CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC HAY VÀ KHÓ

Phần 1. Các bài toán sử dụng bất đẳng thức Cauchy Scwharz.

I. Giới thiệu tổng quan về bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

Bất đẳng thức Cauchy Schwarz. Với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i : a_j = b_i : b_j \ \forall i, j = \overline{1, n}.$

II. Các bài toán áp dụng.

Bài 1. (Jack Garfunkel)

Cho các số không âm a, b, c, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 = \left(\sum_{cyc}\sqrt{a(5a+b+9c)}\cdot\sqrt{\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}}\right)^2 \le \left(\sum_{cyc}a(5a+b+9c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)$$

$$= 5(a+b+c)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right) \le \frac{5}{16}$$

Như điều này hiển nhiên đúng vì

$$\frac{5}{16} - (a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)$$

$$= \frac{\sum_{cyc}ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 + 243\sum_{cyc}a^3b^2c + 835\sum_{cyc}a^3bc^2 + 232\sum_{cyc}a^4bc + 1230a^2b^2c^2}{16(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b)} \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a : b : c = 3 : 1 : 0.$

Bài 2. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho các số không âm a, b, c có tổng bằng 1, chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\le\frac{11}{5}$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+b^2}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{4a+4b+c}\cdot\sqrt{\frac{a+b^2}{4a+4b+c}}\right)^2\le\left(\sum_{cyc}(4a+4b+c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a+b^2}{4a+4b+c}\right)$$

$$=9\sum_{cyc}\frac{a+b^2}{4a+4b+c}=9\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)+b^2}{4a+4b+c}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$9\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)+b^2}{4a+4b+c}\le\frac{121}{25}(a+b+c)$$

Ta có

$$VP-VT=\frac{163\sum_{cyc}a^4+3003\sum_{cyc}a^2b^2+1975\sum_{cyc}ab^3-725\sum_{cyc}a^3b+10920\sum_{cyc}a^2bc}{25(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

$$=\frac{163\left(\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}a^2b^2-6\sum_{cyc}a^3b-6\sum_{cyc}a^2bc\right)+A}{25(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

trong đó

$$A=1210\sum_{cyc}a^2b^2+1975\sum_{cyc}ab^3+253\sum_{cyc}a^3b+11898\sum_{cyc}a^2bc\ge0$$

Ta chứng minh

$$\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}a^2b^2-6\sum_{cyc}a^3b-6\sum_{cyc}a^2bc\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right)+12\left(\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right)-6\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)\ge0$$

Ta có

$$\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$$

$$3\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)=3\left(\sum_{cyc}b^3c-\sum_{cyc}a^2bc\right)=-3\sum_{cyc}bc(a^2-b^2)$$
$$=-3\sum_{cyc}bc(a^2-b^2)+\sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2)$$
$$=\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)$$

$$6\left(\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right)=\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$$

Do đó bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2+2\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2-2\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2-2ab-2ac+4bc)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức không xảy ra.

Bài 3. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho các số không âm $a,b,c,$ chứng minh rằng

$$a\sqrt{b^2+4c^2}+b\sqrt{c^2+4a^2}+c\sqrt{a^2+4b^2}\le \frac{3}{4}(a+b+c)^2$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}a\sqrt{b^2+4c^2}\right)^2\le\left(\sum_{cyc}a(3a+b+5c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a(b^2+4c^2)}{3a+b+5c}\right)=3(a+b+c)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a(b^2+4c^2)}{3a+b+5c}\right)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a(b^2+4c^2)}{3a+b+5c}\le\frac{3}{16}(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 45\sum_{cyc}a^5+165\sum_{cyc}a^4b+69\sum_{cyc}ab^4+536\sum_{cyc}a^3bc-306\sum_{cyc}a^3b^2-18\sum_{cyc}a^2b^3-410\sum_{cyc}a^2b^2c\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, bất đẳng thức tương đương với

$$(45a^5+45b^5+165a^4b+69ab^4-306a^3b^2-18a^2b^3)+Ac\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a+5b)(15a^2+10ab+3b^2)(a-b)^2+Ac\ge 0$$

Trong đó

$$A = 69a^4 + (536b - 18c)a^3 - (410b^2 + 410bc + 306c^2)a^2 + (536b^3 - 410b^2c + 436bc^2 + 165c^3)a$$
$$+ 165b^4 - 306b^3c - 18b^2c^2 + 69bc^3 + 45c^4$$

Sử dụng giả thiết $c = \min\{a,b,c\},$ ta dễ dàng chứng minh được $A \ge 0$ nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a:b:c = 1:1:0.$

Bài 4.

Cho các số dương a,b,c, chứng minh

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Giải.

Bổ đề.

$$ab^3 + bc^3 + ca^3 \le \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^4}{a^3+b^3}\right)\left(\sum_{cyc} a^2(a^3+b^3)\right) \ge (a^3+b^3+c^3)^2$$

Ta phải chứng minh

$$2(a^3+b^3+c^3)^2 \ge (a+b+c)(a^5+b^5+c^5+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3 &= (ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2) - abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\\
&= \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}(ab^3+bc^3+ca^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c))\\
&\quad - abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\\
&= \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}(ab^3+bc^3+ca^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - abc(a^2+b^2+c^2)\\
&\le \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\left(\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) - abc(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$2(a^3+b^3+c^3)^2 \ge (a+b+c)(a^5+b^5+c^5) + (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$- abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa cho $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca\dfrac{1-q^2}{3}, r=abc$ $(0\le q\le 1)$ thì ta có $\dfrac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\ge r\ge \dfrac{(1+q)^2(1-2q)}{27}$. Bất đẳng thức tương đương

$$(54r^2+(28q^2-4)r)-3(1-q^2)r+\frac{1}{27}(7q^6+108q^4-39q^2+5)\ge 0$$

Rõ ràng $f(r)=54r^2+(28q^2-4)r$ là hàm đồng biến theo r nên ta có

$$VT\ge\left(54\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)^2+(28q^2-4)\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)\right)-3(1-q^2)\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)$$
$$+\frac{1}{27}(7q^6+108q^4-39q^2+5)=\frac{q^2(q^2(15q^2-26q+24)+(1-3q)^2)}{27}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 5. (Phan Thành Nam)

Cho các số không âm a,b,c có tổng bằng 1. Đặt $k=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, chứng minh rằng

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2}\le\sqrt{3}$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+k(b-c)^2}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\frac{a+k(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}}\right)^2\le\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a+k(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\le 3$$

Đặt $q = ab + bc + ca \le \frac{1}{3}, r = abc$ thì ta có $0 \le r \le \frac{q^2}{3}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$9\left(2+\sqrt{3}\right)r - q\left(6q+\sqrt{3}\right) \le 0$$

Ta có

$$9\left(2+\sqrt{3}\right)r - q\left(6q+\sqrt{3}\right) \le 3\left(2+\sqrt{3}\right)q^2 - q\left(6q+\sqrt{3}\right) = q(3q-1)\sqrt{3} \le 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 1, b = c = 0$ và các hoán vị.

Bài 6. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho các số dương $a, b, c,$ chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \le \sqrt{2}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\right)^2 \le \left(\sum_{cyc} \frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)(a+c)}\right)$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3\right)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3\right) \le \left(\sum_{cyc} \frac{1}{b+c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3 \le \frac{(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 3 \le \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right) \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c,$ khi đó ta có $a - c \ge \frac{a}{b}(b-c) \ge 0.$ Do đó

$$\sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right)$$
$$\geq \frac{(a-b)(b-c)}{b}\left(a\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right)-b\left(\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{(c+a)(a+b+c)}\right)\right)$$
$$=\frac{c(a-b)^2(a+b)(b-c)(a^2+b^2-ab+ac+bc)}{b(a^2+bc)(b^2+ca)(a+c)(b+c)(a+b+c)}\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

III. Bài tập tự giải.

Bài 1. (Nguyễn Việt Anh)

Cho các số dương $a,b,c,$ chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

Hướng dẫn.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\right)\left(\sum_{cyc}a(2a^2-ab+2b^2)(c+a)^2\right)\geq\left(\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab^2\right)^2$$

Cuối cùng ta chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab^2\right)^2\geq\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a(2a^2-ab+2b^2)(c+a)^2\right)$$

Bài 2. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho các số dương $a,b,c,$ chứng minh rằng

$$a\sqrt{8b^2+c^2}+b\sqrt{8c^2+a^2}+c\sqrt{8a^2+b^2}\leq(a+b+c)^2$$

Hướng dẫn.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}a\sqrt{8b^2+c^2}\right)^2\leq\left(\sum_{cyc}a(51a+100b+2c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a(8b^2+c^2)}{51a+100b+2c}\right)=51\left(\sum_{cyc}a\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a(8b^2+c^2)}{51a+100b+2c}\right)$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$51\sum_{cyc}\frac{a(8b^2+c^2)}{51a+100b+2c}\leq(a+b+c)^2$$

Phần 2. Các bài toán sử dụng bất đẳng thức Holder.

I. Tổng quan về bất đẳng thức Holder.

II. Các bài toán áp dụng.

Bài 1. (Phan Thành Việt)

Cho các số không âm x,y,z có tổng bằng 3, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x}{1+y+yz}}+\sqrt{\frac{y}{1+z+zx}}+\sqrt{\frac{z}{1+x+xy}}\ge\sqrt{3}$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x}{1+y+yz}}\right)^2\left(\sum_{cyc}x^2(1+y+yz)(2x+y+3z)^3\right)\ge\left(\sum_{cyc}x(2x+y+3z)\right)^3=8(x+y+z)^6$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$8(x+y+z)^6\ge 3\sum_{cyc}x^2(1+y+yz)(2x+y+3z)^3$$

$$\Leftrightarrow 8(x+y+z)^7\ge\sum_{cyc}x^2((x+y+z)^2+3y(x+y+z)+9yz)(2x+y+3z)^3$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{VT-VP}{x+y+z}&=4\sum_{cyc}xy(x^4+y^4)+26\sum_{cyc}x^2y^4+39\sum_{cyc}x^4y^2+54\sum_{cyc}x^3y^3+261x^2y^2z^2\\&-24\sum_{cyc}x^4yz-93\sum_{cyc}x^3y^2z-97\sum_{cyc}x^2y^3z\end{aligned}$$

Mặt khác từ bất đẳng thức AM-GM và Schur, ta có thể dễ dàng chứng minh được

$$4\sum_{cyc}xy(x^4+y^4)+26\sum_{cyc}x^2y^4+39\sum_{cyc}x^4y^2+54\sum_{cyc}x^3y^3+261x^2y^2z^2\ge 24\sum_{cyc}x^4yz+93\sum_{cyc}x^3y^2z+97\sum_{cyc}x^2y^3z$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hoặc $x=3,y=z=0$ và các hoán vị.

Bài 2. (Lê Hữu Điền Khuê)

Cho các số dương a,b,c, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}}\ge 1$$

Giải.

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$ thì ta có $x,y,z>0, xyz=1$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+7y+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+7z+1}}\ge 1$$

Do $x,y,z>0, xyz=1$ nên tồn tại các số dương m,n,p sao cho $x=\frac{n^2p^2}{m^4}, y=\frac{p^2m^2}{n^4}, z=\frac{m^2n^2}{p^4}$, ta phải chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}}\ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}}\right)^2\left(\sum_{cyc}m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)\right)\ge (m^3+n^3+p^3)^3$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh

$$(m^3+n^3+p^3)^3\ge \sum_{cyc}m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(5m^6n^3+2m^3n^3p^3-7m^5n^2p^2)+\sum_{sym}(m^6n^3-m^4n^4p)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc các số a,b,c thỏa $\frac{a}{b}\to +\infty, \frac{b}{c}\to +\infty$ và các hoán vị.

Bài 3. (Phan Thành Việt)

Cho các số dương a,b,c có tổng bằng 3, chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+3c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+3a^2}}\ge \frac{3}{2}$$

Giải.

Bổ đề.

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2\ge 4(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=4\sum_{cyc}a^2b^4-4\sum_{cyc}a^4b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}\right)^2\left(\sum_{cyc}(a^2+3b^2)(a+c)^3\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^3 \ge \frac{9}{4}\sum_{cyc}(a^2+3b^2)(a+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^3 \ge 3(a+b+c)\sum_{cyc}(a^2+3b^2)(a+c)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^6 + 9\sum_{cyc} a^5b + 12\sum_{cyc} a^4b^2 - 3\sum_{cyc} a^2b^4 - 2\sum_{cyc} a^3b^3 + 27\sum_{cyc} a^4bc - 12\sum_{cyc} a^2b^3c - 6\sum_{cyc} a^3b^2c - 78a^2b^2c^2 \ge 0$$

Sử dụng bổ đề trên, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$9\sum_{cyc} a^5b + 8\sum_{cyc} a^4b^2 + \sum_{cyc} a^2b^4 - 2\sum_{cyc} a^3b^3 + 27\sum_{cyc} a^4bc - 12\sum_{cyc} a^2b^3c - 6\sum_{cyc} a^3b^2c - 75a^2b^2c^2 \ge 0$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} a^4b^2 + \sum_{cyc} a^2b^4 - 2\sum_{cyc} a^3b^3 \ge 0$$

$$9\sum_{cyc} a^5b + 7\sum_{cyc} a^4b^2 + 27\sum_{cyc} a^4bc - 12\sum_{cyc} a^2b^3c - 6\sum_{cyc} a^3b^2c - 75a^2b^2c^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Phần 3. Các bài toán về kỹ thuật bình phương.

I. Các bài toán mẫu.

Bài 1. (Vasile Cirtoaje)

Với mọi số thực a,b,c thì

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Giải.

Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\right) + 3\left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right) - 3\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right) \geq 0$$

Chú ý rằng

$$\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$$

$$\begin{aligned}3\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right) &= 3\left(\sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc\right) = -3\sum_{cyc} bc(a^2-b^2)\\ &= -3\sum_{cyc} bc(a^2-b^2) + \sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2)\\ &= \sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)\end{aligned}$$

$$3\left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right) = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$$

Nên bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2 + \frac{1}{2}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2 - \sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2-ab-ac+2bc)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Bài 2. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Với mọi số thực a,b,c thì

$$a^4+b^4+c^4+\left(\sqrt{3}-1\right)abc(a+b+c) \geq \sqrt{3}(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Giải.

Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\right) + \left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right) - \sqrt{3}\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right) \ge 0$$

Chú ý rằng

$$\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$$

$$\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc = \sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc = -\sum_{cyc} bc(a^2-b^2)$$

$$= -\sum_{cyc} bc(a^2-b^2) + \frac{1}{3}\sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)$$

$$\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc = \frac{1}{6}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$$

Nên bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2 + \frac{1}{6}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-b^2-\frac{1}{\sqrt{3}}(ab+ac-2bc)\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Bài 3. (Phạm Văn Thuận)

Cho các số thực $a,b,c,$ chứng minh rằng

$$7(a^4+b^4+c^4)+10(a^3b+b^3c+c^3a) \ge 0$$

Giải.

Ta chứng minh kết quả mạnh hơn

$$7(a^4+b^4+c^4)+10(a^3b+b^3c+c^3a) \ge \frac{17}{27}(a+b+c)^4$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$86\sum_{cyc} a^4 + 101\sum_{cyc} a^3b - 34\sum_{cyc} ab^3 - 51\sum_{cyc} a^2b^2 - 102\sum_{cyc} a^2bc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 86\left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\right) + 101\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right) - 34\left(\sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^2bc\right) + 35\left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right) \ge 0$$

Chú ý rằng

$$\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc &= \sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc = -\sum_{cyc} bc(a^2-b^2) \\ &= -\sum_{cyc} bc(a^2-b^2) + \frac{1}{3}\sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^2bc &= \sum_{cyc} bc^3 - \sum_{cyc} a^2bc = \sum_{cyc} bc(c^2-a^2) = \sum_{cyc} ca(a^2-b^2) \\ &= \sum_{cyc} ca(a^2-b^2) - \frac{1}{3}\sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2) \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+bc-2ca)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 101\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right) - 34\left(\sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^2bc\right) = \sum_{cyc}(a^2-b^2)(45ab+11ca-56bc)$$

$$\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc = \frac{1}{5282}\sum_{cyc}(45ab+11ca-56bc)^2$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương với

$$43\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2 + \sum_{cyc}(a^2-b^2)(45ab+11ca-56bc) + \frac{35}{5282}\sum_{cyc}(45ab+11ca-56bc)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(43(a^2-b^2)^2 + (a^2-b^2)(45ab+11ca-56bc) + \frac{1}{172}(45ab+11ca-56bc)^2\right) + \\ + \frac{369}{454252}\sum_{cyc}(45ab+11ca-56bc)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{172}\sum_{cyc}(86(a^2-b^2)+45ab+11ca-56bc)^2 + \frac{369}{172}\sum_{cyc} c^2(a-b)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$.

II. Bài tập tự giải.

Bài 1. (Vasile Cirtoaje)

Với mọi số thực a,b,c

$$a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3 \ge 2(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Bài 2. (Phạm Văn Thuận)

Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a,b,c thực

$$a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3 \ge \frac{8}{27}(a+b+c)^4$$

Phần 4. Các bài toán sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

I. Tổng quan về bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân AM-GM.

II. Các bài toán áp dụng.

Bài 1. (Phan Thành Nam)

Cho các số không âm a,b,c có tổng bằng 1, chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\ge 2$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc}\sqrt{a+b^2}=\sum_{cyc}\frac{a+b^2}{\sqrt{a+b^2}}=\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a+b^2)}{(a+b)\sqrt{a+b^2}}\ge\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a+b^2)}{(a+b)^2+a+b^2}$$

$$=\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a(a+b+c)+b^2)}{(a+b)^2+a(a+b+c)+b^2}=\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a^2+b^2+ab+ac)}{2a^2+2b^2+3ab+ac}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a^2+b^2+ab+ac)}{2a^2+2b^2+3ab+ac}\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^5b^2+\sum_{cyc}a^4b^2c+2\sum_{cyc}a^5bc\ge 2\sum_{cyc}a^3b^3c+2\sum_{cyc}a^3b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{9}{19}a^5b^2+\frac{4}{19}b^5c^2+\frac{6}{19}c^5a^2-a^3b^2c^2\right)+abc\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)+2abc\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1,b=c=0$ và các hoán vị.