))} = \frac{CN}{AN} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}(C,(SBD)) =$$
$\mathrm{d}(A,(SBD)) = \frac{2a}{3}$.

Vì hai điểm I và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBD) tại S, nên có:
$\dfrac{\mathrm{d}(I,(SBD))}{\mathrm{d}(C,(SBD))} = \dfrac{SI}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(C,(SBD)) = \dfrac{a}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(I,(SBD)) = \dfrac{a}{3}$.

3. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).
Kẻ $AK \perp BM$, $AJ \perp SK$. Suy ra $AJ \perp (SBM) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBM)) = AJ$.
Ta có: $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.
Ta có:

$$\begin{aligned}
& S_{ABCD} = S_{\triangle ABM} + 2S_{\triangle BCM} \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = \frac{1}{2}AK \cdot BM + 2 \cdot \frac{1}{2}BC \cdot CM \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{2} \cdot AK + \frac{a^2}{2} \\
\Rightarrow\ & AK = \frac{6a}{\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Trong $\triangle SAK$ có: $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{17}{36a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{53}{36a^2} \Rightarrow AJ = \dfrac{6a}{\sqrt{53}}$.
Kết luận: $\mathrm{d}(A,(SBM)) = \dfrac{6a}{\sqrt{53}}$.

□

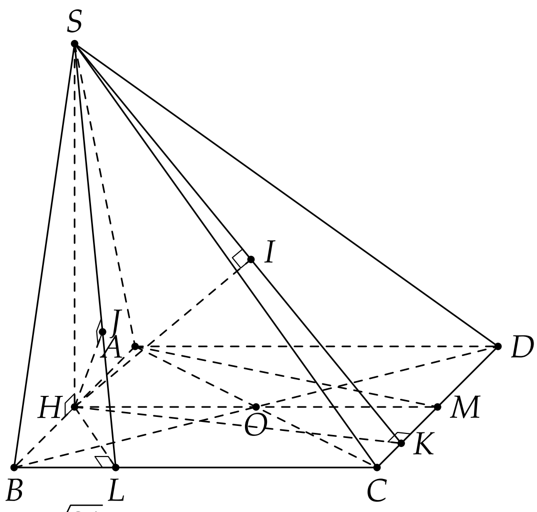
Bài 13. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của AB dựng SH vuông góc với $(ABCD)$ với $SH = a$.

1. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).
2. Tính khoảng cách từ O đến (SCD).
3. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Lời giải.

1.

Tính khoảng cách từ H đến (SCD).
Kẻ $HK \perp CD$ tại K. Ta có
$\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow (SCD) \perp SHK$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SK.
Kẻ $HI \perp SK$ tại I suy ra $HI \perp (SCD)$.
Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HI$.
Vì $AB \parallel CD$ nên $\mathrm{d}(H,CD) = \mathrm{d}(A,CD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, do $\triangle ACD$ đều. Trong $\triangle SHK$ vuông tại H ta có



$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

2. Tính khoảng cách từ O đến (SCD).
Gọi M là giao điểm của HO và CD, O là tâm đối xứng của đáy, suy ra O là trung điểm của HM, do đó
$$\frac{\mathrm{d}(O,(SCD))}{\mathrm{d}(H,(SCD))} = \frac{OM}{HM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

3. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).
Muốn tính khoảng cách từ A đến (SBC) ta phải tính khoảng cách từ H đến (SBC) trước sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách.
Kẻ $HL \perp BC$ tại L, ta có $\begin{cases} BC \perp HL \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHL) \Rightarrow (SBC) \perp (SHL)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SL.
Kẻ $HJ \perp SL$ tại J suy ra $HJ \perp (SBC)$, từ đó $\mathrm{d}(H,(SBC)) = HJ$.
Ta có $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{HBL} = 60^\circ$.
Trong tam giác HBL có $HL = BH \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Trong $\triangle SHL$ vuông tại H ta có
$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HL^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow HJ = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$
Hai điểm A và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với (SBC) tại B nên có
$$\frac{\mathrm{d}(A,(SBC))}{\mathrm{d}(H,(SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

□

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, đáy là hình thang vuông tại A và B, có $AB = BC = a$, $AD = 2a$.

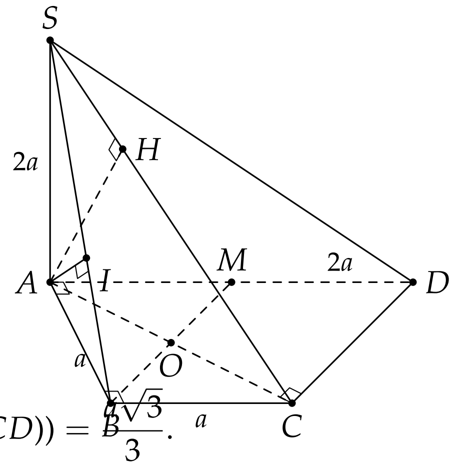
1. Tính khoảng cách từ A, B đến (SCD).
2. Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

Lời giải.

1. Tính khoảng cách từ A, B đến (SCD).
   Đáy được vẽ lại ở hình sau, dễ dàng chứng minh được $CD \perp AC$.
   Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$, suy ra $(SCD) \perp (SAC)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC. Dựng $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy $\mathrm{d}(A, (SCD)) = AH$.
   Trong $\triangle SAC$ ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

   Kết luận $\mathrm{d}(A, (SCD)) = AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
   Gọi M là trung điểm của AD
   thì $BCDM$ là hình bình hành, suy ra $BM \parallel CD$.
   Gọi O là giao của BM và AC. Vì $MB \parallel CD \Rightarrow BM \parallel (SCD)$,
   suy ra $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \mathrm{d}(O, (SCD))$.
   Hai điểm O và A nằm trên đường thẳng có giao điểm với (SCD) tại C
   nên ta có

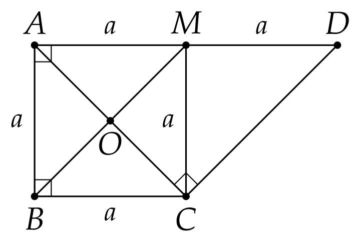


$$\frac{\mathrm{d}(O, (SCD))}{\mathrm{d}(A, (SCD))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(O, (SCD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

   Kết luận $\mathrm{d}(B, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

2. Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

   $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}(AD, (SBC)) = \mathrm{d}(A, (SBC))$.
   Ta có $BC \perp (SAB)$ suy ra $(SBC) \perp (SAB)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SB.
   Dựng $AI \perp SB$, $I \in SB$, suy ra $AI \perp (SBC)$. Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AI$.
   Trong $\triangle SAB$ có



$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AI = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

   Kết luận $\mathrm{d}(AD, (SBC)) = AI = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

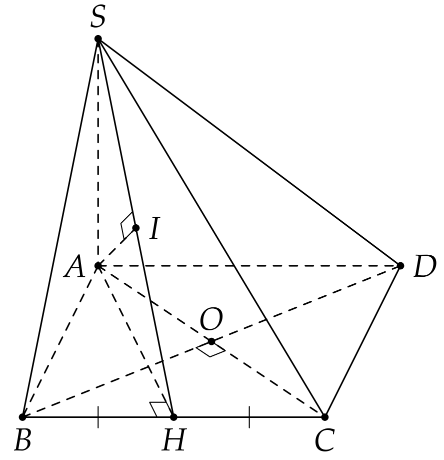
□

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi với $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $BD = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60°. Tính

1. Đường cao của hình chóp.
2. Khoảng cách từ A đến (SBC).

Lời giải.

1.



Gọi $O = AC \cap BD$, kẻ $AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Lại có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SH \perp BC, AH \perp BC \\ SH \subset (SBC), AH \subset (ABCD) \end{cases}$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(SBC), (ABCD)$ là $\widehat{AHS}$.

Do $\triangle AOB$ nửa tam giác đều nên

$$BO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Do $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AH = BO = \dfrac{a}{2}$.

Ta có $\tan \widehat{AHS} = \dfrac{SA}{AH} \Rightarrow SA = \tan 60^\circ \cdot AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy đường cao của hình chóp là $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Hạ $AI \perp SH \Rightarrow AI \perp (SBC)$. Vậy $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AI$. Ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

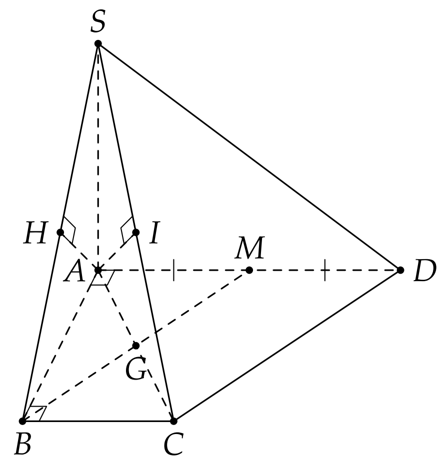
Kết luận $\mathrm{d}(A, (SBC)) = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

Bài 16. ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) theo a.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AD, ta có

$$MA = MC = MD \Rightarrow MC = \frac{1}{2}AD.$$

Vậy $\triangle ACD$ vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.

Kết luận $\triangle SCD$ vuông tại C.

Dựng $AI \perp SC$ tại I.

Ta có $\begin{cases} AI \perp SC \\ AI \perp CD \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SCD)) = AI$.

Trong $\triangle SAC$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AI = a.$$

Gọi $G = BM \cap AC$, ta có $BM \parallel (SCD)$. Vậy $\mathrm{d}(B,(SCD)) = \mathrm{d}(G,(SCD))$.
Hai điểm A và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại C nên

$$\frac{\mathrm{d}(G,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \frac{GC}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\mathrm{d}(G,(SCD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SCD)) = \frac{a}{2}$.
Trong $\triangle SAB$ vuông tại A có

$$SH \cdot SB = SA^2 \Leftrightarrow \frac{SH \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}.$$

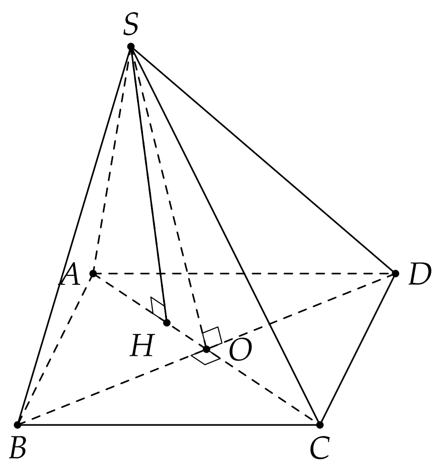
Hai điểm B và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại S nên $\frac{\mathrm{d}(H,(SCD))}{\mathrm{d}(B,(SCD))} = \frac{HS}{BS} = \frac{2}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \frac{2}{3}\mathrm{d}(B,(SCD)) = \frac{a}{3}$. □

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và $SA = SB = SD = a$.

1. Chứng minh (SAC) vuông góc với $(ABCD)$.
2. Chứng minh tam giác SAC vuông.
3. Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.

Lời giải.

1. Chứng minh (SAC) vuông góc với $(ABCD)$.
   Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, ta có $\triangle SBD$ cân tại S có O là trung điểm BD nên $SO \perp BD$, lại có $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$, suy ra $BD \perp (SAC)$.
   Mà $BD \subset (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.



2. Chứng minh tam giác SAC vuông.
   Ta chứng minh $SO = AO = OC$.
   Do $\triangle ABD$ cân tại A có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên suy ra $\triangle ABD$ đều.
   $\triangle ABD$ đều cạnh a có AO là đường trung tuyến nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Xét $\triangle SOD$ vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

   Suy ra $SO = AO = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mà SO là đường trung tuyến của $\triangle SAC$ nên $\triangle SAC$ vuông tại S.

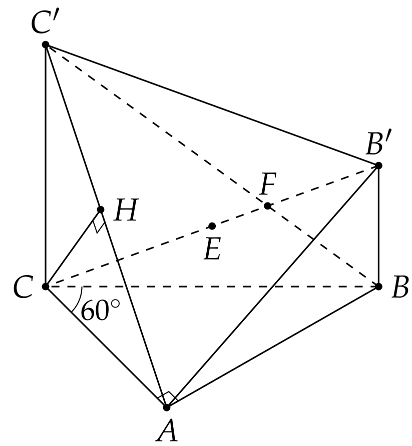
3. Tính khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.
   Xét hình chóp $S.ABD$, ta có $SA = SB = SD = a$, $AB = BD = DA = a$ nên $S.ABD$ là hình chóp đều.
   Gọi H là trọng tâm của $\triangle ABD$ suy ra $SH \perp (ABD)$ (theo tính chất của hình chóp đều), suy ra $SH \perp (ABCD)$ tại H, do đó $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SH$.
   Vì H là trọng tâm $\triangle ABD$ nên $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
   Trong $\triangle SHA$ vuông tại H, ta có
   $$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$
   Vậy $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

□

Bài 18. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Dựng hai đoạn $BB' = a$, $CC' = 2a$ cùng vuông góc với mặt phẳng (P) và ở cùng một bên với (P).

1. Tính khoảng cách từ C đến (ABB').
2. Tính khoảng cách từ trung điểm của $B'C$ đến mặt phẳng (ACC').
3. Tính khoảng cách từ B' đến (ABC').

Lời giải.



1. Trong tam giác ABC vuông tại A ta có
   $$AC = BC \cdot \cos C = a \text{ và } AB = BC \cdot \sin C = a\sqrt{3}.$$
   Vì $CA \perp AB$ và $CA \perp BB'$ nên $CA \perp (ABB')$.
   Do đó khoảng cách từ C đến (ABB') là
   $$\mathrm{d}(C,(ABB')) = CA = a.$$
2. Gọi E là trung điểm của $B'C$.
   Vì $BB' \parallel CC'$ nên $BB' \parallel (ACC')$.
   Cho nên $\mathrm{d}(B',(ACC')) = \mathrm{d}(B,(ACC'))$.
   Vì $AB \perp AC$ và $AB \perp CC'$ nên $AB \perp (ACC')$.
   Vậy $\mathrm{d}(B(ACC')) = AB = a\sqrt{3}$.
   Lại có EB' cắt mặt phẳng (ACC') tại C nên
   $$\frac{\mathrm{d}(E,(ACC'))}{\mathrm{d}(B',(ACC'))} = \frac{\mathrm{d}(E,(ACC'))}{\mathrm{d}(B,(ACC'))} = \frac{EC}{B'C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(E,(ACC')) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(B,(ACC')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$
3. Gọi $F = B'C \cap BC'$.
   Trong tam giác ACC' kẻ $CH \perp AC'$.
   Khi đó $CH \perp AC'$ và $CH \perp AB$ (vì $AB \perp (ACC')$) nên $CH \perp (ABC')$, suy ra $\mathrm{d}(C,(ABC')) = CH$.
   Trong tam giác ACC' vuông tại C ta có
   $$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{C'C^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow CH = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Mặt khác $\triangle B'FB \backsim \triangle CFC'$ nên $\dfrac{FB'}{FC} = \dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{1}{2}$.
Vì $B'C$ cắt (ABC') tại F nên

$$\frac{\mathrm{d}(B',(ABC'))}{\mathrm{d}(C,(ABC'))} = \frac{FB'}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}(B',(ABC')) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(C,(ABC')) = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

□

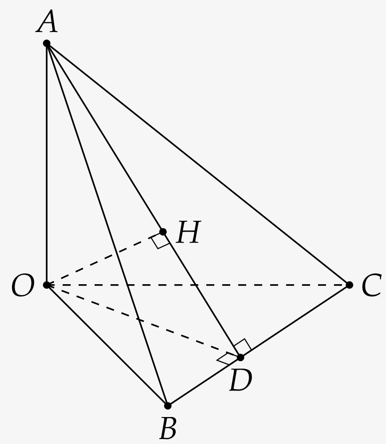
DẠNG 5.1. Tính khoảng cách nhờ tính chất của tứ diện vuông

Định nghĩa 1. Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông.

Trong tứ diện vuông có một tính chất đáng chú ý sau đây.
Tính chất 1. Giả sử $O.ABC$ là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$). Khi đó đường cao OH của tứ diện $O.ABC$ được tính theo công thức

$$\boxed{\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.}$$

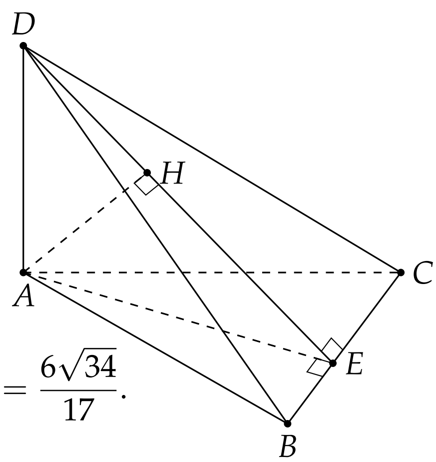
Chứng minh.
Dựng $OD \perp BC$ ($D \in BC$), dựng $OH \perp AD$ ($H \in AD$).
Ta có $BC \perp OD$ và $BC \perp OA$ nên $BC \perp (OAD)$, suy ra $(ABC) \perp (OAD)$.
Hai mặt phẳng (ABC) và (OAD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AD có $OH \perp AD$ nên suy ra $OH \perp (ABC)$.
Trong tam giác vuông OBC ta có $\dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.
Trong tam giác vuông OAD ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OA^2}$.
Vì vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.



Nhận xét. *Sử dụng tính chất này để tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng trong nhiều trường hợp tỏ ra khá tiện lợi. Đây là công thức đẹp và cũng hay được sử dụng. Trong đề thi đại học những năm vừa qua có nhiều bài sử dụng công thức này, chúng ta lần lượt xem những bài dưới đây.*

Bài 19. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

Lời giải.
Ta có $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.
Tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau tại A.
Trong tam giác ABC kẻ $AE \perp BC$ và trong tam giác ADE kẻ $AH \perp DE$.
Khi đó $\mathrm{d}(A,(BCD)) = AH$.
Lại có



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{17}{72} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

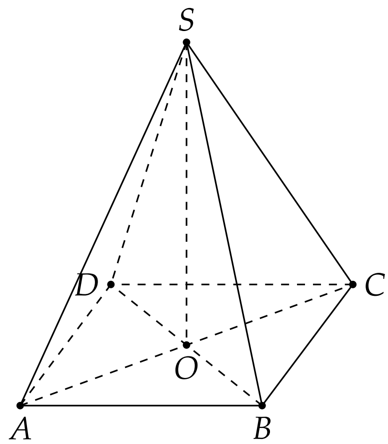
Vậy $\mathrm{d}(A,(BCD)) = \dfrac{6\sqrt{34}}{17}$.

□

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}$.

1. Tính khoảng cách từ các điểm O và A đến mặt phẳng (SBC).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Lời giải.



1. Từ giả thiết ta có tam giác BCD đều nên $OB = \dfrac{a}{2}$ và $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tứ diện $OSBC$ có OS, OB, OC đôi một vuông góc với nhau tại O nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}^2(O,(SBC))} &= \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \\ &= \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{64}{9a^2}.\end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = \dfrac{3a}{8}$.
Ta có

$$\frac{\mathrm{d}(A,(SBC))}{(O,(SBC))} = \frac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = 2\mathrm{d}(O,(SBC)) = 2 \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3a}{4}.$$

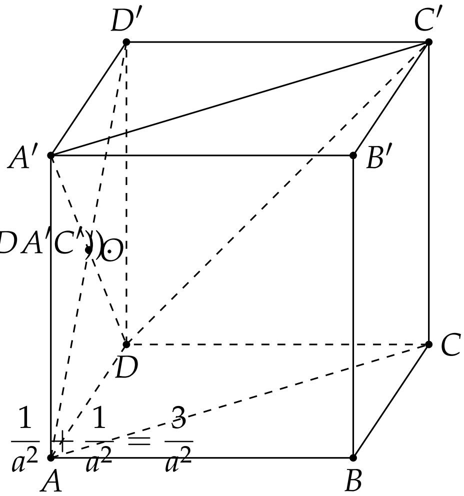
2. Vì $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$. Mà $SB \subset (SBC)$ nên

$$\mathrm{d}(AD, SB) = \mathrm{d}(AD,(SBC)) = \mathrm{d}(A,(SBC)) = \frac{3a}{4}.$$

□

Bài 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC'.

Lời giải.



Gọi $O = AD' \cap A'D$. Suy ra O là trung điểm của AD'.
Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(A,(DA'C'))}{\mathrm{d}(D',(DA'C'))} = \dfrac{AO}{D'O} = 1$ nên $\mathrm{d}(A,(DA'C')) = \mathrm{d}(D',(DA'C'))$.
Vì $AC \parallel A'C'$ nên $AC \parallel (DA'C')$. Do đó

$$\mathrm{d}(AC, DC') = \mathrm{d}(AC,(DA'C')) = \mathrm{d}(A,(DA'C')) = \mathrm{d}(D',(DA'C')).$$

Tứ diện $D'A'C'D$ có $D'A'$, $D'C'$, $D'D$ đôi một vuông góc nhau tại D' nên

$$\frac{1}{\mathrm{d}^2(D',(DA'C'))} = \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} + \frac{1}{D'D^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(D',(DA'C')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

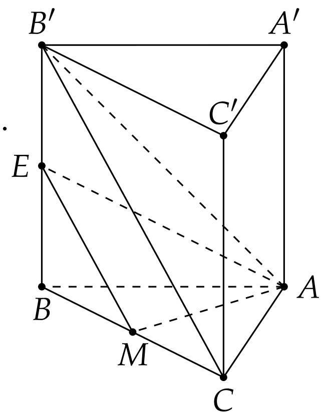
Vậy $\mathrm{d}(AC, DC') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

□

Bài 22. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.
2. Tính khoảng cách từ điểm M đến $(AB'C)$.

Lời giải.



1. Gọi E là trung điểm của BB', ta có $B'C \parallel (AME)$. Do đó

   $$\mathrm{d}(AM, B'C) = \mathrm{d}(B'C,(AME)) = \mathrm{d}(B',(AME)) = \mathrm{d}(B,(AME)).$$

   Tứ diện $BAME$ có BA, BM, BE đôi một vuông góc với nhau tại B nên

   $$\frac{1}{\mathrm{d}^2(B,(AME))} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{7}{a^2}$$

   $$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(B,(AME)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

   Vậy $\mathrm{d}(AM, B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

2. Ta có $\dfrac{\mathrm{d}(M,(AB'C))}{\mathrm{d}(B,(AB'C))} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ nên $\mathrm{d}(M,(AB'C)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(B,(AB'C))$.
   Tứ diện $BAB'C$ có BA, BB', BC đôi một vuông góc với nhau tại B nên

   $$\frac{1}{\mathrm{d}^2(B,(AB'C))} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{2a^2}$$

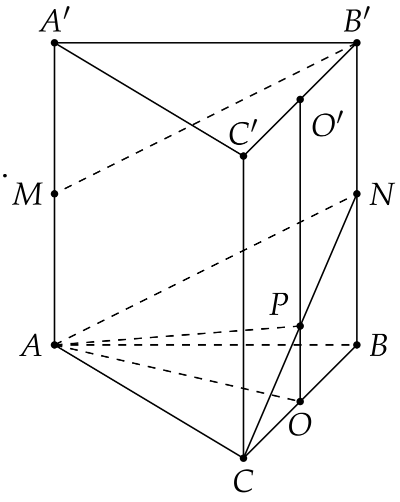
   $$\Rightarrow \quad \mathrm{d}(B,(AB'C)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

   Vậy $\mathrm{d}(M,(AB'C)) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{10}}{5} = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

□

Bài 23. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'M$ và CN.

Lời giải.



Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.
Gọi P là giao điểm của OO' và CN.
Vì $B'M \parallel AN$ nên $B'M \parallel (CAN)$. Do đó

$$\mathrm{d}(BM', CN) = \mathrm{d}(B'M, (CAN)) = \mathrm{d}(B', (CAN)) = \mathrm{d}(B, (CAN)).$$

Lại có $\dfrac{\mathrm{d}(B,(CAN))}{\mathrm{d}(O,(CAN))} = \dfrac{BC}{OC} = 2$ nên $\mathrm{d}(B,(CAN)) = 2\mathrm{d}(O,(CAN))$.
Vì $(CAN) \equiv (CAP)$ và tứ diện $OACP$ có OA, OC, OP đôi một vuông góc với nhau tại O nên

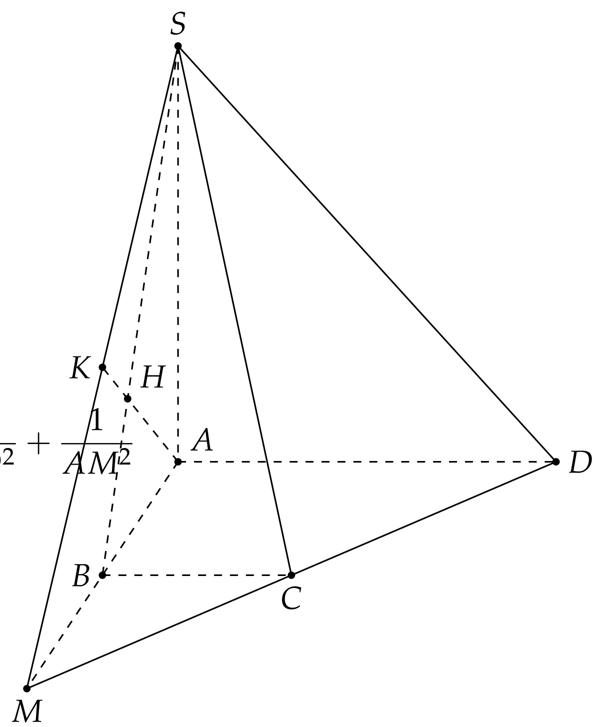
$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}^2(O,(CAN))} &= \frac{1}{\mathrm{d}^2(O,(CAP))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OP^2}\\ &= \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{64}{3a^2}.\end{aligned}$$

Suy ra $\mathrm{d}(O,(CAN)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $\mathrm{d}(B'M, CN) = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{8} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. □

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

Lời giải.



Gọi M là giao điểm của AB với CD; K là giao điểm của AH với SM. Dễ thấy B là trung điểm của AM.

Ta có $\dfrac{BH}{BS} = \dfrac{BH \cdot BS}{BS^2} = \dfrac{BA^2}{BS^2} = \dfrac{a^2}{3a^2} = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra H là trọng tâm của tam giác SAM.

Khi đó $\dfrac{\mathrm{d}(H,(SCD))}{\mathrm{d}(A,(SCD))} = \dfrac{KH}{KA} = \dfrac{1}{3}$.
Tứ diện $ASDM$ có AS, AD, AM đôi một vuông góc với nhau tại A nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}^2(A,(SCD))} &= \frac{1}{\mathrm{d}^2(A,(SDM))} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2}\\ &= \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

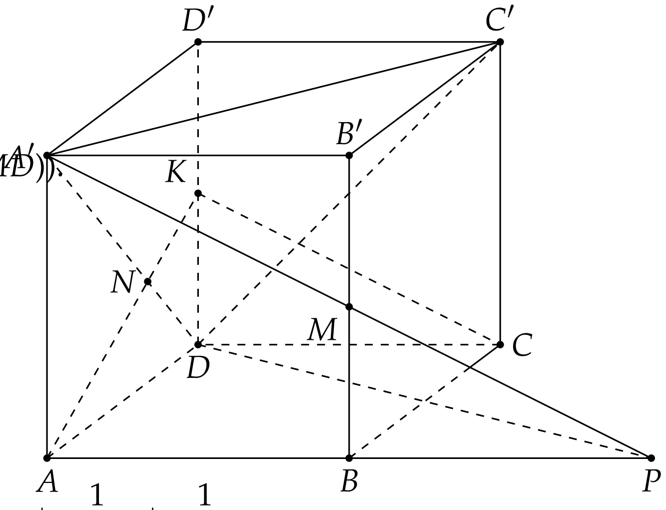
Suy ra $\mathrm{d}(A,(SCD)) = a$.

Vậy $\mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}(A,(SCD)) = \dfrac{a}{3}$.

□

Bài 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của BB'.
Ta có $A'M \parallel KC$ nên $CK \parallel (A'MD)$. Do đó

$$\mathrm{d}(CK, A'D) = \mathrm{d}(CK, (A'MD)) = \mathrm{d}(K, (A'MD)).$$

Gọi N là giao điểm của AK với $A'D$; P là giao điểm của AB với $A'M$.
Khi đó $\dfrac{\mathrm{d}(K, (A'MD))}{\mathrm{d}(A, (A'MD))} = \dfrac{NK}{NA} = \dfrac{1}{2}$.
Tứ diện $AA'DP$ có AA',(AD), AP đôi một vuông góc với nhau tại A nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{d}^2(A, (A'MD))} &= \frac{1}{\mathrm{d}^2(A, (A'PD))} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AP^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2}.\end{aligned}$$

Suy ra $\mathrm{d}(A, (A'MD)) = \dfrac{2a}{3}$.
Vậy $\mathrm{d}(CK, A'D) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(A, (A'MD)) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2a}{3} = \dfrac{a}{3}$. □

Bài 6. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

A. Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1. Hai đường thẳng a và b không cùng thuộc một mặt phẳng (không có mặt phẳng nào chứa cả a và b) thì ta nói hai đường thẳng a và b chéo nhau.

Định nghĩa 2. Nếu có đường thẳng d lần lượt vuông góc với cả hai đường thẳng a và b chéo nhau lần lượt tại M và N thì đường thẳng d gọi là đường vuông góc của hai đường thẳng chéo nhau a và b, còn độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

B. Bài tập rèn luyện

DẠNG 6.1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp chung là ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

1. Nếu đường thẳng a thuộc một mặt phẳng (P) và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách từ đường thẳng b đến mặt phẳng (P).
   Chọn một điểm M thích hợp thuộc b sao cho có thể tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) một cách dễ dàng. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

   ⚠ *Nếu không tìm được một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia thì ta phải dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.*

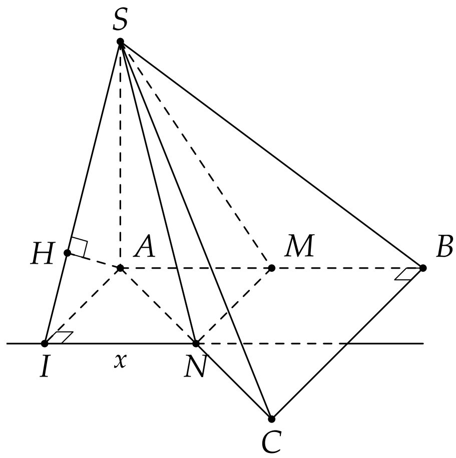
2. Nếu đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P), đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q) mà hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách giữa (P) và (Q).

3. Trường hợp tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b với a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp ta làm như sau: Gọi I là giao điểm của đường thẳng a với mặt đáy. Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b. Khi đó b song song với mặt phẳng (P) chứa a và Δ. Chọn một điểm M trên b sao cho có thể tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) một cách dễ dàng. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Lời giải.

Ta có mp$(SAB) \cap$ mp$(SAC) = SA$ và hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.
Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N, suy ra $MN \parallel BC$ và N là trung điểm của AC.
Trong $\triangle ABC$ có $MN = \dfrac{1}{2}BC = a$, $BM = \dfrac{1}{2}AB = a$.
Ngoài ra $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \perp BC, AB \perp AB \\ SB \subset (SBC), AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.
Xét $\triangle SAB$ vuông tại A ta có $SA = AB \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

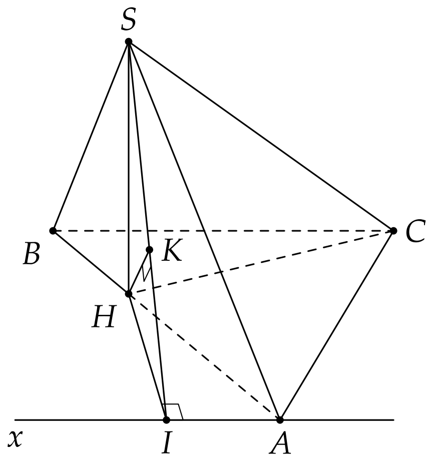


Yêu cầu của đề bài là tính khoảng cách giữa AB và SN, đây là bài toán tính khoảng cách giữa cạnh bên SN và cạnh đáy AB. Do chưa có mặt phẳng nào chứa một trong hai đường trên và song song với đường kia nên ta phải dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Từ N (giao điểm của cạnh bên SN với mặt đáy (ABC)) kẻ $Nx \parallel AB$, suy ra $AB \parallel (SNx)$ (vì $Nx \subset (SNx)$).
Khi đó $\mathrm{d}(AB, SN) = \mathrm{d}(AB,(SNx)) = \mathrm{d}(A,(SNx))$.
Dựng $AI \perp Nx$ tại I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SI.
Vì $\begin{cases} Nx \perp AI \\ Nx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Nx \perp (SAI) \Rightarrow (SNx) \perp (SAI)$. Hai mặt phẳng (SNx) và (SAI) vuông góc với nhau có giao tuyến SI mà $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SNx)$. Vậy $d(A,(SNx)) = AH$.
Ta có $AI = \dfrac{1}{2}BC = a$. Trong $\triangle SAI$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{12a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{13a^2}{12} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.
Vậy $\mathrm{d}(AB, SN) = \mathrm{d}(A,(SNx)) = AH = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$. □

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Lời giải.



Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác AHC ta có

$$\begin{aligned} CH^2 &= CA^2 + AH^2 - 2 \cdot CA \cdot AH \cdot \cos \widehat{CAH} \\ &= a^2 + \frac{4a^2}{9} + 2 \cdot a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \end{aligned}$$

Suy ra $CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.
Ta có HC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCH} = 60^\circ$.
Trong tam giác SCH vuông tại H có $SH = CH \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.

Yêu cầu của đề bài là tính khoảng cách giữa SA và BC, đây là bài toán tính khoảng cách giữa cạnh bên SA và cạnh đáy BC. Do chưa có mặt phẳng nào chứa một trong hai đường trên và song song với đường kia nên ta phải dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

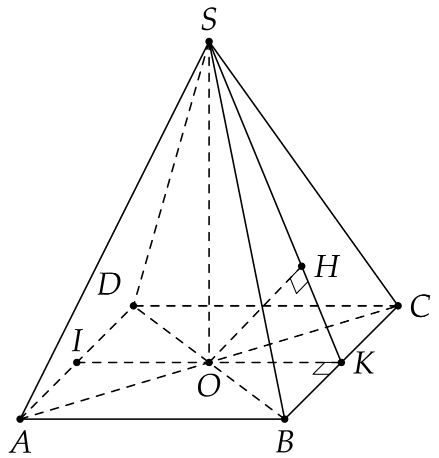
Từ A (giao điểm của cạnh bên SA với mặt đáy (ABC)) kẻ $Ax \parallel BC$, suy ra $BC \parallel (SAx)$ (vì $Ax \subset (SAx)$).
Khi đó $\mathrm{d}(BC, SA) = \mathrm{d}\,(BC, (SAx)) = \mathrm{d}\,(B, (SAx))$.

Vì BC song song với mặt phẳng (SAx) nên khoảng cách từ mọi điểm trên đường thẳng BC đến mặt phẳng (SAx) đều bằng nhau. Vì sao lại chọn điểm B mà không chọn điểm khác (chẳng hạn là điểm C)? Vì điểm B nằm trên đường thẳng AB có chứa điểm H là hình chiếu của đỉnh nên việc tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SAx) là khá dễ dàng. Thông qua công thức tính tỉ số khoảng cách thì ta tính được khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAx).

Dựng $HI \perp Ax$ tại I. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SI.
Vì $\begin{cases} Ax \perp HI \\ Ax \perp SH \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (SHI) \Rightarrow (SAx) \perp (SHI)$. Hai mặt phẳng (SAx) và (SHI) vuông góc với nhau có giao tuyến SI mà $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAx)$. Vậy $d\,(H, (SAx)) = HK$.
Trong $\triangle AIH$ vuông tại I ta có $HI = HA \sin 60^\circ = \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Trong $\triangle SIH$ vuông tại H có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{9}{21a^2} + \dfrac{9}{3a^2} = \dfrac{24a^2}{7} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}}$.
Đường thẳng BH cắt mặt phẳng (SAx) tại A nên $\dfrac{\mathrm{d}\,(B, (SAx))}{\mathrm{d}\,(H, (SAx))} = \dfrac{BA}{HA} = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $\mathrm{d}(BC, SA) = \mathrm{d}\,(B, (SAx)) = \dfrac{3}{2}\mathrm{d}\,(H, (SAx)) = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. □

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC. Chứng minh $(SIK) \perp (SBC)$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải.



Gọi O là giao điểm của AC và BD.
Ta có $OA = OB = OC = OD$ và $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$ nên O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ hay $SO \perp (ABCD)$.
Ta có $\begin{cases} BC \perp IK \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow (SBC) \perp (SIK)$ (vì $BC \subset (SBC)$).
Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$ nên

$$\mathrm{d}(AD, SB) = \mathrm{d}\left(AD, (SBC)\right) = \mathrm{d}\left(I, (SBC)\right).$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SK nên ta có

$$\begin{cases} OH \perp SK \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow \mathrm{d}\left(O, (SBC)\right) = OH.$$

Trong $\triangle SAO$ vuông tại O ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

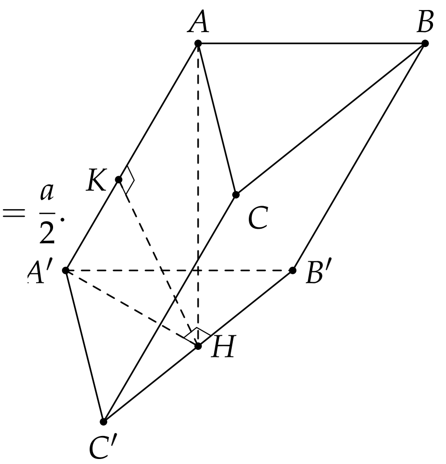
Trong $\triangle SOK$ vuông tại O có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{4}{6a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{14a^2}{3} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{42}}{14}$.

Đường thẳng OI cắt mặt phẳng (SBC) tại K nên $\dfrac{\mathrm{d}\left(I, (SBC)\right)}{\mathrm{d}\left(O, (SBC)\right)} = \dfrac{IK}{OK} = 2$.

Vậy $\mathrm{d}(AD, SB) = \mathrm{d}\left(I, (SBC)\right) = 2\mathrm{d}\left(O, (SBC)\right) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$. □

Bài 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ theo a.

Lời giải.



Do $AH \perp (A'B'C')$ nên góc giữa AA' và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AA'H} = 30^\circ$.
Xét tam giác vuông AHA' có

$$AA' = a, A'H = AA' \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = AA' \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

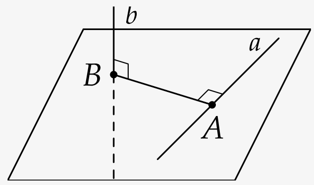
Do $\triangle A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a, H thuộc $B'C'$ và $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $A'H$ vuông góc với $B'C'$.
Mặt khác $AH \perp B'C'$ nên $B'C' \perp (AA'H)$.
Kẻ đường cao HK của tam giác $AA'H$ thì HK chính là khoảng cách giữa AA' và $B'C'$.
Ta có $AA' \cdot HK = A'H \cdot AH \Rightarrow HK = \dfrac{A'H \cdot AH}{AA'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

DẠNG 6.2. Xác định đường vuông góc chung

Ta có các trường hợp sau đây:

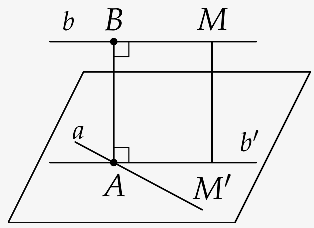
1. Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.



- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
- Trong mặt phẳng (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa a và b.

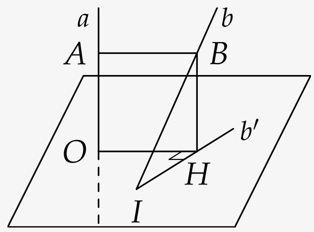
2. Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và không vuông góc với nhau.

Cách 1:



- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.
- Lấy điểm M tùy ý trên b, dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A. Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

Cách 2:



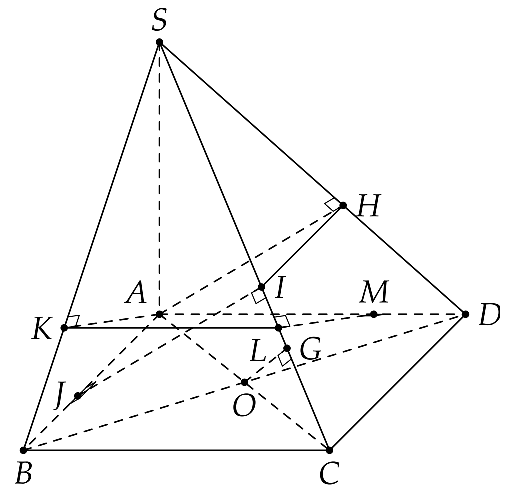
- Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I.
- Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên (α).
- Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b', H \in b'$.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Độ dài AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = h$ và vuông góc với đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SB và CD. b) AD và SB. c) AB và SD.

d) SC và BD. e) SC và AB. f) SC và AD

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.
   Mà $BC \perp CD$. Do đó BC là đường vuông góc chung của SB và CD. Vậy $\mathrm{d}(SB, CD) = BC = a$.
2. Trong ΔSAB kẻ $AK \perp SB$ tại K. $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp AK$.
   Do đó AK là đường vuông góc chung của SB và AD.
   Trong ΔSAB vuông tại A có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+h^2}{a^2h^2} \Rightarrow AK = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.
   Vậy $\mathrm{d}(SB, AD) = AK = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.
3. Trong tam giác SAD kẻ $AH \perp SD$ tại H. Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$.
   Do đó AH là đường vuông góc chung của SD và AB.
   Trong ΔSAD vuông tại A có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2+h^2}{a^2h^2} \Rightarrow AH = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.
   Vậy $\mathrm{d}(SD, AB) = AH = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.
4. Gọi $O = AC \cap BD$. Trong ΔSAC kẻ $OG \perp SC$ tại G.
   Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OG$.
   Do đó OG là đường vuông góc chung của SC và BD.
   Trong ΔSAC có $AC = a\sqrt{2}; CO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + 2a^2}$.
   Ta có $\Delta CGO \sim \Delta CAS$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CO}{CS} = \dfrac{OG}{SA} \Rightarrow OG = \dfrac{CO}{CS}SA = \dfrac{ah\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+h^2}}$.
   Vậy $\mathrm{d}(SC, BD) = OG = \dfrac{ah\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+h^2}}$.
5. Ta có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp SC$.
   Từ H kẻ $HI \parallel CD$. Suy ra HI và AB cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với CD.
   Trong mặt phẳng (AB, HI), kẻ $IJ \parallel AH$ cắt AB tại J.
   Ta có $\begin{cases} IJ \parallel AH \\ AH \perp SC, AH \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IJ \perp SC \\ IJ \perp AB \end{cases}$.
   Do đó IJ là đường vuông góc chung của SC và AB.
   Vậy $\mathrm{d}(SC, AB) = IJ = AH = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

6. Ta có $\begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SC.$
   Từ K kẻ $KL \parallel BC$. Suy ra KL và AD cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với BC.
   Trong mặt phẳng (AD, KL), kẻ $LM \parallel AK$, LM cắt AD tại M.
   Ta có $\begin{cases} LM \parallel AK \\ AK \perp SC, AK \perp AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} LM \perp SC \\ LM \perp AD \end{cases}.$
   Do đó LM là đường vuông góc chung của SC và AD.
   Vậy $\mathrm{d}(SC, AD) = LM = AK = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

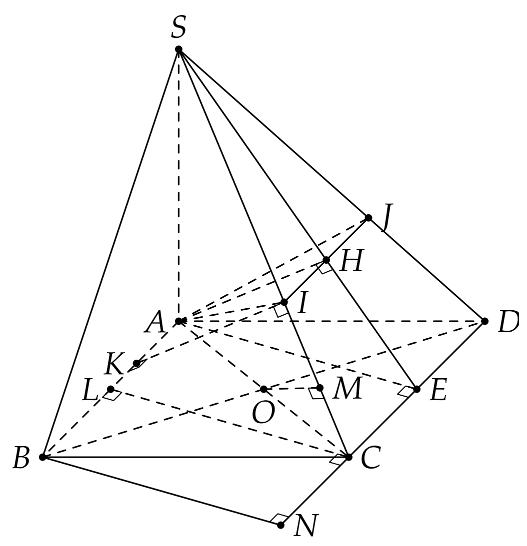
□

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120°$, $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SB và CD. b) BD và SC. c) SC và AB.

Lời giải.

1. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $CL \perp AB$ tại L (1).
   Vì $SA \perp (ABCD)$, $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow CL \perp (SAB) \Rightarrow CL \perp SB$ (2).
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ B kẻ $BN \parallel LC$ với $N \in CD$ (3).
   Từ (1), (2) và (3) thì BN là đường vuông góc chung của SB và CD và $BN = CL$.
   Vì $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120°$ nên ΔABC đều. Mà CL là đường cao nên $CL = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Vậy $\mathrm{d}(SB, CD) = BN = CL = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



2. Gọi $O = AC \cap BD$. Trong ΔSAC kẻ $OM \perp SC$ tại M (4).
   Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OM (OM \subset (SAC))$ (5).
   Từ (4) và (5) thì OM là đường vuông góc chung của SC và BD.
   Trong tam giác SAC có
   $AC = a, CO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + a^2}$.
   Ta có $\Delta CMO \sim \Delta CAS (g.g)$
   $\Rightarrow \dfrac{CO}{CS} = \dfrac{OM}{SA} \Rightarrow OM = \dfrac{CO}{CS} SA = \dfrac{ah}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$.
   Vậy $\mathrm{d}(SC, BD) = OG = \dfrac{ah}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$.

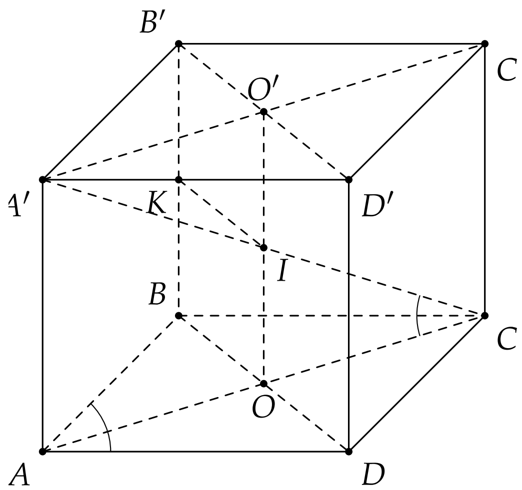
3. Kẻ $AE \perp CD$ tại E. Ta có $\begin{cases} CD \perp AE \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow (SCD) \perp (SAE)$.
   Kẻ $AH \perp SE$ tại H và có $\begin{cases} (SAE) \cap (SCD) = SE \\ (SAE) \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp SC$.
   Từ H kẻ $HI \parallel CD$. Suy ra HI và AB cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với CD.
   Trong mặt phẳng (AB, HI), kẻ $IK \parallel AJ$, IK cắt AB tại K.
   Ta có $\begin{cases} IK \parallel AH \\ AH \perp SC, AH \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \perp SC \\ IK \perp AB \end{cases}$.
   Do đó IK là đường vuông góc chung của SC và AB.
   Trong ΔSAE vuông tại A có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{3a^2 + 4h^2}{3a^2h^2} \Rightarrow AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$.
   Vậy $\mathrm{d}(SC, AB) = IK = AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$.

□

Bài 7. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc A bằng $60°$, góc giữa AC' và $(ABCD)$ bằng $60°$.

1. Tính đường cao của hình hộp đó.
2. Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

Lời giải.



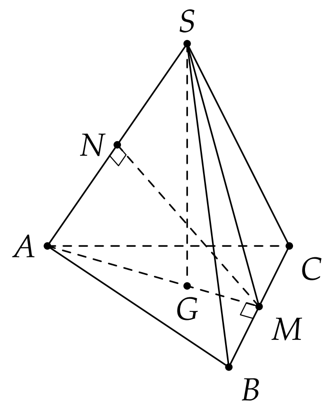
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $AA' \perp (ABCD)$.
Ta có AC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên $(ABCD)$ nên góc giữa AC' và $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'CA} = 60°$.
Vì $ABCD$ là hình thoi có $\widehat{A} = 60°$ nên ΔBAD đều $\Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$.
Trong $\Delta A'AC$ vuông tại A có $AA' = AC \tan \widehat{A'CA} = 3a$.
Gọi $O = AC \cap BD$. I là trung điểm của $A'C$. Ta có OI là đường trung bình của $\Delta A'AC$.
Do đó $OI \parallel AA' \parallel BB'$ (1).
Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BO \perp (A'AC) \Rightarrow \begin{cases} BO \perp AA' \\ BO \perp CA' \end{cases}$ (2).
Trong mặt phẳng $(BDD'B')$ kẻ $IK \parallel BO$ (3).
Từ (1), (2) và (3) ta suy ra IK là đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'.
Vậy $\mathrm{d}(A'C, BB') = IK = BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

□

Bài 8. Cho chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm giác ABC. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải.

Trong tam giác ABC đều, kéo dài AG cắt BC tại $M \Rightarrow AG \perp BC$.
Chóp $S.ABC$ đều, mà G là tâm $\triangle ABC$ nên: $SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp BC$.
Vì $BC \perp SG$ và $BC \perp AM$ nên $BC \perp (SAM)$.
Trong $\triangle SAM$ kẻ $MN \perp SA$ $(N \in SA) \Rightarrow MN \perp BC$ (vì $MN \subset (SAM)$). Do vậy, MN là đoạn vuông góc chung của BC và SA.
Trong $\triangle SAG$ vuông tại G ta có: $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.
Trong $\triangle SAM$ có: $MN \cdot SA = SG \cdot AM \Leftrightarrow MN \cdot 2a = a \cdot \dfrac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.



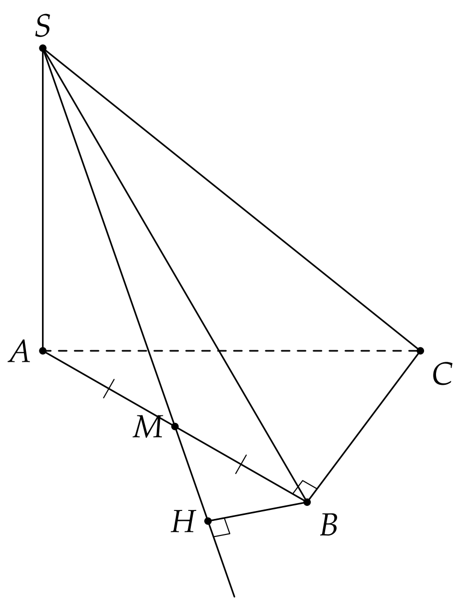
□

Bài 9. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$. Đáy ABC là tam giác vuông tại B với $BA = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Tìm độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SM và BC.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ tại B.
Dựng $BH \perp SM$ $(H \in SM)$.
Ta thấy $BC \perp BH$ $(BH \subset (SAB))$
Vậy BH chính là đoạn vuông góc chung của SM và BC.
Ta có $\triangle MHB \sim \triangle MAS \Rightarrow \dfrac{HB}{AS} = \dfrac{MB}{MS}$

$$\Leftrightarrow \frac{HB}{AS} = \frac{MB}{\sqrt{AS^2 + AM^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow HB = \frac{AS}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$



□

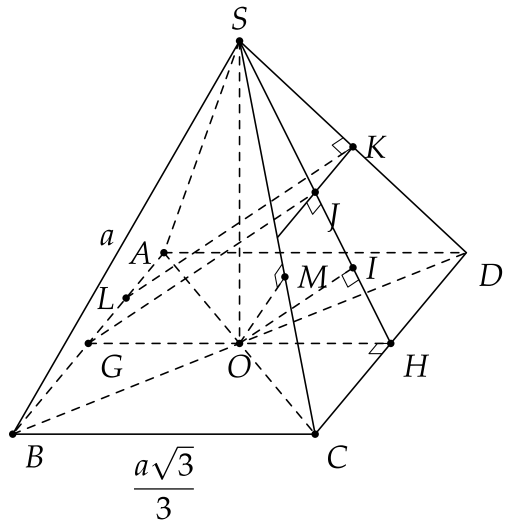
Bài 10. Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi $ABCD$ có tâm là O, cạnh a và $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại O, lấy điểm S sao cho $SB = a$. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng

1. BD và SC.

2. AB và SD.

Lời giải.

1. Dễ dàng chứng minh được $BD \perp (SAC)$ (vì $BD \perp AC$, $BD \perp SO$).
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OM \perp SC$, $(M \in SC)$, suy ra OM là đoạn vuông góc chung của SC và BD.
Trong $\triangle SOB$ vuông tại O có:
$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$
Trong $\triangle BOC$ vuông tại O có:
$$OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$
Trong $\triangle SOC$ vuông tại O có: $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
$$OM \cdot SC = OS \cdot OC \Leftrightarrow OM \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

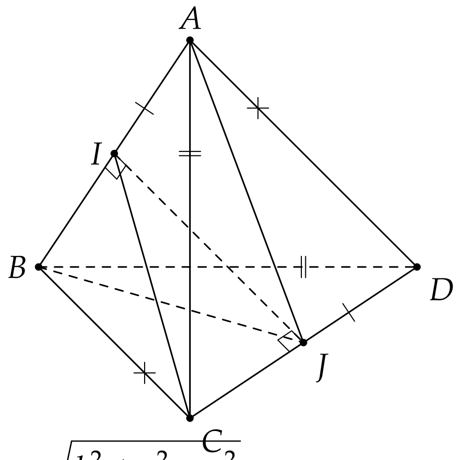


2. Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có
$$\begin{cases} CD \perp GH \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SGH) \Rightarrow (SCD) \perp (SGH).$$
Từ O dựng $OI \perp SH$ là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc (SCD) và (SGH), suy ra $OI \perp (SCD)$.
Trong mặt phẳng (SGH), kẻ $GJ \parallel OI$ $(J \in SH) \Rightarrow GJ \perp (SCD)$.
Từ J dựng đường thẳng song song với CD cắt SD tại K. Suy ra AB và JK cùng thuộc một mặt phẳng. Trong mặt phẳng (AB, JK) dựng $KL \parallel GJ$ $(L \in AB)$. Suy ra KL là đoạn vuông góc chung của AB và SD.
Thật vậy: Vì $GJ \perp (SCD) \Rightarrow \begin{cases} GJ \perp SD \\ GJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} GJ \perp SD \\ GJ \perp AB\ (AB \parallel CD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} KL \perp SD \\ KL \perp AB. \end{cases}$
Trong $\triangle SOH$: $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{3}{2a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{11}{2a^2} \Rightarrow OI = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.
$\Rightarrow GJ = 2OI = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$.
Kết luận: $\mathrm{d}(AB, SD) = \dfrac{2a\sqrt{22}}{11}$.

□

Bài 11. Cho tứ diện $ABCD$ với $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Lời giải.



Ta có: $\triangle CAB = \triangle BDA$ (c.c.c) nên hai đường trung tuyến CI và DI tương ứng bằng nhau, nên tam giác ICD cân tại I. Suy ra: $IJ \perp CD$.
Chứng minh tương tự ta có: $IJ \perp AB$.
Kết luận: IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.
BJ là đường trung tuyến của $\triangle BCD$ nên

$$BJ^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

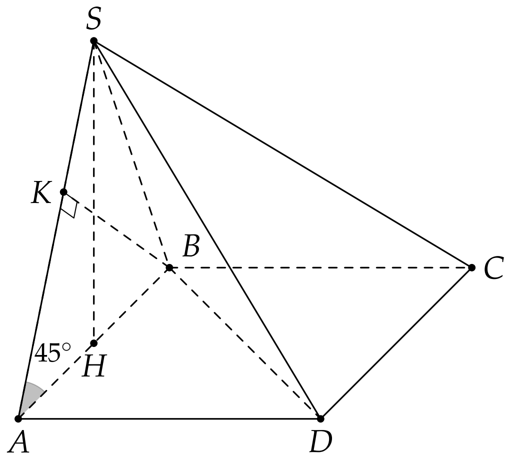
Trong $\triangle BIJ$ vuông tại I có:

$$IJ^2 = BJ^2 - BI^2 = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \Rightarrow IJ = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

□

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (SAD).

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu của S trên AB. Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên: $SH \perp (ABCD)$.
Vì $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp SA$. Suy ra góc giữa mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SA và AB và bằng $45°$.
Vì $BC \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(C; (SAD)) = \mathrm{d}(B; (SAD))$.
Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên SA, ta có

$$\begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AD \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(B; (SAD)) = BK.$$

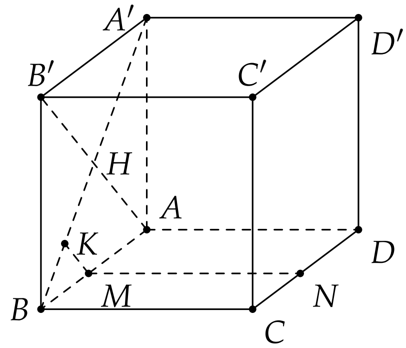
Trong $\triangle ABK$ vuông tại K có $\widehat{BAK} = 45°$, suy ra $\triangle ABK$ vuông cân tại K nên $BK = AK = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận $\mathrm{d}(C; (SAD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh AB và CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $BM = CN = x$. Xác định vị trí điểm M sao cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN bằng $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Ta có: $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (A'BC) \Rightarrow \mathrm{d}(MN, A'C) = \mathrm{d}(MN, (A'BC))$.
Gọi $H = A'B \cap AB'$ và $MK \parallel HA$, $K \in A'B$.
Ta có: $\triangle BMK$ vuông cân tại K, suy ra $MK = BK = \dfrac{BM}{\sqrt{2}} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.
Vì $A'B \perp AB' \Rightarrow MK \perp A'B$; và $CB \perp (ABB'A') \Rightarrow CB \perp MK$.
Từ đó suy ra

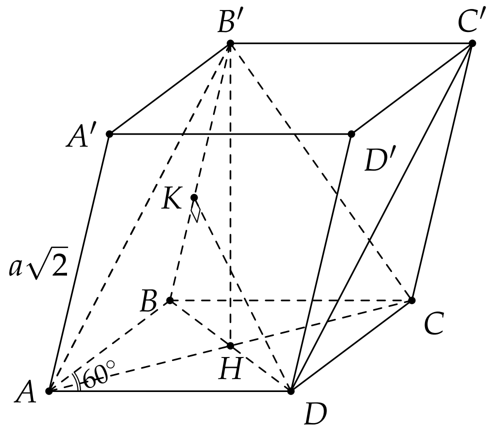
$$MK \perp (A'BC) \Rightarrow MK = \mathrm{d}(MN, (A'BC)) = \mathrm{d}(MN, A'C).$$

Để $MK = \dfrac{a}{3} \Rightarrow \dfrac{a}{3} \Rightarrow \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.
Vậy M thỏa mãn $BM = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

□

Bài 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{DAB} = 60°$, $BB' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của điểm D trên BB' là điểm K nằm trên BB' và $BK = \dfrac{1}{4}BB'$; hình chiếu vuông góc của điểm B' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H nằm trên đoạn thẳng BD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và DC'.

Lời giải.



Ta có: $BK = \dfrac{1}{4}BB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.
Trong tam giác vuông BKD có:

$$DK = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Ta có: $B'K = \dfrac{3}{4}BB' = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.
Trong $\triangle B'KD$: $DB' = \sqrt{KB'^2 + KD^2} = \sqrt{\dfrac{18a^2}{16} + \dfrac{14a^2}{16}} = a\sqrt{2}$.
Suy ra tam giác $B'BD$ cân tại B' do đó H chính là giao điểm của AC và BD.
$DC' \parallel AB'$
$\Rightarrow \mathrm{d}(DC'; B'C) = \mathrm{d}(DC'; (AB'C)) = \mathrm{d}(B, (A'AC)) = BH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

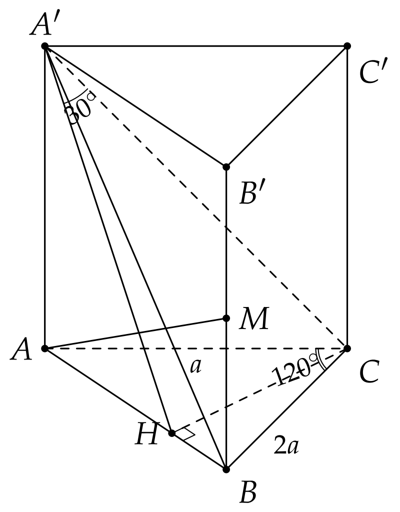
□

Bài 15. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120°$ và đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc $30°$. Gọi M là trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, CC' theo a.

Lời giải.

Kẻ $CH \perp AB$. Vì $AA' \perp (ABC)$ nên $AA' \perp CH \Rightarrow CH \perp (ABB'A')$.
Vậy $(A'C, (ABB'A')) = \widehat{CA'H} = 30^\circ$.
Sử dụng định lý côsin và công thức diện tích cho tam giác ABC

Ta có: $AB = a\sqrt{7}$, $CH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \dfrac{a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ}{a\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Mặt phẳng $(ABB'A')$ chứa AM và song song với CC' nên:



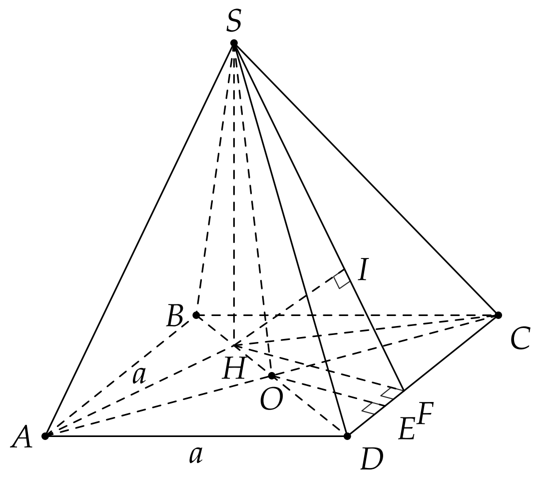
$$\mathrm{d}(AM, CC') = \mathrm{d}\left(C, (ABB'A')\right) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

□

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. O là giao điểm của AC và BD, H là trung điểm của BO, $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính khoảng cách giữa AB và SC.

Lời giải.

Ta có: $\triangle ABD$ đều nên $BD = a \Rightarrow \dfrac{3}{4}a$.
Kẻ OE vuông góc với CD, $(E \in CD)$.
Kẻ HF vuông góc với CD, $(F \in CD)$.
Kẻ HI vuông góc với SF, $(I \in SF) \Rightarrow HI \perp (SCD)$.
$\Rightarrow \mathrm{d}(H, (SCD)) = HI$.
Ta có: $HS = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $HF = HD \cdot \sin 60 = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$.
$\Rightarrow \dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HF^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{64}{27a^2} = \dfrac{100}{27a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{3a\sqrt{3}}{10}$.



$$\begin{aligned}\mathrm{d}(AB; SC) = \mathrm{d}(AB; (SCD)) &= \frac{4}{3}\mathrm{d}(HN; (SCD)) \\ &= \frac{4}{3}\mathrm{d}(H; (SCD)) = \frac{4}{3}HI = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.\end{aligned}$$

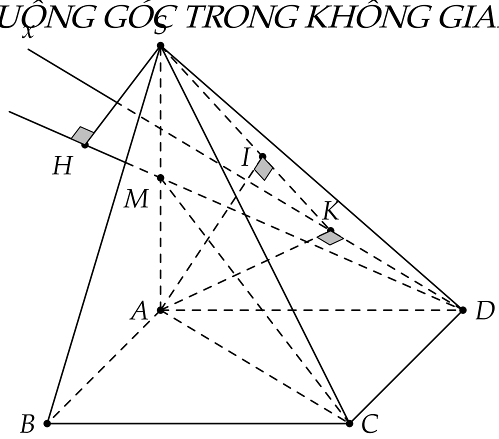
□

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$ và $SA = a$. Tính :

1. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MCD) với M là trung điểm của SA.
2. Khoảng cách giữa AC và SD.

Lời giải.

1.



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$
Mà $CD \subset (MCD)$.
Vậy $(SAD) \perp (MCD)$.
Kẻ $SH \perp MD$ tại H.
Ta có $\begin{cases} (SAD) \perp (MCD) \\ (SAD) \cap (MCD) = MD \end{cases}$
$\Rightarrow SH \perp (MCD) \Rightarrow \mathrm{d}\left(S, (MCD)\right) = SH$.
Vì M là trung điểm của SA nên

$$S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2} S_{\triangle SAD} \Leftrightarrow SH \cdot MD = \frac{1}{2} SA \cdot AD \Leftrightarrow SH \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Có $MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận $\mathrm{d}\left(S, (MCD)\right) = SH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

2. Khoảng cách giữa AC và SD.
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$, từ D kẻ $Dx \parallel AC$.
   Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng SD và Dx.
   Vì $\begin{cases} AC \parallel Dx \\ Dx \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (\alpha)$ nên $\mathrm{d}\left(AC, SD\right) = \mathrm{d}\left(AC, (\alpha)\right) = \mathrm{d}\left(A, (\alpha)\right)$.
   Từ điểm A kẻ $AK \perp Dx$ tại K. Kẻ $AI \perp SK$ tại I. Suy ra AI là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α).
   Thật vậy ta có $\begin{cases} Dx \perp AK \\ Dx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Dx \perp (SAK)$.
   Mà $Dx \subset (\alpha) \Rightarrow (SAK) \perp (\alpha)$.
   $\begin{cases} (SAK) \cap (\alpha) = SK \\ (SAK) \perp (\alpha) \\ AI \perp SK \end{cases} \Rightarrow AI \perp (\alpha) \Rightarrow \mathrm{d}\left(A, (\alpha)\right) = AI$.
   Ta có $\triangle ADK$ vuông cân tại K nên $KA = KD = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
   Trong $\triangle SAK$ vuông tại K

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

   Kết luận $\mathrm{d}(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

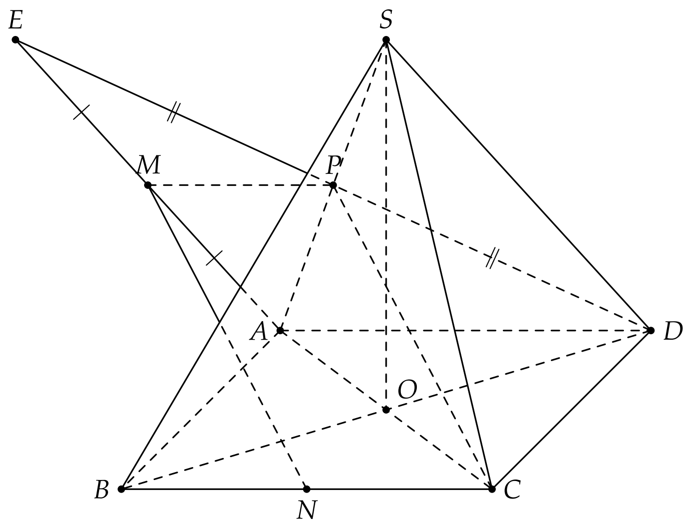
□

Bài 18. ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Lời giải.

Trong mp$(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.
Gọi P là trung điểm của SA.
Trong tam giác EAD có MP là đường trung bình của tam giác nên

$$MP \parallel AD, MP = \frac{1}{2}AD \qquad (1)$$



Vì N là trung điểm của BC nên $NC \parallel AD, NC = \frac{1}{2}AD \qquad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $CPMN$ là hình bình hành nên $MN \parallel PC$.
Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CP \; (CP \subset (SAC))$.
Kết luận $BD \perp MN$.
Vì $MN \parallel (SAC)$ nên

$$\mathrm{d}\left(MN, AC\right) = \mathrm{d}\left(MN, (SAC)\right) = \mathrm{d}\left(N, (SAC)\right).$$

Hai điểm B và N nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SAC) tại điểm C nên

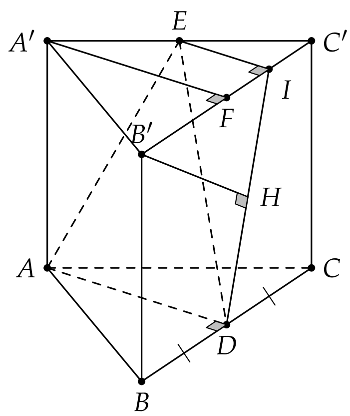
$$\frac{\mathrm{d}\left(N, (SAC)\right)}{\mathrm{d}\left(B, (SAC)\right)} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}\left(N, (SAC)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(B, (SAC)\right) = \frac{1}{2} \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(MN, AC\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. □

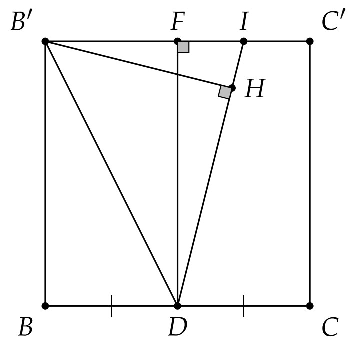
Bài 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông cạnh bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, A'C', B'C'$. Tính khoảng cách giữa DE và $A'F$.

Lời giải.

Vì các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$ là các hình vuông có $AA' \perp AB$ và $AA' \perp AC \Rightarrow AA' \perp (ABC)$.
Vậy $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.
Trong mp$(A'B'C')$ dựng $EI \parallel A'F (I \in B'C') \Rightarrow A'F \parallel$ mp$(ADIE)$.
Ta có DE chứa trong mp$(ADIE)$.
Vậy $\mathrm{d}\left(A'F, DE\right) = \mathrm{d}\left(A'F, (ADIE)\right) = \mathrm{d}\left(F, (ADIE)\right)$.
Ta có $AD \perp (BCC'B') \Rightarrow (ADIE) \perp (BCC'B')$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến DI.
Dựng $B'H \perp DI \quad (H \in DI) \Rightarrow B'H \perp (ADIE)$.



Suy ra khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(ADIE)$ là $B'H$.
Hình vuông $BCC'B'$ được vẽ ở hình 2.
Ta có EI là đường trung bình của tam giác $C'AF$ nên I là trung điểm của $C'F$.



Hình 2

Ta có $DI = \sqrt{DF^2 + FI^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{17}}{4}$

$B'H \cdot DI = DF \cdot B'I \Leftrightarrow B'H \cdot \dfrac{a\sqrt{17}}{4} = a \cdot \dfrac{3}{4}a \Rightarrow B'H = \dfrac{3a\sqrt{17}}{17}$.

Vì hai điểm B', F trên đường thẳng có giao điểm với mp$(ADIE)$ tại I nên có

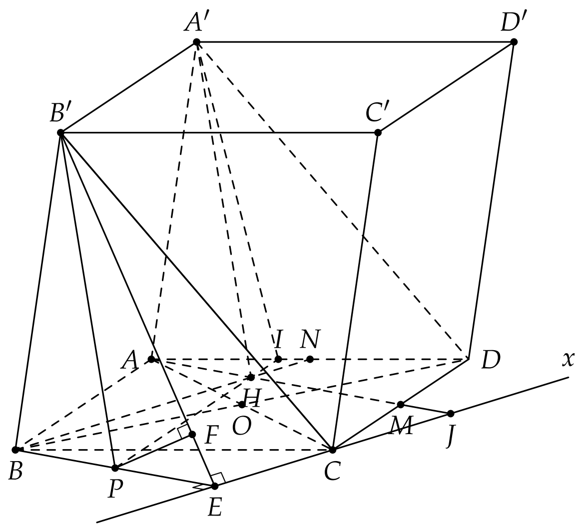
$$\frac{\mathrm{d}\,(F,(ADIE))}{\mathrm{d}\,(B',(ADIE))} = \frac{FI}{B'I} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}\,(F,(ADIE)) = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(B',(ADIE)\right) = \frac{a\sqrt{17}}{17}.$$

Kết luận $\mathrm{d}\left(A'F, DE\right) = \dfrac{a\sqrt{17}}{17}$.

□

Bài 20. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $(ABCD)$ là hình vuông cạnh a, gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AD. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $ABCD$ trùng với giao điểm của AM và BN. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và BN.

Lời giải.



Gọi $H = AM \cap BN$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AM \perp BN$ tại H.
Theo đề bài có $A'H \perp (ABCD)$.
Kẻ $HI \perp AD \Rightarrow AD \perp A'I$ (định lý ba đường vuông góc).
Vậy $\left[\left(ADD'A'\right), (ABCD)\right] = \left(HI, A'I\right) = \widehat{HIA'} = 60^\circ$
Từ B' dựng đường thẳng song song với $A'H$;
Từ H dựng đường thẳng song song với AB.
Hai đường thẳng vừa dựng cắt nhau tại P. Thì P là hình chiếu vuông góc của B' trên mp$(ABCD)$.
Dựng $Cx \parallel BN$ thì $BN \parallel (Cx, BC')$
$\Rightarrow$ d$(BN, B'C) =$ d$\left(BN, (Cx, B'C)\right) =$ d$\left(B, (Cx, B'C)\right)$.
Gọi $E = BP \cap Cx$, vì $BP \parallel AH \Rightarrow BP \perp Ax$.
Gọi $J = AH \cap Cx$.
Dễ dàng chứng minh $BHJE$ là hình vuông.
Đáy $(ABCD)$ được vẽ như hình 2:

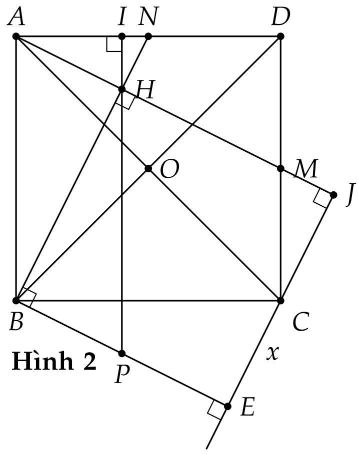
$$BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$AB^2 = BH \cdot BN \Leftrightarrow a^2 = BH \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$HN = BN - BH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{2a\sqrt{5}}{5} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$$

$$AH \cdot AN = AB \cdot AN \Leftrightarrow AH \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = a \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$HI \cdot AN = HA \cdot HN \Leftrightarrow HI \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{10} \Leftrightarrow HI = \frac{a}{5}.$$



Hình 2

Ta có
$BP = AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$
$PE = BE - BP = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} - \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ $HA' = HI \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a}{5} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$
$\Rightarrow PB' = HA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.
Vì $\begin{cases} Cx \perp PE \\ Cx \perp PB' \end{cases} \Rightarrow Cx \perp (PEB') \Rightarrow (Cx, B'C) \perp (PEB')$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến $(B'E)$.
Dựng $PE \perp B'E$ $(F \in B'E) \Rightarrow PF \perp (Cx, B'C) \Rightarrow \mathrm{d}\left(P, (Cx, B'C)\right) = PF$.
Trong $\triangle B'PE$ có $\dfrac{1}{PF^2} = \dfrac{1}{PB'^2} + \dfrac{1}{PE^2} = \dfrac{25}{3a^2} + \dfrac{5}{a^2} = \dfrac{40}{3a^2} \Rightarrow PF = \dfrac{a\sqrt{30}}{20}$.
Vì P là trung điểm của BE nên $\mathrm{d}\left(B, (Cx, B'C)\right) = 2\mathrm{d}\left(P, (Cx, B'C)\right) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.
Vậy $\mathrm{d}\left(B'C, BN\right) = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

□

TỔNG HỢP CHƯƠNG VUÔNG GÓC

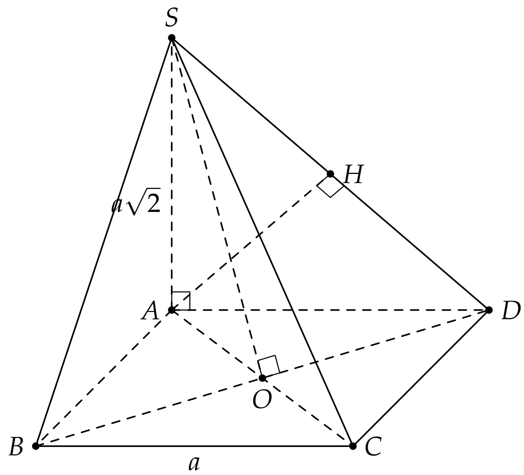
Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$.

1. Chứng minh rằng các mặt bên hình chóp là những tam giác vuông.
2. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.
3. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB).
4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.
5. Tính $\mathrm{d}\,(A, (SCD))$.

Lời giải.

1. Chứng minh rằng các mặt bên hình chóp là những tam giác vuông.

   Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD, SA \perp AB \Rightarrow \triangle SAD, \triangle SAB$ vuông tại A.
   Chứng minh $\triangle SBC$ vuông:
   Ta có $BC \perp AB$ (Hai cạnh kề của hình vuông); $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)
   $\Rightarrow BC \perp (SAB)$, mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại B.
   Chứng minh $\triangle SCD$: vuông
   Ta có $CD \perp AD$ (Hai cạnh kề hình vuông $ABCD$); $CD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)
   $CD \perp (SAD)$, mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại D.



2. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$:
   $BD \perp AC$ (Hai đường chéo của hình vuông);
   $BD \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABCD)$)
   $\Rightarrow BD \perp (SAC)$, mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

3. Tính góc giữa SC và mp(SAB):
   Do $BC \perp (SAB)$ tại B nên hình chiếu của C lên (SAB) là B
   $\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAB) là $SB \Rightarrow (SC,(SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.
   Trong $\triangle SAB$ vuông tại A, ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.
   Trong $\triangle SBC$ vuông tại B, ta có $\tan \widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ$.
   Vậy $(SC,(SAB)) = 30^\circ$.

4. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$:
   Ta có $(SBD) \cap (ABCD) = BD$.
   Gọi O là tâm của hình vuông $(ABCD), O \in BD$.
   Theo chứng minh ở câu 2 $BD \perp (SAC)$, mà $SO \subset (SAC) \Rightarrow SO \perp BD$.
   Mặt khác, $AO \perp BD$.
   Vậy $((SBD),(ABCD)) = (SO, AO) = \widehat{AOS}$ (do $\widehat{AOS}$ là góc nhọn).
   $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
   Trong $\triangle SAO$ vuông tại A, ta có $\tan \widehat{AOS} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = 2 \Rightarrow \widehat{AOS} = \arctan 2$.
   $\Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = \widehat{AOS} = \arctan 2$.

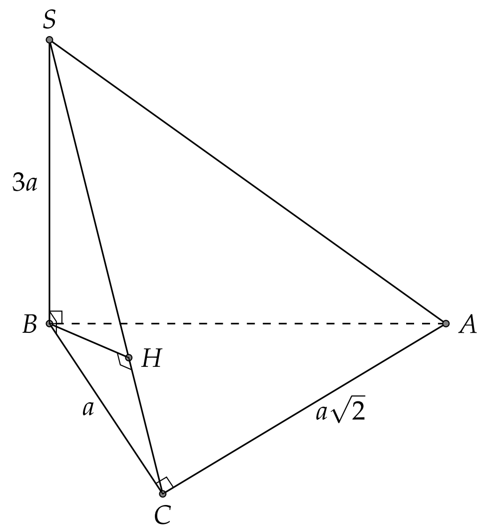
5. Tính $\mathrm{d}(A,(SCD))$:
   Gọi H là hình chiếu của A lên SD.
   Ta có $AH \perp SD$ (1)
   $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2)
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$. Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có AH là đường cao.
   Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
   Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

□

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $SB \perp (ABC)$, biết $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $SB = 3a$.

1. Chứng minh $AC \perp (SBC)$.
2. Gọi BH là đường cao của tam giác SBC. Chứng minh $SA \perp BH$.
3. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} AC \perp BC \text{ (gt)} \\ AC \perp SB \text{ (vì } SB \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABC)$.

2. Ta có $BH \perp SC$ (gt) (1)
   Theo chứng minh trên, $AC \perp (ABC)$.
   Mà $BH \subset (SBC) \Rightarrow BH \perp AC$. (2)
   Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (SAC)$.
   Mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow BH \perp SA$.

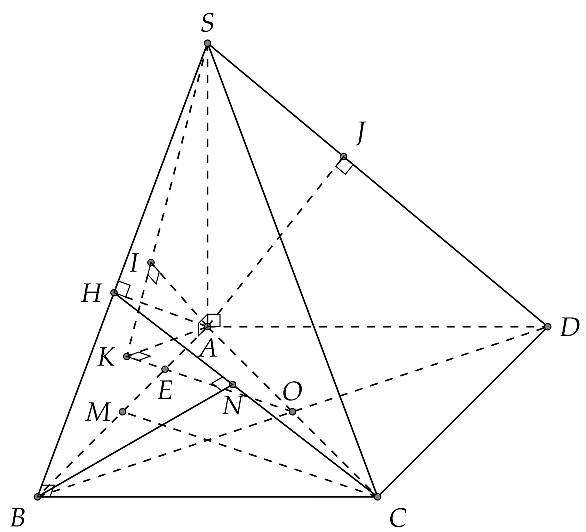
3. Do $SB \perp (ABC)$ tại B nên hình chiếu của S lên (ABC) là B.
   $\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là BA.
   $\Rightarrow (SA,(ABC)) = (SA, BA) = \widehat{SAB}$.
   Trong $\triangle ABC$ vuông tại C, ta có
   $$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$
   Trong $\triangle SBA$ vuông tại B, ta có $\tan \widehat{SAB} = \dfrac{SB}{AB} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
   $\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$. Vậy $(SA,(ABC)) = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

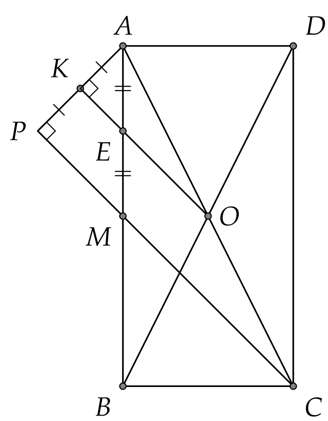
□

Bài 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O cạnh $AB = 2BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Góc giữa SO và mặt đáy bằng 45°. M là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

1. Chứng minh tam giác ACH vuông.
2. Tính $\mathrm{d}(H,(SCD))$, $\mathrm{d}(M,(ACH))$, $\mathrm{d}(SO, MC)$.

Lời giải.





1. Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH, BC \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp CH\ (CH \subset (SBC))$.
Vậy tam giác ACH vuông tại H.

2. Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
AO là hình chiếu vuông góc của SO trên mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SO và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA} = 45^\circ$.
$\Rightarrow SA = AO \cdot \tan 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Vì $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$ nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)\ (CD \subset (SCD))$.
Dựng $AJ \perp SD\ (J \in SD) \Rightarrow AJ \perp (SCD)$.
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là AJ.

Trong $\triangle SAD$ có $AJ \cdot SD = AS \cdot AD \Rightarrow AJ = \dfrac{AS \cdot AD}{SD} = \dfrac{AS \cdot AD}{\sqrt{AD^2 + AS^2}} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a}{\sqrt{\dfrac{5a^2}{4} + a^2}} =$
$\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.
Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \mathrm{d}\,(B, (SCD)) = \mathrm{d}\,(A, (SCD)) = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.
Trong $\triangle SAB$ vuông tại A có $SH \cdot SB = SA^2 \Rightarrow \dfrac{SH \cdot SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} =$
$\dfrac{\dfrac{5a^2}{4}}{\dfrac{5a^2}{4} + 4a^2} = \dfrac{5}{21}$.
$\Rightarrow SH = \dfrac{5}{21}SB = \dfrac{5}{21} \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{2} = \dfrac{5a\sqrt{21}}{42}$, $BH = SB - SH = \dfrac{8a\sqrt{21}}{21}$.
Vì hai điểm B và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại S nên có

$$\frac{\mathrm{d}\,(H, (SCD))}{\mathrm{d}\,(B, (SCD))} = \frac{SH}{SB} = \frac{5}{21} \Rightarrow \mathrm{d}\,(H, (SCD)) = \frac{5}{21}\mathrm{d}\,(B, (SCD)) = \frac{5}{21} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{5a\sqrt{5}}{63}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(H, (SCD)) = \dfrac{5a\sqrt{5}}{63}$.
Vì $AH \perp (SBC) \Rightarrow (ACH) \perp (SBC)$. Dựng $BN \perp CH\ (N \in CH)$ thì $BN \perp (ACH)$.
Vậy $\mathrm{d}\,(B, (ACH)) = BN$. Trong $\triangle HBC$ vuông tại B có

$$\frac{1}{BN^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{21}{64a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{85}{64a^2} \Rightarrow BN = \frac{8a}{\sqrt{85}}.$$

Vì hai điểm B và M nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (ACH) tại A, theo công thức tỉ lệ khoảng cách có

$$\frac{\mathrm{d}\,(M, (ACH))}{\mathrm{d}\,(B, (ACH))} = \frac{MA}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\,(M, (ACH)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\,(B, (ACH)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8a}{\sqrt{85}} = \frac{4a}{\sqrt{85}}.$$

Vậy $\mathrm{d}\,(M, (ACH)) = \dfrac{4a}{\sqrt{85}}$.
Qua O dựng đường thẳng song song với CM cắt đoạn AB tại E.

Dựng AK vuông góc OE tại K.
Ta có $OE \perp AK, OE \perp SA \Rightarrow OE \perp (SAK) \Rightarrow (SOE) \perp (SAK)$ theo giao tuyến SK.
Dựng AI vuông góc với SK tại K. Suy ra AI vuông góc với mặt phẳng (SOE).
Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SOE) là AI.
Gọi $P = CM \cap AK$. Vì $BM = BC = a$ nên tam giác CBM vuông cân tại B.
Tam giác APM vuông cân tại P và tam giác AKE vuông cân tại E.
Tam giác AKE vuông cân tại E nên có $AK = KE = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.
Trong $\triangle SAK$ vuông tại A có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{4}{5a^2} = \dfrac{44}{5a^2} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{55}}{22}$.
Vì $MC \parallel OE \Rightarrow \mathrm{d}(MC, OE) = \mathrm{d}\left(MC, (SOE)\right) = \mathrm{d}\left(M, (SOE)\right)$.
Vì E là trung điểm của AM và E cũng là giao điểm của AM với mặt phẳng (SOE) nên theo công thức tính tỉ lệ khoảng cách ta có

$$\frac{\mathrm{d}\left(M, (SOE)\right)}{\mathrm{d}\left(A, (SOE)\right)} = \frac{ME}{AE} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}\left(M, (SOE)\right) = \mathrm{d}\left(A, (SOE)\right) = \frac{a\sqrt{55}}{22}.$$

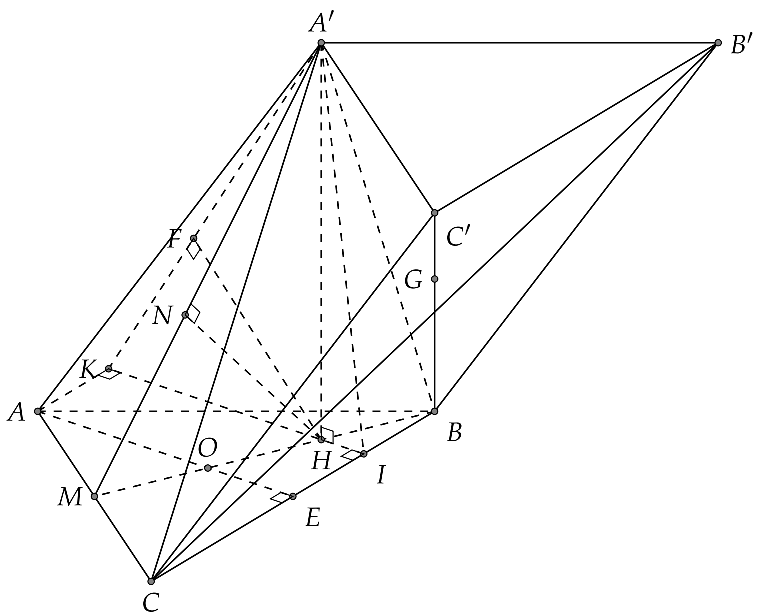
Vậy $\mathrm{d}(MC, OE) = \dfrac{a\sqrt{55}}{22}$.

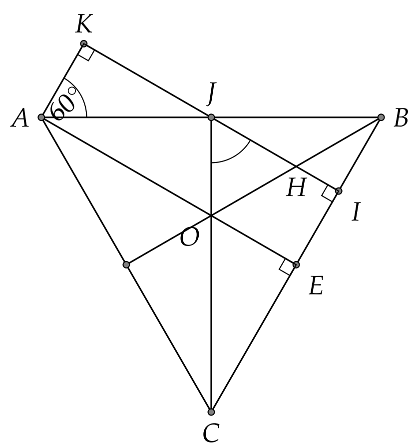
□

Bài 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm H của OB. Biết góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°.

1. Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.
3. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng $(AA'C)$, với G là trọng tâm của tam giác $B'C'C$.

Lời giải.





1. Gọi E, M, I lần lượt là trung điểm của CB, AC, EB.
Vì tam giác ABC đều có $AE \perp BC$, $BM \perp AC$. HI là đường trung bình của tam giác BOE nên $HI \parallel OE$

$\Rightarrow HI \perp BC$ và $HI = \dfrac{1}{2}OE = \dfrac{1}{6}AE = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp HI \\ BC \perp HA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (HIA') \Rightarrow BC \perp IA'$.

Từ đó suy ra góc giữa $(A'BC)$ và ABC là góc $\widehat{HIA'} = 60^\circ$.

Trong tam giác HIA' có $HA' = HI \tan 60^\circ = \dfrac{a}{4}$.

Trong (ABC), kẻ $Ax \parallel BC$. Khi đó góc giữa AA' và BC chính là góc giữa AA' và Ax.

Dựng $HK \perp Ax, (K \in Ax) \Rightarrow HK \parallel AE$.

Ta có $\begin{cases} Ax \perp HK \\ Ax \perp HA' \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (HKA') \Rightarrow Ax \perp A'K$.

Tam giác OHJ đều $JH = OJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $AKIE$ là hình chữ nhật có $HK = EI = \dfrac{a}{4}$

$KI = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = KI - HI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a\sqrt{3}}{12} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Trong tam giác HKA' vuông tại H có $KA' = \sqrt{HA'^2 + HK^2} = \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Trong tam giác $A'AK$ vuông tại K có $\tan \widehat{A'AK} = \dfrac{A'K}{AK} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3} \Rightarrow \widehat{A'AK} = \arctan \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

Kết luận $(AA', BC) = \widehat{A'AK} = \arctan \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

2. Vì $Ax \parallel BC \Rightarrow \mathrm{d}(BC, AA') = \mathrm{d}(BC, (A'Ax)) = \mathrm{d}(I, (A'Ax))$, vì $(I \in BC)$.
   Vì $Ax \perp (HKA') \Rightarrow (A'Ax) \perp (HKA')$ theo giao tuyến $A'K$.
   Dựng $HF \perp A'K$ $(F \in A'K) \Rightarrow HF \perp (A'Ax) \Rightarrow \mathrm{d}\left(H, (A'Ax)\right) = HF$.
   Trong $\triangle A'HK$ có $HF \cdot KA' = HA' \cdot HK \Rightarrow HF \cdot \dfrac{a\sqrt{21}}{6} = \dfrac{a}{4} \cdot \dfrac{5a\sqrt{13}}{12} \Rightarrow HF = \dfrac{5a\sqrt{7}}{56}$.
   Vì hai điểm H, I cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng $(A'Ax)$ tại K nên

$$\frac{\mathrm{d}\left(I, (A'Ax)\right)}{\mathrm{d}\left(H, (A'Ax)\right)} = \frac{IK}{HK} = \frac{6}{5} \Rightarrow \mathrm{d}\left(I, (A'Ax)\right) = \frac{6}{5}\mathrm{d}\left(H, (A'Ax)\right) = \frac{3a\sqrt{7}}{28}.$$

   Vậy $\mathrm{d}(BC, AA') = \dfrac{3a\sqrt{7}}{28}$.

3. Ta có $\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp HA' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (HMA') \Rightarrow (ACC'A') \perp (HMA')$ theo giao tuyến $A'M$.
   Dựng $HN \perp A'M$ $(N \in A'M) \Rightarrow HN \perp (ACC'A') \Rightarrow \mathrm{d}\left(H, (ACC'A')\right) = HN$.
   Trong $\triangle HMA'$ có $\dfrac{1}{HN^2} = \dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{HA'^2} = \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{16}{a^2} = \dfrac{19}{a^2} \Rightarrow HN = \dfrac{a}{\sqrt{19}}$.
   Hai điểm H và B cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng $(ACC'A')$ tại M nên có

$$\frac{\mathrm{d}\left(B, (ACC'A')\right)}{\mathrm{d}\left(H, (ACC'A')\right)} = \frac{BM}{HM} = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{d}\left(B, (ACC'A')\right) = \frac{3}{2}\mathrm{d}\left(H, (ACC'A')\right) = \frac{3a}{2\sqrt{19}}.$$

   Hai điểm B và G cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng $(ACC'A')$

tại C' nên có

$$\frac{\mathrm{d}\left(G,(ACC'A')\right)}{\mathrm{d}\left(B,(ACC'A')\right)} = \frac{GC'}{BC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}\left(G,(ACC'A')\right) = \frac{1}{3}\mathrm{d}\left(B,(ACC'A')\right) = \frac{a}{2\sqrt{19}}.$$

Vậy $\mathrm{d}\left(G,(ACC'A')\right) = \dfrac{a}{2\sqrt{19}}$.

□

! Công thức tính tỉ lệ khoảng cách là một công thức đẹp. Các bạn nên rèn luyện nhiều bài tập để sử dụng công thức này thành thạo.

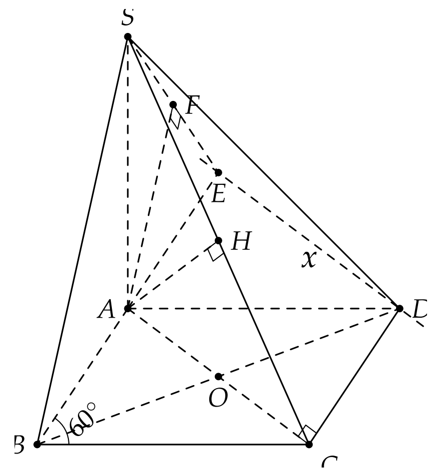
Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

1. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC, AC và SD.

Lời giải.

Áp dụng định lí cô-sin cho $\triangle ABC$ ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \\ &= a^2 + 4a^2 - 2a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}. \end{aligned}$$



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4a^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$, do đó $CD \perp SC$.

Vậy $((SCD),(ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Ta có $SA = AC \cdot \tan \widehat{SCA} = 3a$.

1. Tính khoảng cách từ A đến (SCD).
   Ta có $CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$, (do $CD \subset (SCD)$) và hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC.
   Trong (SAC), dựng $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = AH$.
   Trong $\triangle SAC$, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}.$$

   Vậy $\mathrm{d}\left(A,(SCD)\right) = AH = \dfrac{3a}{2}$.

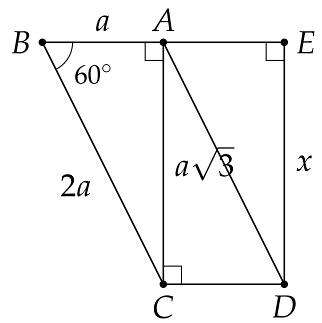
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.
   Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$. Do đó

$$\mathrm{d}(AB,CD) = \mathrm{d}(AB,(SCD)) = \mathrm{d}(A,(SCD)) = \frac{3a}{2} \text{ (vì } SC \subset (SCD)\text{)}.$$

   Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.
   Kẻ $Dx \parallel AC$. Gọi $E = Dx \cap AB \Rightarrow AB \perp Dx$ tại E.

Ta có $\begin{cases} Dx \perp AB \\ Dx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Dx \perp (SAB) \Rightarrow (SD, Dx) \perp (SAB)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SE.

Dựng $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SD, Dx)$.
Vậy $\mathrm{d}(A, (SD, Dx)) = AF$.
Đáy $ABCD$ được vẽ lại ở hình 2.
Ta có $ACDE$ là hình chữ nhật, có $AE = CD = a$.
Trong $\triangle SAE$ ta có



Hình 2

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $AC \parallel Dx \Rightarrow AC \parallel (SD, Dx)$. Do đó

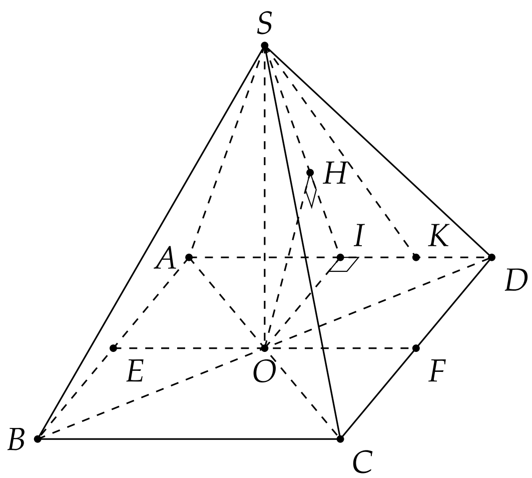
$$\mathrm{d}(AC, SD) = \mathrm{d}(AC, (SD, Dx)) = \mathrm{d}(A, (SD, Dx)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

□

Bài 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

1. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$;
2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, K là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng AD. Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K. Hãy tính khoảng cách này theo a.

Lời giải.



1. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$ thì ta có $OA = OB = OC = OD$.
Theo đề bài $SA = SB = SC = SD$. Do đó, O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$, ta có $SO \perp (ABCD)$.
Trong $\triangle SAO$ vuông tại O, ta có

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{2a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

2. Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K.

Ta có $SK \subset (SAD)$.
Mà $EF \parallel AD \Rightarrow EF \parallel (SAD) \Rightarrow \mathrm{d}(EF, SK) = \mathrm{d}(EF, (SAD)) = \mathrm{d}(O, SAD)$.
Vì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAD) không đổi nên khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK cũng không đổi, nghĩa là khoảng cách này không phụ thuộc vào điểm K.
Dựng $OI \perp AD\,(I \in AD)$, ta có $AD \perp SO$ và $AD \perp OI \Rightarrow AD \perp (SOI) \Rightarrow (SAD) \perp (SOI)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI.
Dựng $OH \perp SI (H \in SI) \Rightarrow OH \perp (SAD)$. Vậy $\mathrm{d}(O, (SAD)) = OH$.
Trong $\triangle SOI$ vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

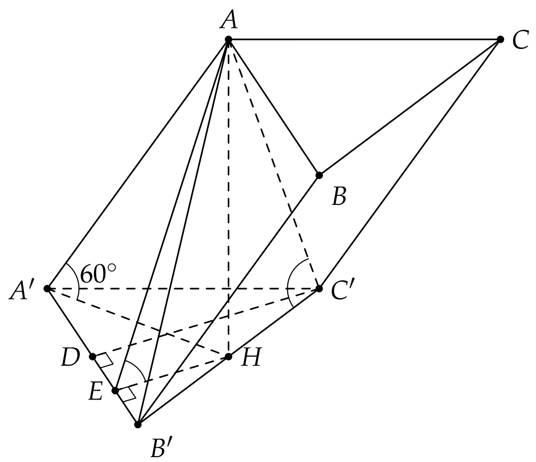
Vậy $\mathrm{d}(EF, SK) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

□

Bài 27. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của cạnh $B'C'$.

1. Tính khoảng cách hai đáy.
2. Tính góc giữa BC và AC'.
3. Tính góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy.

Lời giải.



1. Tính khoảng cách hai đáy.
   $A'H$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên $(A'B'C')$ nên góc giữa AA' và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AA'H} = 60°$.
   Trong $\triangle AA'H$ vuông tại H, ta có

$$AH = A'H \cdot \tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

   Vì $AH \perp (A'B'C')$ mà $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow AH \perp (ABC)$.
   Suy ra khoảng cách giữa hai mặt đáy là $AH = \dfrac{3a}{2}$.

2. Tính góc giữa BC và AC'.
   Vì $B'C' \parallel BC$ nên góc giữa BC và AC' bằng góc giữa $B'C'$ và AC' là góc $\widehat{AC'H}$.
   Trong $\triangle AC'H$ vuông tại H, ta có

$$\tan \widehat{AC'H} = \frac{AH}{HC'} = \frac{3a}{2} : \frac{a}{2} = 3 > 0 \Rightarrow \widehat{AC'H} = \arctan 3.$$

3. Tính góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy.
   Dựng $C'D$ và HE cùng vuông góc với $A'B'$ lần lượt tại D và E.
   Ta có $\begin{cases} A'B' \perp HE \\ A'B' \perp AH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp (AHE) \Rightarrow A'B' \perp AE.$
   Hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ có giao tuyến $A'B'$ cùng vuông góc với hai đường thẳng AE và HE tại điểm E nên

$$((ABB'A'), (A'B'C')) = (AE, HE) = \widehat{AEH}.$$

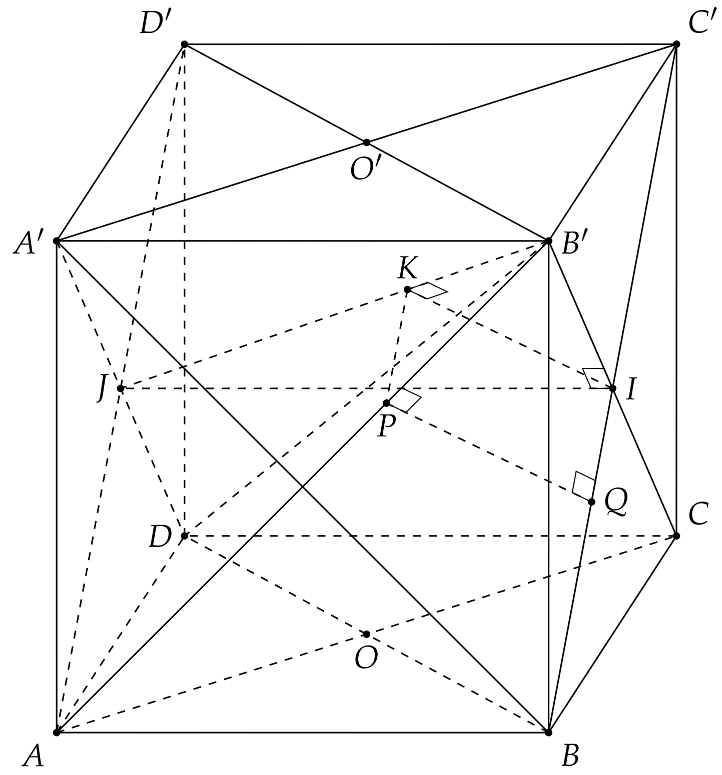
   Vì HE là đường trung bình của tam giác $C'DB'$ nên $HE = \frac{1}{2}C'D = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
   Trong $\triangle AEH$, ta có $\tan \widehat{AEH} = \frac{AH}{EH} = \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AEH} = \arctan 2\sqrt{3}$.

□

Bài 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

1. Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.
2. Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.
3. Chứng minh BC' vuông góc với m?t phẳng $(A'B'CD)$.
4. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').
5. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.
6. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Lời giải.



1. Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.
   Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên các tam giác sau là các tam giác vuông bằng nhau và đều nhận AC' làm cạnh huyền: $\triangle ABC'$, $\triangle AA'C'$, $\triangle ACC'$, $\triangle AD'C'$, $\triangle ADC'$, $\triangle AB'C'$.
   Từ đó suy ra khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau.
   Gọi khoảng cách từ B đến AC' là h. Trong $\triangle ABC'$ có

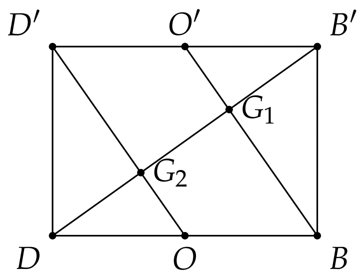
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

2. Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.
   Ta có $\begin{cases} B'B = B'A' = B'C' = a \\ AB' = A'C' = C'B = a\sqrt{2} \end{cases}$ nên hình chóp $B'.BA'C'$ là hình chóp đều.
   Suy ra $B'H \perp (BA'C')$, với H là tâm của tam giác đều $BA'C'$. (1)
   Tương tự ta có $D.BA'C'$ là hình chóp đều nên $DH \perp (BA'C')$. (2)
   Từ (1) và (2) ta suy ra $B'D \perp (BA'C')$.

3. Chứng minh BC' vuông góc với m?t phẳng $(A'B'CD)$.
   Vì $BCC'B'$ là hình vuông nên ta có $BC' \perp B'C$.
   Ta có $DC \perp (BCC'B')$ nên $DC \perp BC'$.
   Vậy $BC' \perp (A'B'CD)$.

4. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Trong mặt phẳng $(BDD'B')$, gọi $G_1 = DB' \cap BO'$, do $BO' \subset (BA'C')$ nên $G_1 = DB' \cap (BA'C')$.
Vậy $B'G_1 \perp (BA'C') \Rightarrow \mathrm{d}(B', (BA'C')) = B'G_1$.
Hoàn toàn tương tự, $\mathrm{d}(D, (ACD')) = DG_2$.
Dễ dàng chứng minh được $(ACD') \parallel (BA'C')$. Từ đó suy ra G_1G_2 là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$.



Dễ thấy $G_1G_2 = B'G_1 = DG_2 = \dfrac{1}{3}DB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

5. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.
Ta có BC' và CD' lần lượt thuộc hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').
Theo câu 4 ta có $(BAC') \parallel (ACD')$.
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ và bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

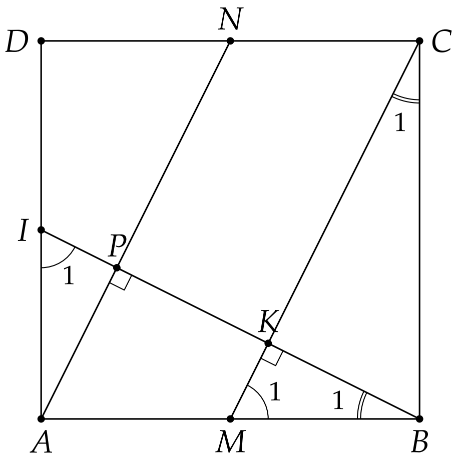
6. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.
Gọi I và J lần lượt là tâm của hai hình vuông $BCC'B'$ và $ADD'A'$.
Trong mặt phẳng $(A'B'CD)$, dựng $IK \perp JB'$, $K \in JB'$.
Trong mặt phẳng $(AB'D')$, dựng $KP \parallel AD'$, $P \in AB'$, suy ra $KP \parallel BC'$.
Trong mặt phẳng (KP, BC'), dựng $PQ \parallel IK$, $Q \in BC'$. Ta chứng minh PQ là đoạn vuông góc chung của BC' và AB'.
Ta có $BC' \perp (A'B'CD)$, $IK \subset (A'B'CD)$ nên $IK \perp BC'$.
Mà $BC' \parallel AD' \Rightarrow IK \perp AD'$. Ngoài ra ta có $IK \perp JB'$ nên $IK \perp (AB'D') \Rightarrow IK \perp AB'$.
Tóm lại ta có $\begin{cases} IK \perp BC' \\ IK \perp AB' \end{cases}$, mà $PQ \parallel IK$ nên PQ vuông góc với cả hai đường thẳng BC' và AB'.
Vậy PQ là đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.
Ta có $IJ \parallel A'B'$, mà $A'B' \perp (BCC'B') \Rightarrow IJ \perp (BCC'B') \Rightarrow IJ \perp IB'$.
Xét tam giác vuông $B'IJ$ có đường cao IK nên
$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IB'^2} + \frac{1}{IJ^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$
Theo cách dựng thì $IKPQ$ là hình chữ nhật nên $PQ = IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

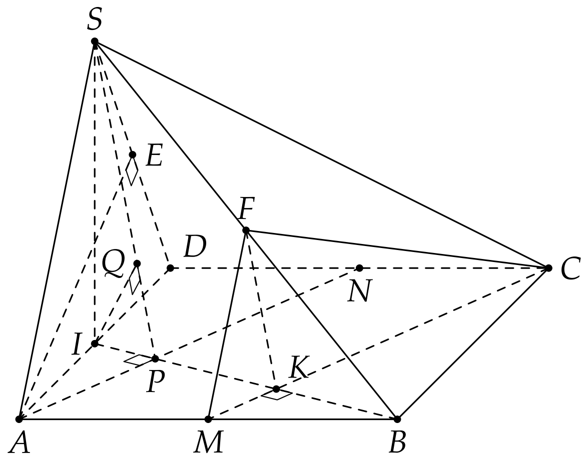
□

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi I, M, F lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và K là giao điểm của BI và CM.

1. Chứng minh (CMF) vuông góc với (SIB).
2. Tính BK và KF.
3. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.
4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

Lời giải.





1. Chứng minh (CMF) vuông góc với (SIB).
   Ta có $\triangle IAB = \triangle MBC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$.
   Từ $\widehat{C}_1 + \widehat{M}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{M}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MKB} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp IB$.
   Ta có $CM \perp IB; CM \perp SI$, $(SI \perp (ABCD))$ và $CM \subset (CMF)$ nên $(CMF) \perp (SIB)$.

2. Tính BK và KF.

   Tam giác CBM vuông tại B nên $CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

   Ta có $BK \cdot CM = BM \cdot BC \Leftrightarrow BK = \dfrac{BM \cdot BC}{CM} = \dfrac{\dfrac{a}{2} \cdot a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

   Tam giác SIB vuông tại I nên

   $$SB = \sqrt{SI^2 + BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2} \text{ và } \cos\widehat{SBI} = \frac{BI}{SB} = \frac{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

   Trong tam giác BKF, ta có $$\begin{aligned} FK^2 &= BK^2 + BF^2 - 2 \cdot BK \cdot BF \cdot \cos\widehat{FBK} \\ &= \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \\ &= \frac{a^2}{5}. \end{aligned}$$

   Vậy $FK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

3. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.
   Ta có $AB \perp AD$ và $AB \perp SI$ nên $AB \perp (SAD)$.
   Trong mặt phẳng (SAD), kẻ $AE \perp SD$. Khi đó, AE là đoạn vuông góc chung của AB và SD.
   Vậy $\mathrm{d}(AB, SD) = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì AE là đường cao của tam giác đều SAD).

4. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.
   Gọi N là trung điểm của CD.
   Ta có $AN \parallel CM \Rightarrow CM \parallel (SAN)$.
   Suy ra $\mathrm{d}(CM, SA) = \mathrm{d}(CM, (SAN)) = \mathrm{d}(K, (SAN))$ (do $K \in CM$).
   Gọi $P = AN \cap BI$. Ta có $BI \perp AN$ (vì $AN \parallel CM$).
   Do đó, $AN \perp (SIP)$. Từ I kẻ $IQ \perp SP$, $Q \in SP$. Kết hợp với $IQ \perp AN$ thì $IQ = \mathrm{d}(I, (SAN))$.

Ta có $\triangle IAP = \triangle MBK \Rightarrow IP = MK = \dfrac{BM^2}{MC} = \dfrac{a^2}{4} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$.
Tam giác SIP vuông tại I nên $\dfrac{1}{IQ^2} = \dfrac{1}{IS^2} + \dfrac{1}{IP^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{20}{a^2} = \dfrac{64}{3a^2} \Rightarrow IQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.
Ta có $IK \cap (SAN) = P$ nên

$$\frac{\mathrm{d}(K,(SAN))}{\mathrm{d}(I,(SAN))} = \frac{KP}{IP} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(K,(SAN)) = 2\mathrm{d}(I,(SAN)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

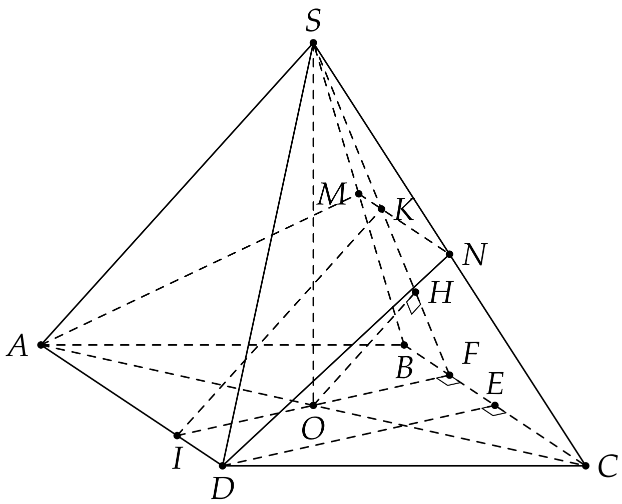
Vậy $\mathrm{d}(CM, SA) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

□

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với đáy và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và BE.

1. Chứng minh (SOF) vuông góc (SBC).
2. Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).
3. Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.
4. Tính góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.



1. Chứng minh (SOF) vuông góc (SBC).
Vì $\triangle BDC$ đều nên $DE \perp BC \Rightarrow OF \perp BC$ (OF là đường trung bình của $\triangle BDE$).
Ta có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OF \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOF)$.
Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SOF)$.

2. Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).
Trong mặt phẳng (SOF), dựng $OH \perp SF, H \in SF$ thì $OH \perp (SBC)$. Do đó, $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OH$.
Trong $\triangle SOF$ vuông tại O ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OF^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}.$$

Vậy $\mathrm{d}(O,(SBC)) = OH = \dfrac{3a}{8}$.
Gọi $I = FO \cap AD$. Trong mặt phẳng (SIF) dựng $IK \perp SF$ tại K thì $IK \perp (SBC)$ (vì $IK \parallel OH$).
Ta có $AD \parallel BC$ nên $AD \parallel (SBC)$.
Do đó, $\mathrm{d}(A,(SBC)) = \mathrm{d}(I,(SBC)) = IK = 2OH = \dfrac{3a}{4}$ (vì $I \in AD$).

3. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).
Ta có $IK \perp (SBC)$ nên mặt phẳng (α) chính là mặt phẳng (ADK).
Ta có $\begin{cases} K \in (SBC) \cap (ADK) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (ADK) = Kx \quad (Kx \parallel AD \parallel BC)$.
Gọi $M = Kx \cap SB$, $N = Kx \cap SD$.
Vậy thiết diện là hình thang $ADNM$.
$*$) Tính diện tích hình thang $ADNM$.
Ta có $S_{ADNM} = \dfrac{1}{2}(AD + NM) \cdot IK$.
Tam giác SOF vuông tại O nên $SF = \sqrt{OS^2 + OF^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{16} + \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
Tam giác SIK vuông tại K nên $SK = \sqrt{SI^2 - IK^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.
Do đó, $\dfrac{SK}{SF} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra K là trung điểm của SF.
Như thế, MN là đường trung bình của $\triangle SBC$. Từ đó, $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.
Vậy $S_{ADNM} = \dfrac{1}{2}(AD + MN) \cdot IK = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a}{2}\right) \cdot \dfrac{3a}{4} = \dfrac{9a^2}{16}$.

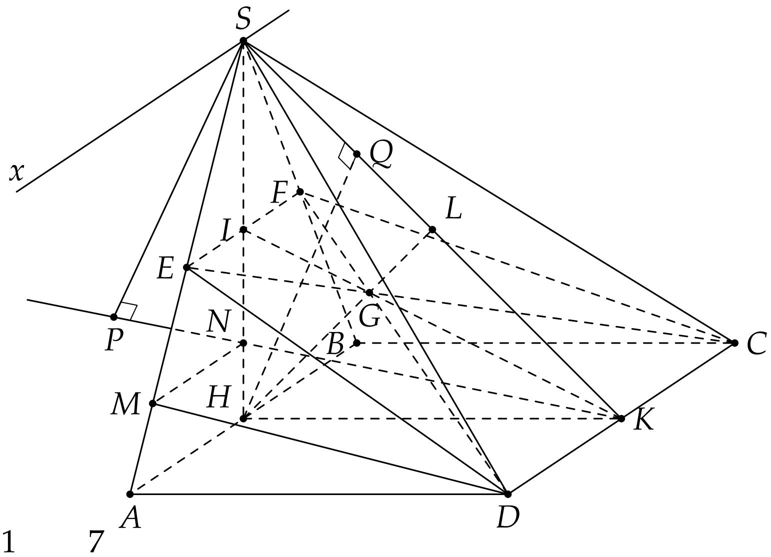
4. Tính góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(ABCD)$.
Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = AD \\ FI \perp AD, KI \perp AD \\ FI \subset (ABCD), KI \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow ((\alpha), (ABCD)) = \widehat{FIK}$.
Tam giác FIK vuông tại K có $\cos \widehat{FIK} = \dfrac{IK}{IF} = \dfrac{3a}{4} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FIK} = 30^\circ$.
Vậy $((\alpha), (ABCD)) = 30^\circ$.

□

Bài 31. Cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD và E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB.

1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD). Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).
2. Gọi G là giao điểm của CE và DF. Chứng minh $CE \perp SA$, $DF \perp SB$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB).
3. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác SHK. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD).
4. Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CDM).

Lời giải.



1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).
   Ta có $DC \perp HK$, $DC \perp SH$ nên $DC \perp (SHK)$. Suy ra $(SCD) \perp (SHK)$.
   Trong mặt phẳng (SHK), dựng $HQ \perp SK, (Q \in SK)$. Khi đó, $HQ \perp (SCD)$.
   Như thế, $\mathrm{d}(H,(SCD)) = HQ$.
   Tam giác SHK vuông tại K nên

$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

   Suy ra, $HQ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ và

$$\mathrm{d}(H,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

   Vì $AH \parallel CD$ nên $AH \parallel (SCD)$.
   Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = \mathrm{d}(H,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

   $*$) Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).
   Ta có $(SAB) \cap (SCD) = Sx$, $(Sx \parallel AB \parallel CD)$ và

$$\begin{cases} SH \perp AB, SK \perp CD \\ SH \subset (SAB), SK \subset (SCD) \\ Sx \parallel AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SH \perp Sx \\ SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(SCD)) = \widehat{KSH}.$$

   Tam giác SHK vuông tại H nên $\tan\widehat{KSH} = \dfrac{HK}{HS} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Chứng minh $CE \perp SA$, $DF \perp SB$.
   Tam giác HBC vuông tại B nên $HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
   Tam giác SHC vuông tại H nên $SC = \sqrt{HS^2 + HC^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.
   Xét $\triangle SAC$ có $CA = CS = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại C và có CE là đường trung tuyến, suy ra CE cũng là đường cao. Vậy $CE \perp SA$.
   Chứng minh tương tự thì $DF \perp SB$.
   $*$) Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB).
   Gọi $I = SH \cap EF$. Khi đó, I là trung điểm của EF.
   Ta có $CDEF$ là hình thang cân và I, F lần lượt là trung điểm của hai đáy EF và CD nên $IK \perp EF$.

Như thế, $\begin{cases}(SAB)\cap(CDEF)=EF\\ SH\perp EF, KI\perp EF\\ SH\subset(SAB), KI\subset(CDEF)\end{cases}\Rightarrow ((SAB),(CDEF))=\widehat{HIK}.$

Tam giác HIK vuông tại H nên $\tan\widehat{HIK}=\dfrac{HK}{HI}=\dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

3. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác SHK.
   Vì $CDEF$ là hình thang cân nên $G\in KI$.
   Trong hình thang cân $CDEF$ ta có tỉ lệ đồng dạng

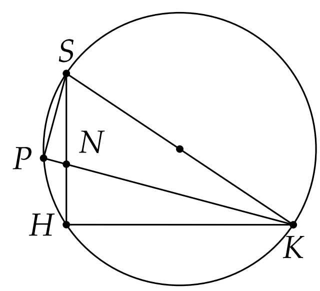
$$\frac{GF}{GD}=\frac{GE}{GC}=\frac{GI}{GK}=\frac{EF}{DC}=\frac{1}{2},\quad (\text{vì } EF=\frac{1}{2}AB, AB=CD).$$

   Suy ra, $GK=2GI\Leftrightarrow KG=\dfrac{2}{3}KI$.
   Mà KI là đường trung tuyến của tam giác SHK. Vậy G là trọng tâm của tam giác SHK.
   Trong mặt phẳng (SHK), gọi $L=HG\cap SK$. Ta có,

$$\frac{\mathrm{d}(G,(SCD))}{\mathrm{d}(H,(SCD))}=\frac{GL}{HL}=\frac{1}{3}\Rightarrow \mathrm{d}(G,(SCD))=\frac{1}{3}\mathrm{d}(H,(SCD))=\frac{a\sqrt{21}}{21}.$$

   Vậy $\mathrm{d}(G,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

4. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CDM).



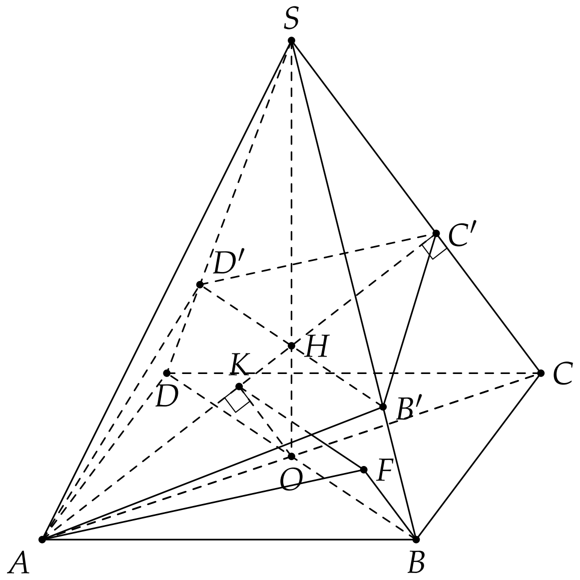
   Ta có $CD\perp(SHK)\Rightarrow(CDM)\perp(SHK)$.
   Dựng $MN\parallel CD, N\in SH$. Ta được, $(CDM)\cap(SHK)=KN$.
   Dựng $SP\perp KN\Rightarrow SP\perp(CDM)$.
   Do đó, P là hình chiếu của S trên mặt phẳng (CDM).
   Ta có $\widehat{SPK}=90^\circ$ nên P thuộc đường tròn đường kính SK trong mặt phẳng (SHK).
   Mặt khác, M di động trên đoạn SA nên N di động trên đoạn SH.
   Ta suy ra điểm P chạy trên cung $\overset{\frown}{SH}$ của đường tròn đường kính SK.

□

Bài 32. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.
2. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.
3. Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (α). Tính $\sin\varphi$.

Lời giải.



1. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì SO là khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.
   Ta có: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3a^2 - \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{10a^2}{4} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

2. Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$.
   Trong (SAC) dựng $AC' \perp SC$. Gọi H là giao điểm của AC' và SO.
   Trong (SBD), đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.
   Ta có: $B'D' \perp SC$.
   Vậy $SC \perp \text{mp}(AB'C'D')$ và (α) là mặt phẳng $(AB'C'D')$.
   $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC'$.
   Do đó: $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2}AC' \cdot B'D'$.
   Ta có:
   $$AC' = \frac{SO \cdot AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3};$$
   $$SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 3a^2 - \frac{5a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow SC' = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$
   Từ hai tam giác vuông đồng dạng SOC và $SC'H$, ta có: $SH = \dfrac{SC'.SC}{SO} = \dfrac{\frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{10}}$.
   Vì $B'D' \parallel BD$ nên $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SH}{SO} = \dfrac{4a}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{2}{a\sqrt{10}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \dfrac{4}{5}a\sqrt{2}$.
   Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{4}{5}a\sqrt{2} = \dfrac{2a^2\sqrt{30}}{15}$.

3. Gọi φ là góc $(AB, (\alpha))$. Ta có: $CC' = SC - SC' = a\sqrt{3} - \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
   Dựng $OK \parallel CC'$ với $K \in AC'$, thì $OK \perp (\alpha)$ và $OK = \dfrac{1}{2}CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OK}$ thì $BF \perp (\alpha)$ và $BF = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

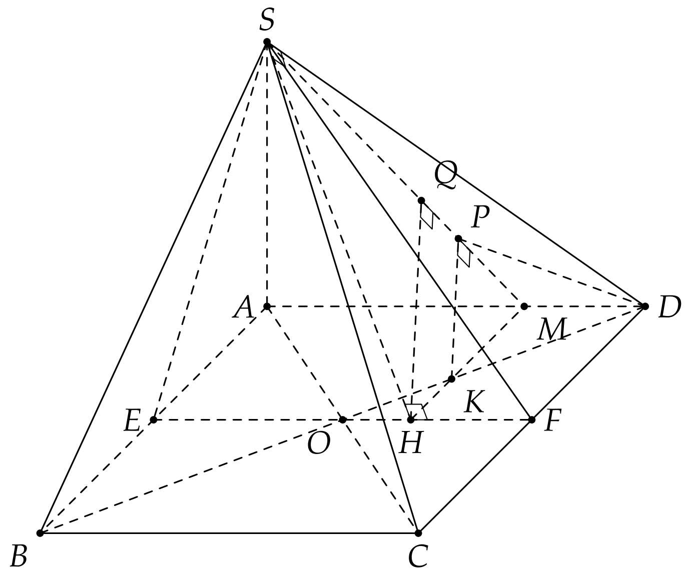
Ta có: $(AB, (\alpha)) = \widehat{BAF} = \varphi$; $\sin \widehat{BAF} = \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \sin \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

□

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Gọi E, F là trung điểm của AB và CD.

1. Cho biết tam giác SCD vuông cân tại S. Chứng minh: $SE \perp (SCD)$ và $SF \perp (SAB)$.
2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên EF. Chứng minh: $SH \perp AC$.
3. Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

Lời giải.



1. Chứng minh: $SE \perp (SCD)$ và $SF \perp (SAB)$.

- Chứng minh $SE \perp (SCD)$:
Do $\triangle SCD$ cân tại S có F là trung điểm của $CD \Rightarrow CD \perp SF$.
Mà $CD \perp EF$ (theo tính chất của hình vuông) $\Rightarrow CD \perp (SEF)$.
Lại có $SE \subset (SEF) \Rightarrow SE \perp CD$ (1)
Ta chứng minh $\triangle SEF$ vuông tại S bằng cách sử dụng định lý Pytago như sau:
$\triangle SCD$ vuông tại S có SF là đường trung tuyến nên $SF = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2}$.
$\triangle SAB$ đều cạnh a có SE là trung tuyến nên $SE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $EF = a$.
Có $SE^2 + SF^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 = EF^2$.
Vậy $\triangle SEF$ vuông tại $S \Rightarrow SE \perp SF$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow SE \perp (SCD)$.

- Chứng minh $SF \perp (SAB)$:
Ta có $CD \perp (SEF)$, mà $AB \parallel CD \Rightarrow AB \perp (SEF) \Rightarrow SF \perp AB$ (3)
Từ (2) và (3) $\Rightarrow SF \perp (SAB)$.

2. Chứng minh $SH \perp AC$
   Ta có $CD \perp (SEF)$ (theo chứng minh trên), mà $SH \subset (SEF) \Rightarrow SH \perp CD$.
   Hơn nữa, $SH \perp EF$ (gt) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
   Mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$.

3. Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).
   Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
   Theo tính chất của hình vuông $ABCD$, ta có AC, BD, EF đồng quy tại O.
   Vì $SE > SF$ nên H thuộc đoạn OF.
   Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua H vẽ đường thẳng song song với CD cắt AD, OD lần lượt tại M và K.
   Vậy góc giữa BD và mặt phẳng (SAD) là góc giữa KD và (SAD).
   Ta có: $AD \perp MH$, $AD \perp SH$ (do $SH \perp (ABCD)$) $\Rightarrow AD \perp (SHM) \Rightarrow (SAD) \perp (SHM)$.
   Mà $(SAD) \cap (SHM) = SM$. Vẽ $KP \perp SM (P \in SM) \Rightarrow KP \perp (SAD)$ tại P.
   Nhận xét: *Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.*
   $\Rightarrow$ Hình chiếu của K lên (SAD) là $P \Rightarrow$ Hình chiếu của KD lên (SAD) là PD.
   $\Rightarrow (BD,(SAD)) = (KD,(SAD)) = (KD, PD) = \widehat{KDP}$.
   Để tìm góc $\widehat{KDP}$, ta đi tìm KD và KP.
   $\triangle SEF$ vuông tại S có SH là đường cao nên ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{SF^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

   $\triangle SEH$ vuông tại H nên ta có: $EH = \sqrt{SE^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$.

$$OH = EH - OE = \frac{3a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4} \Rightarrow HF = OF - OH = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}.$$

   $\Rightarrow H$ là trung điểm của OF, mà $HK \parallel DF$ nên HK là đường trung bình của $\triangle FOD$.
   $\Rightarrow K$ là trung điểm của $OD \Rightarrow KD = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (Do $BD = a\sqrt{2}$).

$$HK = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}; MK = MH - HK = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}.$$

   $\Rightarrow K$ là trung điểm của MH.
   Trong (SHM), vẽ $HQ \perp SM$ $(Q \in SM)$, mà $KP \perp SM \Rightarrow KP \parallel HQ$.
   Mà K là trung điểm của MH nên KP là đường trung bình của $\triangle MHQ \Rightarrow KP = \frac{1}{2}HQ$.
   $\triangle SHM$ vuông tại H có HQ là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{16}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HQ = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

   $\Rightarrow KP = \frac{1}{2}HQ = \frac{a\sqrt{21}}{28}$.
   Trong $\triangle KPD$ vuông tại P, ta có:

$$\sin\widehat{KDP} = \frac{KP}{KD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{42}}{14} \Rightarrow \widehat{KDP} = \arcsin\frac{\sqrt{42}}{14}.$$

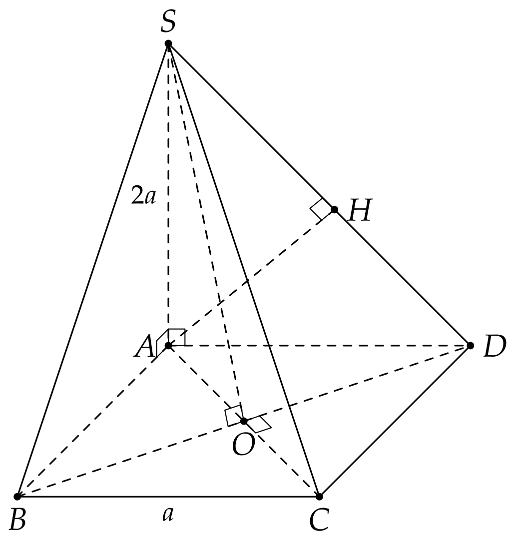
Vậy $(BD,(SAD)) = \widehat{KDP} = \arcsin \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

□

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

1. Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$; $(SCD) \perp (SAD)$.
2. Tính góc giữa SD và $(ABCD)$, SB và (SAD), SB và (SAC).
3. Tính $\mathrm{d}(A,(SCD))$, $\mathrm{d}(B,(SAC))$.

Lời giải.



1. - Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.
   Ta có: $BD \perp AC$ (hai đường chéo của hình vuông $ABCD$);
   $BD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$).
   $\Rightarrow BD \perp (SAC)$, mà $BD \subset (SBD)$.
   $\Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

   - Chứng minh $(SCD) \perp (SAD)$.
   Ta có: $CD \perp AD$ (hai cạnh kề của hình vuông $ABCD$).
   $CD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$).
   $\Rightarrow CD \perp (SAD)$ mà $CD \subset (SCD)$.
   $\Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$.

2. - Tính góc giữa SD và $(ABCD)$.
   Ta có: $SA \perp (ABCD)$ tại A nên hình chiếu của S lên mp $(ABCD)$ là A.
   $\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AD.
   $\Rightarrow (SD,(ABCD)) = (SD,AD) = \widehat{SDA}$.
   Trong $\triangle SAD$ vuông tại A, $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan 2$.
   Vậy $(SD,(ABCD)) = \widehat{SDA} = \arctan 2$.

   - Tính góc giữa SB và (SAD).
   Ta có: $BA \perp SA$, $BA \perp AD \Rightarrow BA \perp (SAD)$ tại A nên hình chiếu của B lên (SAD) là A.
   $\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA.

$\Rightarrow (SB,(SAD)) = (SB,SA) = \widehat{BSA}$.
Trong $\triangle SAB$ vuông tại A, có $\tan\widehat{BSA} = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSA} = \arctan\dfrac{1}{2}$.
Vậy $(SB,(SAD)) = \widehat{BSA} = \arctan\dfrac{1}{2}$.

- Tính góc giữa SB và (SAC).
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.
Theo chứng minh trên: $BD \perp (SAC)$ tại O nên hình chiếu của B lên (SAC) là O.
$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (SAC) là $SO \Rightarrow (SB,(SAC)) = (SB,SO) = \widehat{BSO}$.
$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
$\triangle SAB$ vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.
Trong $\triangle SOB$ vuông tại O, ta có: $\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{BSO} = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
Vậy $(SB,(SAC)) = \widehat{BSO} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

3. - Tính $\mathrm{d}(A,(SCD))$.
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD.
Ta có: $AH \perp SD$.
Theo chứng minh ở câu a, $CD \perp (SAD)$.
Mà $AH \subset (SAD) \Rightarrow AH \perp CD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.
$\triangle SAD$ vuông tại A có AH là đường cao.
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.
Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.
Trong ý trên, do $(SAD) \perp (SCD)$ và có giao tuyến là SD nên khi kẻ $AH \perp SD$ thì $AH \perp (SCD)$.

- Tính $\mathrm{d}(B,(SAC))$.
Theo chứng minh trên $BD \perp (SAC)$ tại O nên hình chiếu của B lên (SAC) là O.
$\Rightarrow \mathrm{d}(B,(SAC)) = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

□

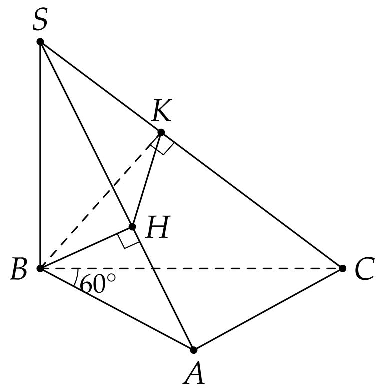
Bài 35. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, góc $\widehat{B} = 60^\circ$, $AB = a$, hai mặt bên (SAB) và (SBC) vuông góc với đáy; $SB = 2a$. Hạ $BH \perp SA$ ($H \in SA$); $BK \perp SC$ ($K \in SC$).

1. Chứng minh $SB \perp (ABC)$.
2. Chứng minh $SC \perp (BHK)$.
3. Chứng minh tam giác BHK vuông.
4. Tính cô-sin của góc tạo bởi SA và (BHK).

Lời giải.

Nhận xét. *Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) vuông góc với mặt phẳng đó, tức là*

$$\begin{cases}(\alpha)\cap(\beta)=d\\(\alpha)\perp(\gamma);(\beta)\perp(\gamma)\end{cases}\Rightarrow d\perp(\gamma).$$



1. Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SBC)=SB\\(SAB)\perp(ABC);(SBC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SB\perp(ABC)$.
2. Ta có $AC\perp AB$ (do $\triangle ABC$ vuông tại A)
và $AC\perp SB$ (do $SB\perp(ABC)$)
$\Rightarrow AC\perp(SAB)\Rightarrow BH\perp AC$ (do $BH\subset(SAB)$).
mặt khác $BH\perp SA$ (giả thiết)
$\Rightarrow BH\perp(SAC)\Rightarrow SC\perp BH$ (do $SC\subset(SAC)$).
Ta lại có $SC\perp BK$ (giả thiết)
Suy ra $SC\perp(BHK)$.
3. Ta có $BH\perp(SAC)$, mà $HK\subset(SAC)$ nên suy ra $BH\perp HK$. Vậy tam giác BHK vuông tại H.
4. Ta có $SC\perp(BHK)$ tại K nên HK là hình chiếu vuông góc của SH trên (BHK). Do đó

$$(SA,(BHK))=(SH,(BHK))=(SH,HK)=\widehat{SHK}.$$

Vì $\widehat{SHK}=\widehat{SCA}$ nên $\cos\widehat{SHK}=\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC}{SC}$.
Tam giác ABC vuông tại A, có $AC=AB\cdot\tan 60^\circ=a\sqrt{3}, BC=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$.
Tam giác SBC vuông tại B nên $SC=\sqrt{SB^2+BC^2}=2\sqrt{2}a$.
Suy ra $\cos(SA,(BHK))=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

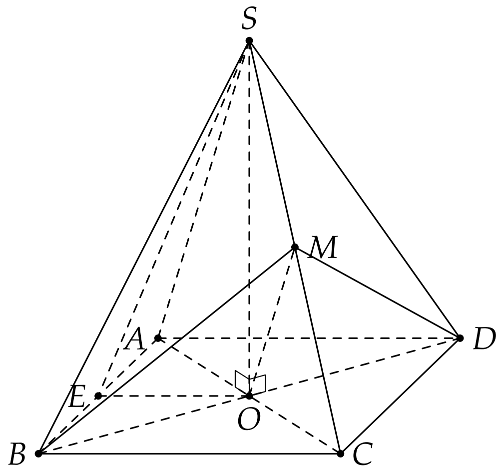
□

Bài 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, và M là trung điểm của SC.

1. Chứng minh $(MBD)\perp(SAC)$.
2. Tính góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
3. Tính góc giữa giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.
4. Tính góc giữa giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

Lời giải.

⚠ *Hình chóp đều là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau và có đáy là đa giác đều. Do đó, trong hình chóp đều, tâm của đa giác đáy trùng với hình chiếu của đỉnh S lên mặt đáy.*



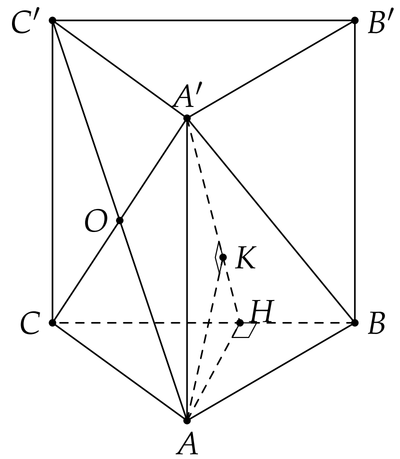
1. Vì hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.
   mà $BD \subset (ABCD)$ nên $BD \perp SO$.
   Ta lại có $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
   mà $BD \subset (MBD)$, suy ra $(MBD) \perp (SAC)$.
2. Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu vuông góc của SA lên $(ABCD)$. Suy ra $(SA,(ABCD)) = (SA,AO) = \widehat{SAO}$.
   Ta có $SA = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
   Tam giác SAO vuông tại O có
   $$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{SAO} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}.$$
3. Ta có $(MBD) \cap (ABCD) = BD$ (1)
   mà $BD \perp (SAC), OM \subset (SAC) \Rightarrow OM \perp BD$ (2)
   và $OC \perp BD$ (3)
   Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow ((MBD),(ABCD)) = (OM,OC) = \widehat{MOC}$ (do $\widehat{MOC}$ là góc nhọn).
   Tam giác SOC vuông tại O có OM là đường trung tuyến nên $OM = CM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.
   Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác COM, ta có:
   $$\cos\widehat{MOC} = \frac{OM^2 + OC^2 - CM^2}{2OM \cdot OC} = \frac{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2}{2\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$
   Vậy $((MBD),(ABCD)) = \widehat{COM} = \arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.
4. Ta có $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Gọi E là trung điểm của AB.
   Khi đó $OE \perp AB$, mà $SO \perp AB \Rightarrow SE \perp AB$.
   Suy ra, $((SAB),(ABCD)) = (SE,OE) = \widehat{SEO}$ (vì $\widehat{SEO}$ nhọn).
   Tam giác SCO vuông tại O nên $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
   Tam giác SEO vuông tại O, ta có $\tan\widehat{SEO} = \dfrac{SO}{OE} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEO} = 60^\circ$.
   Vậy $((SAB),(ABCD)) = 60^\circ$.

□

Bài 37. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

1. Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.
2. Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.
3. Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

Lời giải.



1. Vì $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$
nên $\mathrm{d}(AA', (BB'C'C)) = \mathrm{d}(A, (BB'C'C))$.
Vì $AA' \perp (ABC)$ nên $(ABC) \perp (BCC'B')$ theo giao tuyến BC.
Kẻ $AH \perp BC$ tại H, suy ra $AH \perp (BCC'B')$.
Do đó, $\mathrm{d}(A, (BB'C'C)) = AH$.
Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.
Tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao nên
$$AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$
Vậy $\mathrm{d}(AA', (BB'C'C)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Kẻ $AK \perp A'H$ tại K. Ta có $AA' \perp BC$ và $AH \perp BC \Rightarrow (A'AH) \perp BC \Rightarrow AK \perp BC$.
Suy ra $AK \perp (A'BC)$. Do đó $\mathrm{d}(A, (A'BC)) = AK$.
Tam giác $A'AH$ vuông tại A có AK là đường cao nên
$$AK = \frac{AA' \cdot AH}{\sqrt{AA'^2 + AH^2}} = \frac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$
Vậy $\mathrm{d}(A, (A'BC)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.
Cách 2. Vì AA', AB, AC đôi một vuông góc nên gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$, ta có
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

3. Ta có $AB \perp AC$, $AB \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$) $\Rightarrow AB \perp (ACC'A')$.
Gọi O giao điểm của $A'C$ và AC'.
Ta có $A'O \perp AC'$ (do $ACC'A'$ là hình vuông)
mặt khác $A'O \perp AB$ (do $A'O \subset (ACC'A')$ và $AB \perp (ACC'A')$)
$\Rightarrow A'O \perp (ABC')$ tại O.
Do đó, $\mathrm{d}(A', (ABC')) = A'O = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét. *Để tính khoảng cách từ điểm M đến (α), nếu đề bài cho không xác định được trực tiếp hình chiếu vuông góc của M lên (α) thì ta làm như sau:*

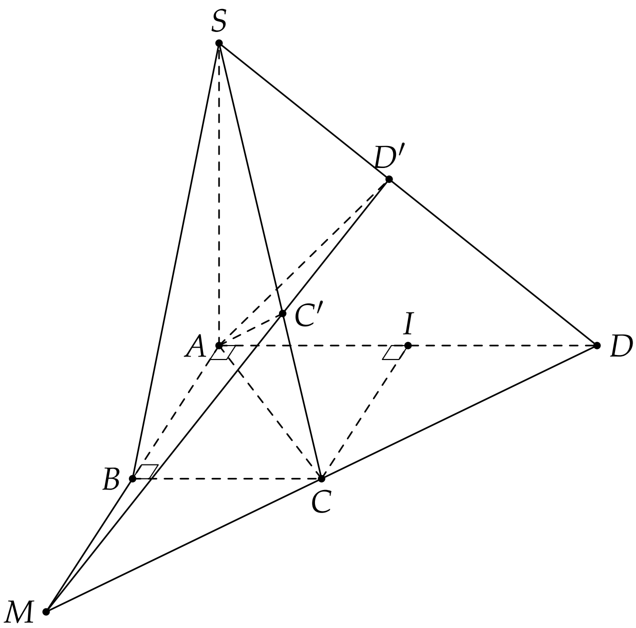
- Tìm mặt phẳng (β) đi qua M và $(\beta) \perp (\alpha)$.
- Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
Kẻ $MH \perp \Delta$ tại $H \Rightarrow MH \perp (\alpha) \Rightarrow \mathrm{d}(M, (\alpha)) = MH$.

□

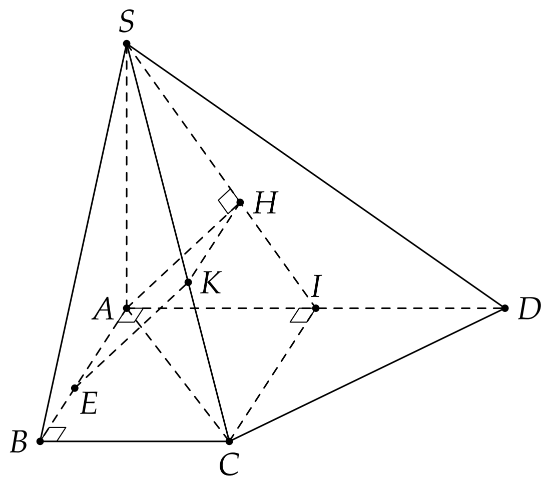
Bài 38. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

1. Chứng minh $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.
2. Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trên mặt phẳng. Từ đó chứng minh $C'D'$ luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.
3. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $SA = a\sqrt{2}$.

Lời giải.



1. Ta có $BC \perp BA$, $BC \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)
   $\Rightarrow BC \perp SB$.
   Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông
   $\Rightarrow IA = ID = IC \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C.
   Ta có $CD \perp AC$, $CD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)
   $\Rightarrow CD \perp SC$.
   Vậy $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.
2. • $AB \perp AD$, $AB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)
   $\Rightarrow AB \perp SD$. (1)
   • $\begin{cases} AC' \perp SC \\ AC' \perp CD \text{ (do } CD \perp (SAC), AC' \subset (SAC)) \end{cases}$
   $\Rightarrow AC' \perp SD$. (2)
   • $AD' \perp SD$ (giả thiết). (3)
   Từ $(1), (2), (3) \Rightarrow AB, AC', AD'$ cùng nằm trong mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SD.
   Do đó $C'D'$ đi qua một điểm cố định là giao điểm I của AB và CD khi điểm S di động trên đường thẳng Ax.



3. Ta có $CI \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (SCI)$.
   Kẻ $AH \perp SI$ tại H.
   Ta có $AH \perp SI$, $AH \perp CI$ (do $CI \perp (SAD)$) $\Rightarrow AH \perp (SCI)$.
   Kẻ $HK \parallel CI$ ($K \in SC$) và lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = HK$. Khi đó $AHKE$ là hình bình hành $\Rightarrow AH \parallel KE$.
   Suy ra, $KE \perp AB$ (do $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$)
   và $KE \perp SC$ (do $AH \perp (SCI) \Rightarrow AH \perp SC$).
   Do đó, KE là đoạn vuông góc chung của AB và SC.
   Tam giác SAI vuông tại A có AH là đường cao nên

$$AH = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

   Vậy $\mathrm{d}(AB, SC) = KE = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

□