MỤC LỤC

Chủ đề 1

PHÉP TOÁN VÉCTƠ

☆☆☆

A. HAI VÉCTƠ BẰNG NHAU

I. Chứng minh các véctơ bằng nhau

Ví dụ 1: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và AH. Chứng minh: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AN}$

Giải:

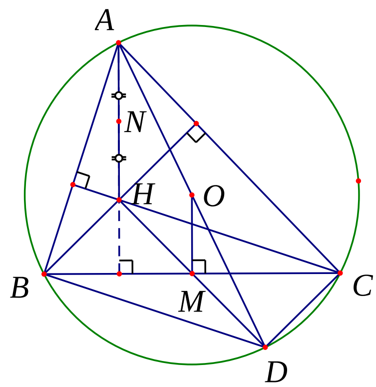
OA kéo dài cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D.

Ta có $DC \perp AC, DB \perp AB$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow BH//DC, CH//DB \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ H,M,D thẳng hàng và MH=MD.

Trong tam giác DAH có OM//AH và $OM = \frac{1}{2}AH$

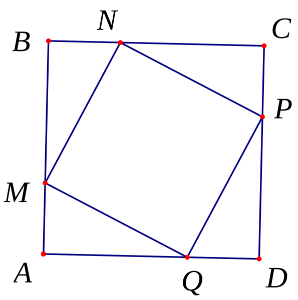
Suy ra $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AN}$.



Ví dụ 2:Cho hình vuông ABCD. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm trên các cạnh AB,BC,CD và DA sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DA} = \frac{1}{3}$ **. Chứng minh rằng:** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

Giải:

Từ giả thiết ta suy ra AM=BN=CP=DQ $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ **và** $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$

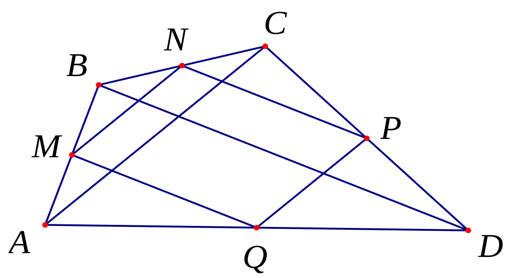


Ví dụ 3:Cho tứ giác ABCD. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD và DA. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

Giải:

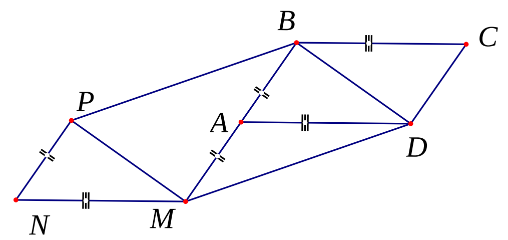
Từ giả thiết ta suy ra MN=PQ và MN//PQ vì chúng đều bằng $\frac{1}{2}AC$ và đều song song với AC. Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành nên ta có

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$



Ví dụ 4:Cho hình bình hành ABCD. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$ **. Chứng minh** $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{PB}$

Giải:



Ta có B,A,M thẳng hàng và AB=AM.

Do $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA} \Rightarrow MN//DA$ và MN=DA.

Do $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ NP//AP và NP=AB

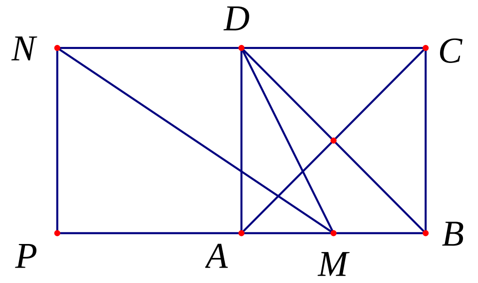
Hai tam giác ABC và NPM bằng nhau và có các cạnh tương ứng song song . Từ đó suy ra MP=DB và MP//DB. Vậy tứ giác MPDB là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{PB}$ (đpcm)

II. Tính độ dài véctơ

Ví dụ 5: Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của các véctơ sau: $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Giải:



Trong tam giác vuông MAD ta có

$$\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \sqrt{AB^2+AM^2} = \sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} .$$

Dựng hình vuông ADNP , khi đó $PM=\dfrac{3a}{2}$.

Trong tam giác vuông MNP ta có

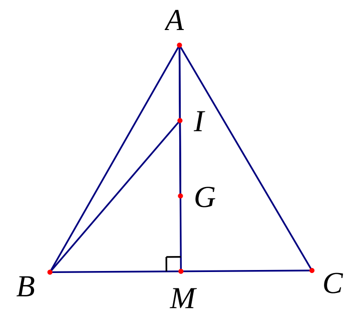
$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \sqrt{NP^2+PM^2} = \sqrt{a^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Ví dụ 6: Cho tam giác đều ABC cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG. Tính độ dài của các véctơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BI}$.

Giải:

Ta có $\left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2-BM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\left|\overrightarrow{BI}\right| = BI = \sqrt{BM^2+MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$



BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$

a) Chứng minh: $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh : $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$

Bài 2: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của DC, AB . Gọi P là giao điểm của của AM và DB ; Q là giao điểm của CN và DB. Chứng minh $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QB}$

Bài 3: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD với AB =2CD. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{DA}$. Chứng minh: a) $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CB}$. b) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{DC}$.

B. TỔNG VÀ HIỆU HAI VÉCTƠ

Dạng 1: Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều véctơ

Phương pháp: Dùng định nghĩa tổng của hai véctơ, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các véctơ

Ví dụ 1: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O . Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

Ví dụ 2: Cho năm điểm A,B,C,D,E. Hãy tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) Tìm tổng của hai véctơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Dạng 2 : Tìm vectơ đối và hiệu của hai véctơ

Phương pháp: 1) Tính tổng $\vec{a}-\vec{b}$,ta làm hai bước sau:

- Tìm véctơ đối của $\vec{b}$ là $-\vec{b}$
- Tính tổng $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

2) Vận dụng quy tắc $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ với ba điểm O,A,B bất kì.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC.Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC.

a) Tìm hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A,B,C,D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

Ví dụ 3: Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M thoả mãn một trong các điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Dạng 3 : Chứng minh Đẳng thức véctơ

Phương pháp:

Sử dụng quy tắc ba điểm , quy tắc hình bình hành , trung điểm để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế để được hai vế bằng nhau hoặc ta cũng có thể biến đổi đẳng thức véctơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức véctơ đã được công nhận là đúng

Ví dụ 1: Cho bốn điểm bất kì A,B,C,D . Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

Ví dụ 2: Cho 6 điểm A,B,C,D ,E, F tuỳ ý . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}$$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh :

$$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB} \text{ và } \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$$

Ví dụ 4: Cho hình bình hành ABCD tâm O. M là điểm tuỳ ý. Chứng minh :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB} \textbf{ và } \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$$

Ví dụ 5: Cho hình bình hành ABCD . Gọi M và N là trung điểm của AD và BC. Chứng minh

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

Ví dụ 6: Cho 6 điểm A,B,C,D ,E, F . Chứng minh rằng: (Bằng nhiều cách khác nhau)

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

e) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$ f) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Dạng 4 : Tính độ dài véctơ

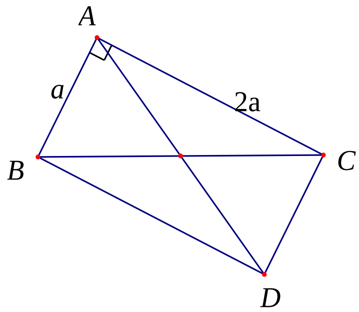
Phương pháp: Đưa tổng hoặc hiệu của các véctơ về một véctơ có độ dài là một cạnh của đa giác

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , biết AB=a ; AC=2a . Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Giải:

+ $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=BC=\sqrt{a^2+(2a)^2}=a\sqrt{5}$

+ $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a\sqrt{5}$

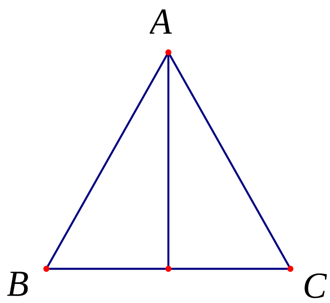


Ví dụ 2: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$.

Giải:

+ $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a$

+ $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a$



Ví dụ 3: Cho hình thoi ABCD cạnh a có $BAD=60^0$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo .Tính:

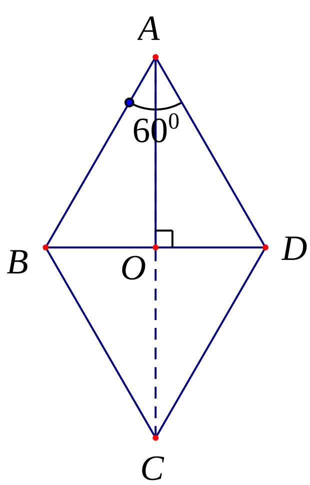
a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|$; c) $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$

Giải:

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=2AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=a\sqrt{3}$

b) $\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=CA=a\sqrt{3}$

c) $\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{CO}\right|=CO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

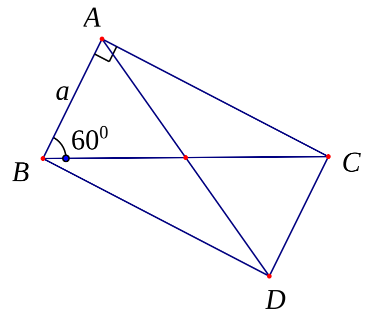


Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , biết AB=a và $B = 60^0$. Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

Giải:

\+ $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

\+ $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = \dfrac{a}{\cos 60^0} = 2a$



Ví dụ 5: Cho hình vuông ABCD cạnh a , có O là giao điểm hai đường chéo . Tính:

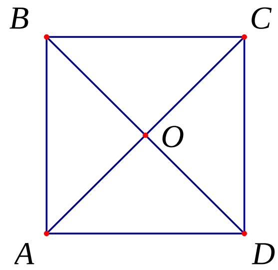
a) $\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right|$;   c) $\left|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\right|$

Giải:

a) $\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BO}\right| = BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

b) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$

c) $\left|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = a\sqrt{2}$



Bài tập

Bài 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a và đường cao AH.Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ và $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

Bài 2: Cho hình vuông ABCD cạnh a . Tính $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right|$; $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD.

a) Với M tuỳ ý, Hãy chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

b) Chứng minh rằng: $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$

Bài 4 : Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$. Khi nào thì:

a) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ b) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$ c) $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$

Bài 5: Tìm tính chất tam giác ABC biết rằng : $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right|$

C.TÍCH CỦA VÉCTƠ VỚI MỘT SỐ

Dạng1 : Chứng minh đẳng thức véctơ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, D là trung điểm của AM. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ b) $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$ (Với O tuỳ ý)

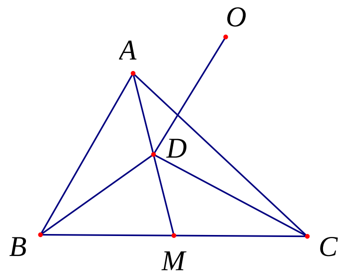
Giải:

a) Có $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DM}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DM}=2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DM}\right)=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}\right)=4\overrightarrow{OD}$



Ví dụ 2: Cho tứ giác ABCD. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$

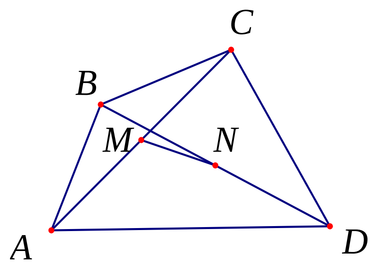
Giải:

Có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DN}\right)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$



Ví dụ 3: Gọi I,J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và CD.

Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Giải:

Có $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

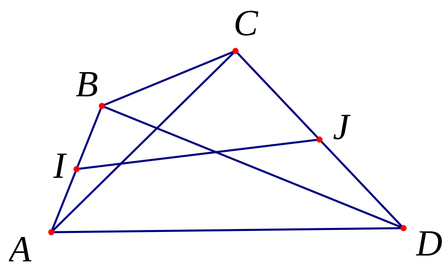
$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{DJ}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Có $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB}+\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{DJ}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$



Ví dụ 4: Chứng minh rằng: Nếu G và G’ lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A’B’C’ thì

$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

Giải:

Có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}$

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}$ và $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$ $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$

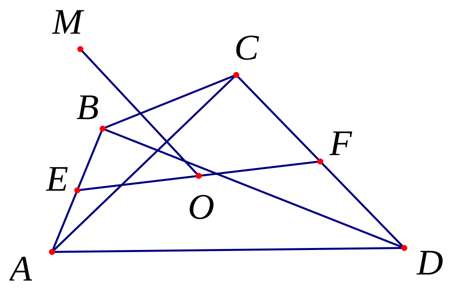
$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}$

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB ,CD và O là trung điểm của EF.

Chứng minh rằng: a) $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$, b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì)

Giải:



a) Có $\begin{matrix}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}\\ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}\end{matrix}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Vậy: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

b) Có $\begin{matrix}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}\end{matrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)=\vec{0}$

c) Có $\begin{matrix}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\end{matrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{MO}$

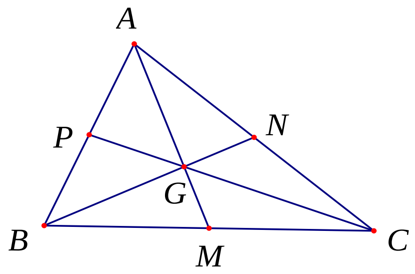
Ví dụ 6: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

Giải:

Có $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG};\ \overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG};\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)=\vec{0}$



Ví dụ 7: Cho hình bình hành ABCD tâm O . $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$

b) Biểu diễn các véctơ sau $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DA}$ theo $\vec{a},\vec{b}$.

Giải:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$

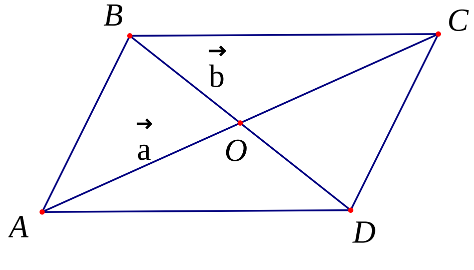
b) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}=2\vec{a}$; $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}=2\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}=\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=-\vec{a}-\vec{b}$



Ví dụ 8: Cho tam giác ABC nội tiến đường tròn tâm O , H là trực tâm của tam giác ,D là điểm đối xứng của A qua O.

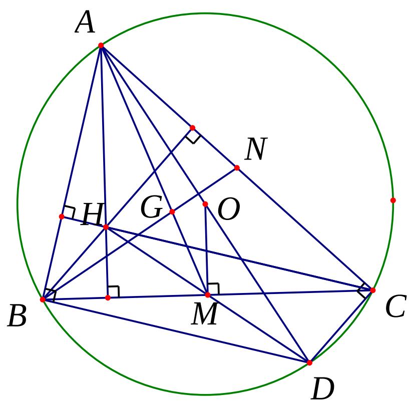
a) Chứng minh tứ giác HCDB là hình bình hành.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Từ đó có kết luận gì về ba điểm O,H,G

Giải:



a) Có BH//DC vì cùng vuông góc với AC

CH//BD vì cùng vuông góc với AB

Suy ra tứ giác HCDB là hình bình hành.

b) Vì O là trung điểm của AD nên: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$

Vì tứ giác HCDB là hình bình hành nên $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$$

Từ đẳng thức $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ Suy ra

$$\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OH}$$

Cách khác: Có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}\ (*)$$

c) Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Kết hợp với (*) ta có $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Hai véctơ $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OG}$ cùng phương nên ba điểm O,H,G thẳng hàng.

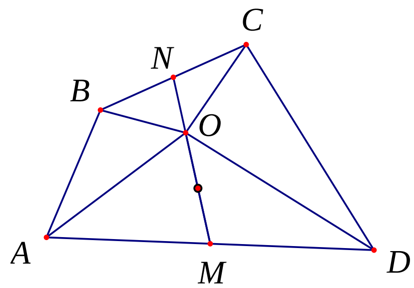
Ví dụ 9: Cho tứ giác ABCD.

a) Gọi M,N là trung điểm của AD, BC. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

b) Gọi O là điểm nằm trên đoạn MN và OM=2ON.Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Giải:



a) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

Vậy: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b) Có;

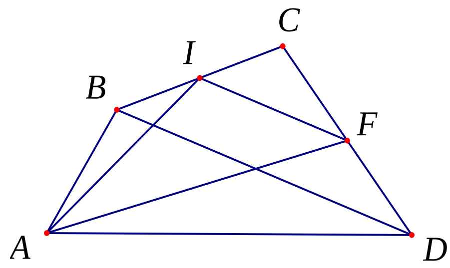
$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{OM}+4\overrightarrow{ON}$$

$$=\ 4\overrightarrow{NO}+4\overrightarrow{ON}=\vec{0}$$

Ví dụ 10: Cho 4 điểm A,B,C,D . Gọi I ,F lần lượt là trung điểm của BC , CD .

Chứng minh: $2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DA}\right)=3\overrightarrow{DB}$

Giải:



Có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AI}$
$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

Do $\overrightarrow{FI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

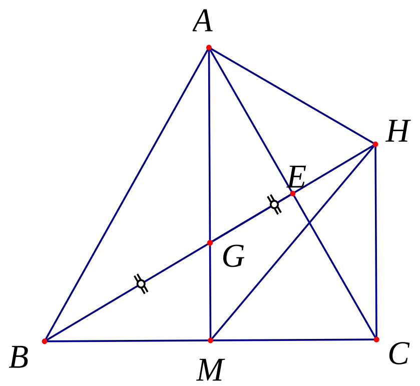
$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{DA}\right)=3\overrightarrow{DB}$

Ví dụ 11: Cho tam giác đều ABC với G là trọng tâm, H là điểm đối xứng với B qua G .Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

b) M là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

Giải:



a) Có $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

b) Có: $\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$
$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

Bài tập

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD.Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

Bài 2: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với M bất kì

Bài 3: Gọi M,N là trung điểm của AB và CD của tứ giác ABCD.Chứng minh rằng:

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Bài 4: Chứng minh rằng: Nếu G và G’ lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A’B’C’ thì

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Suy ra điều kiện để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 5: Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Bài 6: Cho 4 điểm A,B,C,D . M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{MN}$

Bài 7: Gọi O,G,H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng: a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ b) $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GO}$

Dạng 2: Tìm một điểm thoả mãn một đẳng thức véctơ cho trước:

Phương Pháp:

+ Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ trong đó A là một điểm cố định , $\vec{u}$ cố định.

+ Dựng điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$

Ví dụ 1: Cho hai điểm phân biệt A và B . Tìm điểm K sao cho: $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

Giải:

$$3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\Rightarrow K$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC .

a) Tìm điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

b) Tìm điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

c) . Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

d) Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Giải:

a) Có $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BI}=3\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow I$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$

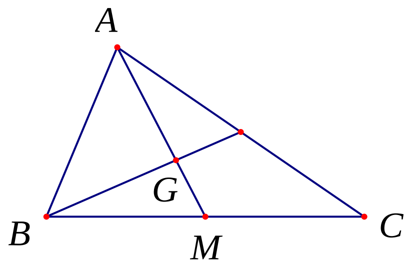
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow O\equiv G$. Vậy điểm O cần tìm chính là trọng tâm G của tam giác ABC.

c) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}\Rightarrow K\equiv G$

(Với M là trung điểm BC , G là trọng tâm tam giác ABC)

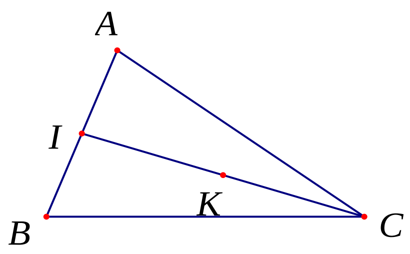


d) Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MK}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv K$

Với K là trung điểm của IC.



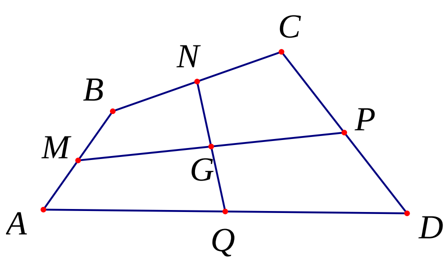
Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Giải:

Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DA

Khi đó ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$ Với G là giao điểm của MP và NQ.Điểm G chính là trọng tâm tứ giác ABCD. Từ đẳng thức $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ suy ra

$4\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\vec{0}\Rightarrow O\equiv G$.



Ví dụ 4: Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

b) Tìm điểm J sao cho: $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c) . Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{BC}$

d**)** . Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=2\overrightarrow{BC}$

e) Tìm điểm L sao cho: $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

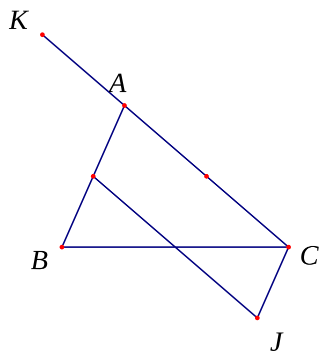
Giải:

a) $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB}+3\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\Rightarrow I$

b) $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JC}-\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{JC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow J$



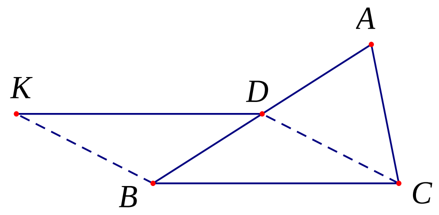
c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{BC}\ \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow K$

d**)** . Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=2\overrightarrow{BC}$

Gọi D là trung điểm của AB. Khi đó $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=2\overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{KD}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow K$ (Tứ giác DCBK là hình bình hành)

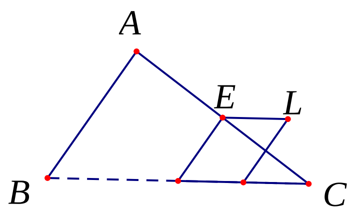


e) Tìm điểm L sao cho: $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

Gọi E là trung điểm của AC. Khi đó $3\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LC}\right)+\overrightarrow{LC}-\overrightarrow{LB}=\vec{0}\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{LE}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$



Ví dụ 5: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho NC=2NA.

a) Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$

b) Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

Giải:

a) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AM, AN. Khi đó

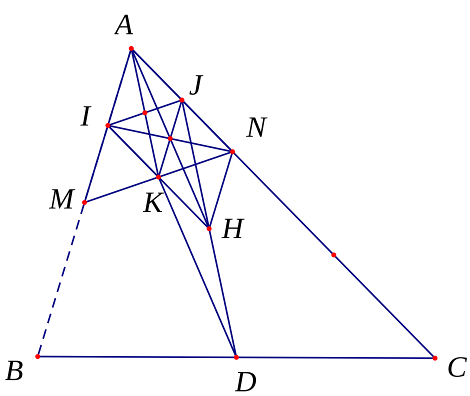
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\Rightarrow K$ là trung điểm của MN.

b) $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AH}$.

Ta chỉ cần tìm điểm D sao cho $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AH}$

(Tứ giác AKDH là hình bình hành)



Ví dụ 6: Cho các điểm A,B,C, D , E . Xác định các điểm O, I , K sao cho

a) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\left(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}\right)=\vec{0}$

Giải:

a) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}=\vec{0}\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MN}=\vec{0}$

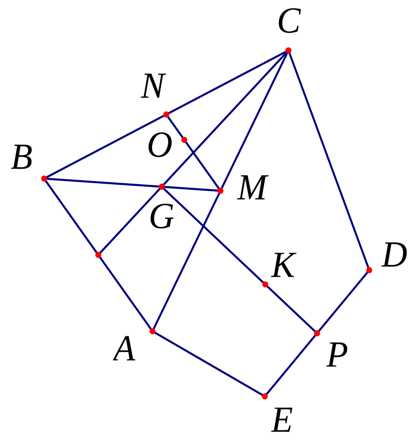
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}\Rightarrow O$

(Với M , N lần lượt là trung điểm của AC , BC.)

b) I là trọng tâm của tứ giác ABCD.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, P là trung điểm của DE.Khi đó $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+3\left(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KG}+6\overrightarrow{KP}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KG}+2\overrightarrow{KP}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GP}$



Ví dụ 7: Cho tam giác ABC và đường thẳng d

a) Xác định điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

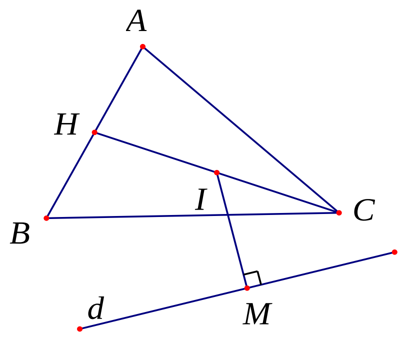
b) Tìm điểm M trên d sao cho véctơ $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

a) Gọi H là trung điểm của AB.Ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IH}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Suy ra I là trung điểm của HC

b) ta có: $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=4\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=4\overrightarrow{MI}=4MI$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên d.



Bài tập

Bài 1: Cho hai điểm phân biệt A và B .Xác định điểm M biết: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Xác đinh các điểm M,N sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CB}$

Bài 3: Cho hình bình hành ABCD. Xác định điểm M thoả mãn : $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

Bài 4: Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Bài 5: Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định các điểm G, P, Q, R , S sao cho:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QB}+2\overrightarrow{QC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{RA}-\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{RC}=\vec{0}$

$5\overrightarrow{SA}-2\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\vec{0}$

b) Với điểm O bất kì và với các điểm G , P , Q, R , S ở câu a) , chứng minh rằng:

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OS}=\frac{5}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

Dạng 3: Phân tích một véctơ theo hai véctơ không cùng phương.

Phương Pháp:

* Quy tắc 3 điểm $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ (phép cộng)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (phép trừ)

* Quy tắc đường chéo hình bình hành: Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

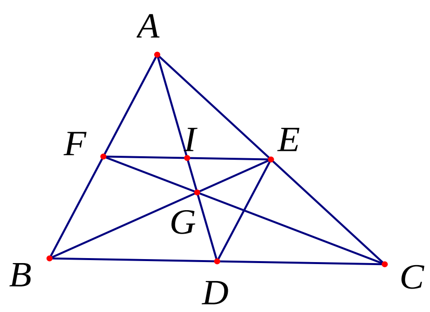
* Tính chất trung điểm : I là rung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ (M bất kì)

* Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (M bất kì)

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA, AB . I là giao điểm AD và EF. Hãy phân tích các véctơ $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$

Giải:



$+\ \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

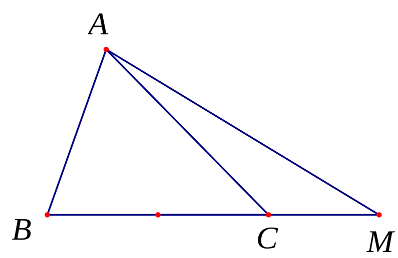
$+\ \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

$+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}=0.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}$

$+\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

Giải:



Có $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{BC}$

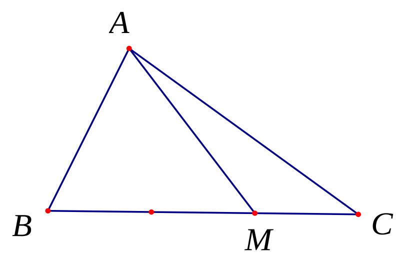
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow M$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC . Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho MB=2MC . hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

Giải:

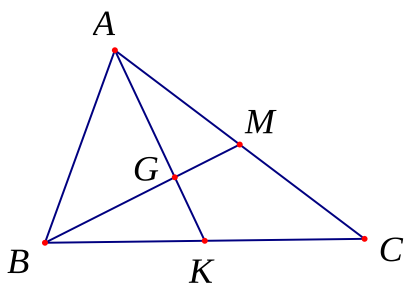


Có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 4: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AK},\overrightarrow{BM}$

Giải:



$+\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM}$ Vậy: $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

$+\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\ =\overrightarrow{BM}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BM}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BM}$. Vậy $\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$

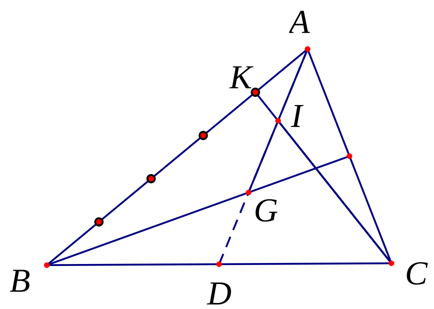
$+\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)-\overrightarrow{AK}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$. Vậy: $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của đoạn AG, K là điểm trên cạnh AB sao cho $AK=\frac{1}{5}AB$. Hãy phân tích các véctơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CK}$ theo $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$

Giải:



$+\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$

Vậy: $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

$+\ \overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$. Vậy $\overrightarrow{AK}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$

$+\ \overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}+\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

$+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$

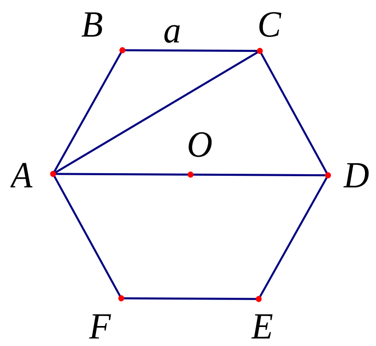
Vậy: $\overrightarrow{CK}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$

Ví dụ 6: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O cạnh a.

a) Phân tích véctơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$

b) Tính độ dài $\left|\vec{u}\right| = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|$ theo a.

Giải:



a) Có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$

(Do $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$)

$\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$

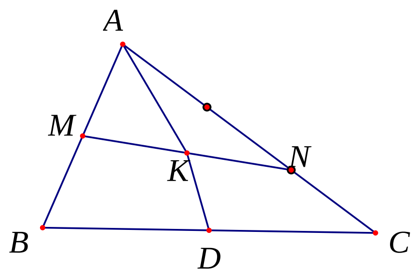
b) $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho NA=2NC . Gọi K là trung điểm MN.

a) Phân tích véctơ $\overrightarrow{AK}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

b) Gọi D là trung điểm BC. Chứng minh: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Giải:



a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

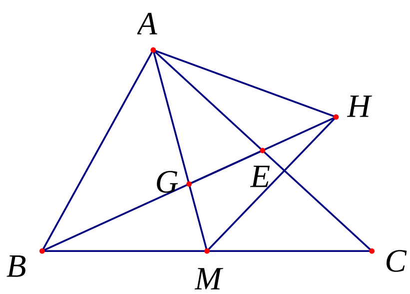
$\Rightarrow \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC , Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng của B qua G.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BH} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi M là trung điểm BC , Chứng minh: $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

Giải:



a) + $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{BH} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE} = \frac{4}{3}\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

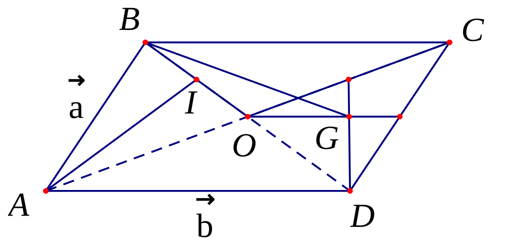
b) $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Vậy: $\overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 9: Cho hình bình hành ABCD , tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Hãy tính các véctơ sau theo $\vec{a},\vec{b}$.   a) $\overrightarrow{AI}$ (I là trung điểm của BO) .

b) $\overrightarrow{BG}$ (G là trọng tâm tam giác OCD). ĐS: $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ $\overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$

Giải:



a) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

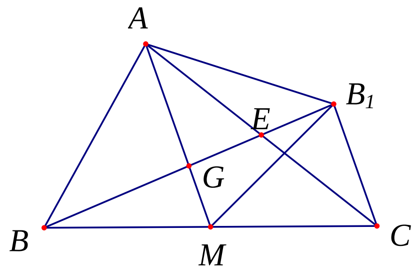
$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

b) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC và G là trọng tâm . B_1 là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm BC. Hãy biểu diễn các véctơ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{MB_1}$ qua hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Giải:



+ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{CB_1}=2\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}.\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\right)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

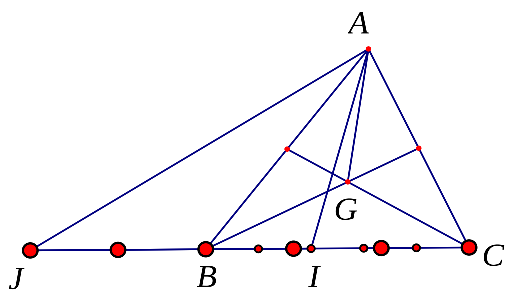
+ $\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 11: Cho tam giác ABC , Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho 2CI=3BI và J thuộc BC kéo dài sao cho 5JB=2JC.

a) Tính $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Từ đó biểu diễn $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$

Giải:



a) + $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Giải hệ: $\begin{cases}3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AI}\\ \overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AJ}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}-\frac{9}{8}\overrightarrow{AJ}$

b) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{AI}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AJ}+\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}-\frac{9}{8}\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{5}{8}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{8}\overrightarrow{AJ}$

Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

Bài 2: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh AC sao cho NA=2NC . Gọi K là trung điểm MN. Phân tích véctơ $\overrightarrow{AK}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

Bài 3: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo các véctơ $\overrightarrow{BN}$,$\overrightarrow{CP}$.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, E là trung điểm CD. Hãy phân tích véctơ $\overrightarrow{AE}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$

Bài 5: Cho tam giác ABC. Gọi I là điểm trên BC kéo dài thoả mãn IB=3IC

a) Tính véctơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi J và K lần lượt là các điểm trên AC , AB sao cho $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{JC}$ và $\overrightarrow{KB}=3\overrightarrow{KA}$. Tính véctơ $\overrightarrow{JK}$ theo các véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{BC}=-10\overrightarrow{AI}-24\overrightarrow{JK}$.

Bài 6: Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định các điểm P,Q,R biết: $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}$; $-2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{RA}-3\overrightarrow{RB}=\vec{0}$

b) Với điểm O bất kì và với ba điểm P,Q,R ở câu a) , Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OR}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

Dạng 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp: Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

Để chứng minh được điều này ta có thể áp dụng một trong hai phương pháp:

+ Cách 1: Áp dụng các quy tắc biến đổi véctơ.

+ Cách 2: Xác định hai véctơ trên thông qua tổ hợp trung gian.

Ví dụ 1: Cho 4 điểm O,A,B,C sao cho $3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Chứng minh rằng A,B,C thẳng hàng.

Giải:

Ta có : $3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}.\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA}-2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

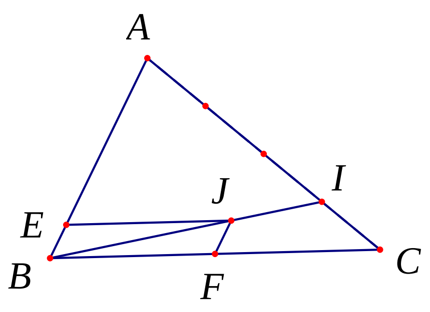
Vậy: ba điểm A,B,C thẳng hàng

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. I là điểm trên cạnh AC sao cho $CI=\frac{1}{4}AC$, J là điểm mà $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ b) Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

Giải:

Đổi đẳng thức $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Ta tìm được điểm J.



a) $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

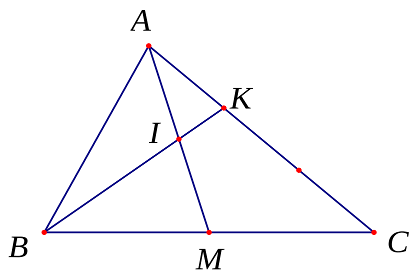
b) Lại có $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ nên B, I, J thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm của AM và K là một điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$.

a) Phân tích véctơ $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BI}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh ba điểm B,I,K thẳng hàng.

Giải:



a) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$$

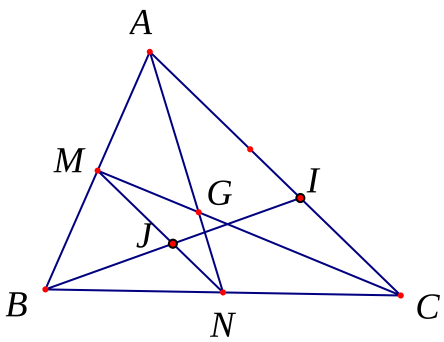
b) $\Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ Vậy ba điểm B,I,K thẳng hàng.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Lấy điểm I,J sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

a) Chứng minh rằng: M,N,J thẳng hàng . Với M,N là trung điểm của AB và BC.

b) Chứng minh rằng: J là trung điểm của BI.

Giải:



Tìm điểm I: Từ giả thiết $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow I$

Tìm điểm J: $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}\right) + 3\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{JM} + 6\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JM} + 3\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JM} + 3\overrightarrow{MN} = \vec{0}$

Hay $\overrightarrow{MJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MN} \Rightarrow J$

a) Từ đẳng thức $\overrightarrow{MJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MN}$ suy ra ba điểm M,N,J thẳng hàng .

b) Từ đẳng thức $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}\right) + 3\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

Từ đẳng thức: $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA}\right) + 5\overrightarrow{JB} + 3\left(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$

$10\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{10}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)$

Như vậy : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$ nên J là trung điểm của BI.

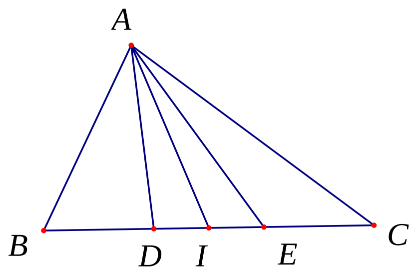
Ví dụ 5: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC ; D và E là hai điểm sao cho: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

b) Tính véctơ: $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AI}$.

c) Suy ra ba điểm A, I , S thẳng hàng.

Giải:



a) Do I là trung điểm của BC nên I cũng là trung điểm của DE.

Nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$.

Suy ra : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{AI}$

c) Có $\overrightarrow{AS}=4\overrightarrow{AI}$ Suy ra ba điểm A, I , S thẳng hàng.

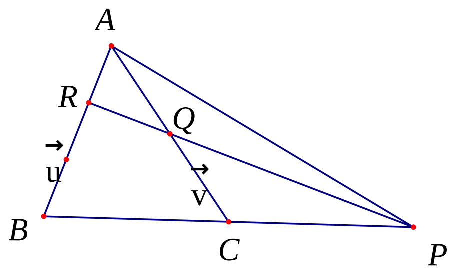
Ví dụ 6: Cho tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$

a) Gọi P là điểm đối xứng với B qua C. Tính $\overrightarrow{AP}$ theo $\vec{u}$,$\vec{v}$.

b) Gọi Q và R là hai điểm định bởi : $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Tính $\overrightarrow{RP}$;$\overrightarrow{RQ}$ theo $\vec{u}$,$\vec{v}$.

c) Suy ra P,Q,R thẳng hàng.

Giải:



a) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=-\vec{u}+2\vec{v}$

b) $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

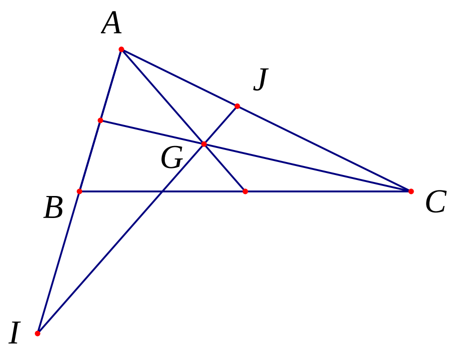
$\Rightarrow \overrightarrow{RP}=-\frac{4}{3}\vec{u}+2\vec{v}=4\left(-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$

$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

c) Nhận thấy $\overrightarrow{RP}=4\overrightarrow{RQ}$ nên ba điểm P,Q,R thẳng hàng.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Lấy điểm I,J sao cho $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải:



Xác định các điểm I,J.

Có $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Phân tích các véctơ $\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IJ}$ qua hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-2\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{6}{5}\left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$. Vậy ba điểm I,G,J thẳng hàng.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC Lấy các điểm M,N,P thoả mãn : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, $3\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}$. Chứng minh: M,N,P thẳng hàng.

Giải:

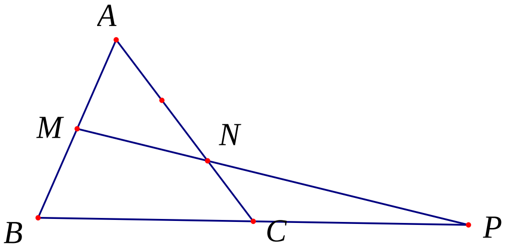
Xác định các điểm M,N,P.

+ M là trung điểm của AB

+ $3\overrightarrow{AN}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

+ $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BC}$

+ Phân tích các véctơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo hai véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Hay : $\overrightarrow{MP}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=3\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MP}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=3\overrightarrow{MN}$. Vậy ba điểm M,N,P thẳng hàng.

Ví dụ 9: Cho hình bình hành ABCD . Lấy các điểm I,J thoả mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ $\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Chứng minh I,J ,O thẳng hàng với O là giao điểm của AC và BD.

Giải:

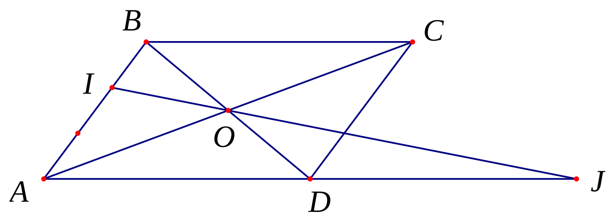
Xác định các điểm I, J.

+ $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

+ $\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AD}$



+ Biểu diễn các véctơ $\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IO}$ qua các véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Có : $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=4\left(-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=4\overrightarrow{IO}$. Vậy ba điểm I,J ,O thẳng hàng .

Ví dụ 10: Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$. Chứng minh B,M,C thẳng hàng.

Giải:

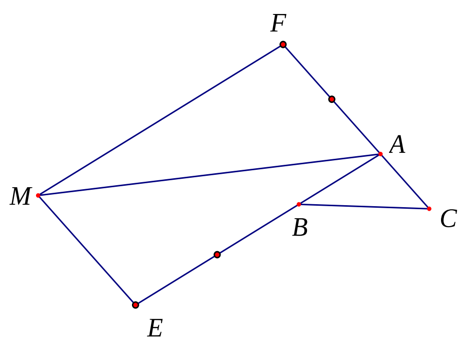
+ Dựng các véctơ $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\Rightarrow M$

+ $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-\left(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC}$

$=3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=3\overrightarrow{BC}$

Do $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{BC}$ nên ba điểm M,B,C thẳng hàng.



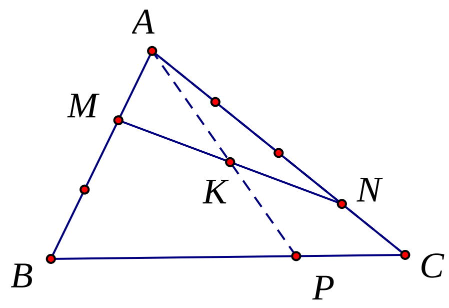
Ví dụ 11: Cho tam giác ABC . Gọi M,N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{2}MB, AN = 3NC$ và điểm P xác định bởi hệ thức $4\overrightarrow{PB} + 9\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Gọi K là trung điểm MN.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$ b) Chứng minh: Ba điểm A,K,P thẳng hàng.

Giải:

Xác định điểm P: $4\overrightarrow{PB} + 9\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{PB} + 9\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{9}{13}\overrightarrow{BC}$



a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

b) Tìm $\overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{9}{13}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{9}{13}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

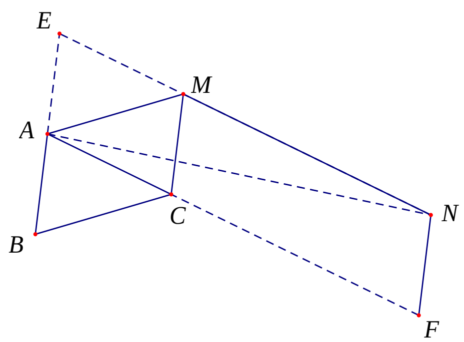
$\overrightarrow{AP} = \frac{4}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{13}\overrightarrow{AC} = \frac{24}{13}\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{24}{13}\overrightarrow{AK}$ **.** Vì vậy ba điểm A,K,P thẳng hàng.

Ví dụ 12: Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh MN//AC.

Giải:

+ Xác định các điểm M,N.



Có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ Tứ giác ABCM là hình bình hành.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

Dựng các véctơ $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

$= -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 2\overrightarrow{AC}$ Vậy: MN//AC

Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC . Lấy các điểm M,N,P sao cho $\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$;
$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Chứng minh rằng M,N,P thẳng hàng.

Bài 2: Cho tam giác ABC . M là điểm trên BC, N là điểm trên AM còn P là điểm trên AC sao cho $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$; $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{7}$. Chứng minh ba điểm B,N,P thẳng hàng.

Bài 3: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Giả sử I và J là các điểm thoả mãn hệ thức
$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

a) Dựng các điểm I,J.

b) Chứng minh ba điểm I, G, B thẳng hàng.

c) Chứng minh I J// AC.

Bài 4: Cho tam giác ABC

a) Dựng điểm I thoả mãn hệ thức: $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

b) Giả sử các điểm M,N biến thiên nhưng luôn luôn thoả mãn hệ thức
$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.
Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Dạng 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau:

Phương pháp:

Để chứng minh M và M' trùng nhau , ta lựa chọn một trong hai hướng:

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ với O là điểm tuỳ ý.

Ví dụ 1: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M,N , P,Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng: Hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

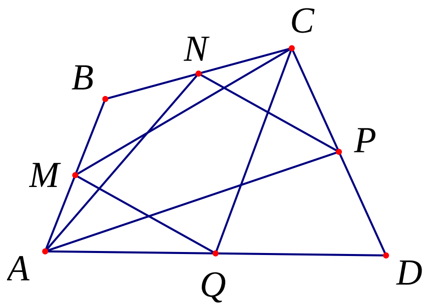
Giải:

Với điểm G bất kì ta có

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$$

$$=\overrightarrow{GC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}\right)$$

$$=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GQ}$$



Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

Do đó Hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm G.

Ví dụ 2: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE,EF,FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

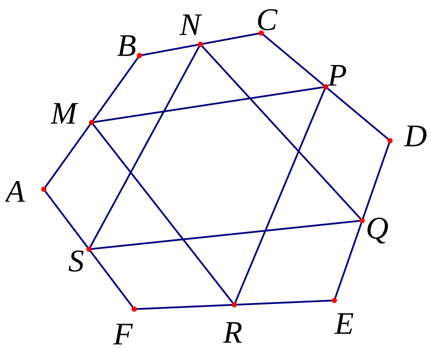
Giải:

Với điểm G bất kì ta có

$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GA}\right)$$

$$=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}$$



Vậy $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$

Do đó Hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm G.

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi I,J là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$

b) Gọi P,Q là trung điểm các đoạn thẳng AC và BD , M và N là trung điểm AD và BC. Chứng minh rằng: Ba đoạn thẳng IJ , PQ , MN có cùng trung điểm.

Giải:

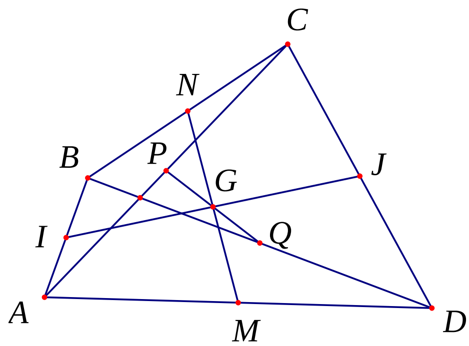
a) Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Lại có $\begin{matrix}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}\\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\end{matrix}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{DJ}\right)=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$$

Vì vậy: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$

b) Ba hình bình hành MPNQ , MINJ, MIPJ có các đường chéo MN, PQ, IJ đồng quy tại trung điểm mỗi đường.



Bài tập

Bài 1: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm tương ứng là G , G'.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$

b) Từ đó suy ra nếu $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ thì hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 2: Cho hai tam giác ABC . Lấy D,E,F lần lượt trên các cạnh BC,CA,AB sao cho $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AF}{AB}=\frac{1}{3}$. Chứng minh hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Bài 3: Cho ngũ giác ABCDE. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BC , CD , DE , EA . Chứng minh rằng hai tam giác MPE và NQR có cùng trọng tâm.

Bài 4: Cho hai hình bình hành ABCD và AB'C'D' có chung đỉnh A. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{C'C}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$

b) Hai tam giác BC'D và B'CD' có cùng trọng tâm.

Dạng 6: Quỹ tích điểm

Phương pháp: Đối với bài toán quỹ tích, học sinh cần nhớ một số quỹ tích cơ bản sau:

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right|=k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A,B , C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C , bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$
- Nếu $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{BC}$ thì
  + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC nếu $k\in\mathbb{R}$
  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ nếu $k\in\mathbb{R}^{+}$
  +M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ nếu $k\in\mathbb{R}^{-}$

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. M là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng: véctơ $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ không đổi.

b) Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn: $\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Giải:

a) $\vec{v}=3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$

$\vec{v}=3\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+2\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$ là véctơ không đổi.

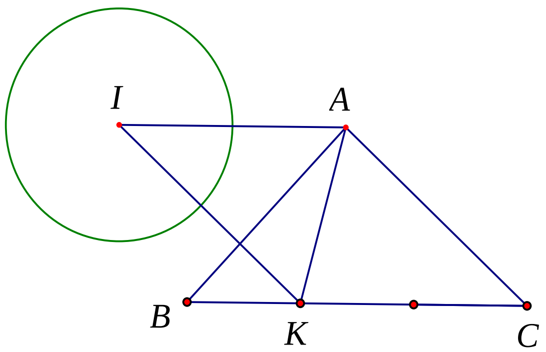
b) Chọn điểm I sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Khi đó $\left|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$

$3\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\Rightarrow MI=\frac{1}{3}BC$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=\frac{1}{3}BC$



Về mặt hình học: $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\Rightarrow I$

Ta chỉ cần vẽ đường tròn tâm I bán kính $R=\frac{1}{3}BC$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

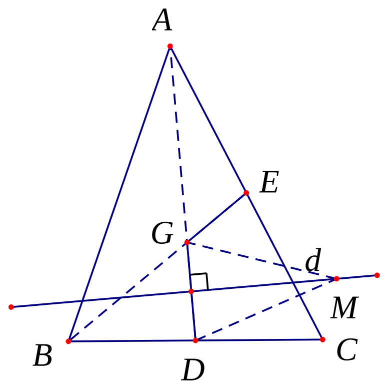
Giải:

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm của BC.

Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\left|3\overrightarrow{MG}\right|=\frac{3}{2}\left|2\overrightarrow{MD}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{MD}\right|\Leftrightarrow MG=MD$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng trung trực của đoạn GD.



……

b) Chọn điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$

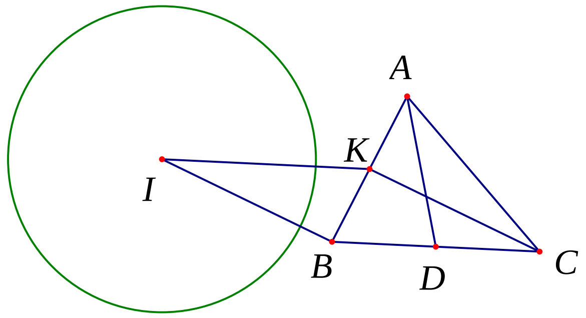
$=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right|\Leftrightarrow MI=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right|$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn

tâm I bán kính $R=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right|=AD$.



Về mặt hình học: Gọi K là trung điểm của AB. Khi đó:

$\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IK}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow I$

$R=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=AD$

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD. Với k là số tuỳ ý thuộc đoạn $[0;1]$ lấy các điểm M,N sao cho

$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$.

Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

Giải:

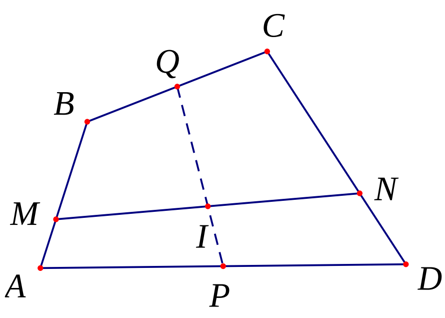
Gọi P ,Q lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Ta có $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$

Vì P và I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$\overrightarrow{PI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}\right)=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{PI}=k\overrightarrow{PQ}$

Ba điểm P,I Q thẳng hàng . Do $0\le k\le 1$ nên tập hợp các điểm I là đoạn thẳng PQ.



Bài tập

Bài 1: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

$$2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$ c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$

Bài 3: Cho hai điểm A và B .Tìm tập hợp những điểm M thoả mãn:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

MỘT SỐ VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

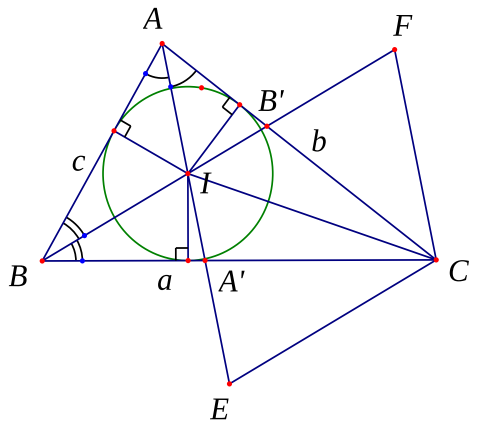
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác .

a) Phân tích véctơ $\overrightarrow{IC}$ theo các phương AI, BI.

b) Từ câu a) hãy chứng minh hệ thức véctơ $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

(trong đó BC=a, CA= b, AB = c)

Giải:



a) Dựng hình bình hành IECF . Viết $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}$

Ta có $\frac{IE}{IA}=\frac{CF}{IA}=\frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{BA}=\frac{a}{c}\Rightarrow\overrightarrow{IE}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$

(Do BB' là là đường phân giác trong của góc B nên $\frac{B'C}{B'A}=\frac{BC}{BA}=\frac{a}{c}$)

Tương $\frac{IF}{IB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\overrightarrow{IF}=-\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}$. Vì vậy $\overrightarrow{IC}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}-\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}$

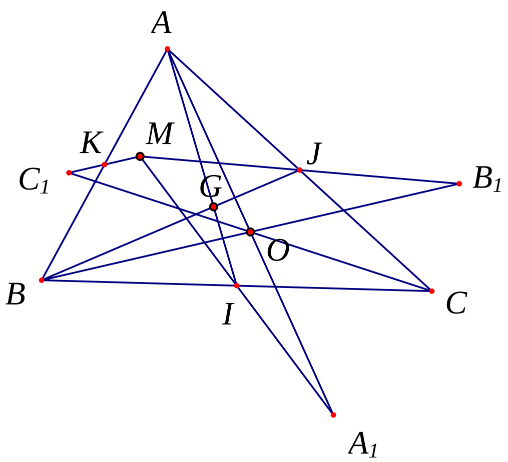
b) Từ kết quả $\overrightarrow{IC}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}-\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}\Rightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC Có trọng tâm G , M là điểm tuỳ ý .Gọi A_1 , B_1 , C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm I, J, K của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh AA_1 , BB_1 , CC_1 đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn (gọi là điểm O).

b) Chứng minh M,O,G thẳng hàng.

Giải:



a) Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC_1}$

Từ đó suy ra các đoạn AA_1 , BB_1 , CC_1 đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn .

b) Từ kết quả câu a) ta có

$$2\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$$

Suy ra hai véctơ $\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MG}$ cùng phương hay M,O,G thẳng hàng.

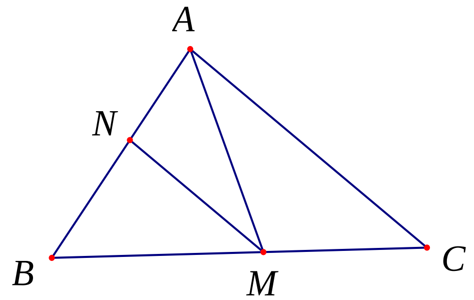
Ví dụ 3: Cho tam giác ABC , M là một điểm trên cạnh BC . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$$

Giải:

Vẽ MN//AC ($N \in AB$)

Áp dụng định lí Ta-lét ta có



$$\overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AB}\overrightarrow{AB} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}$$

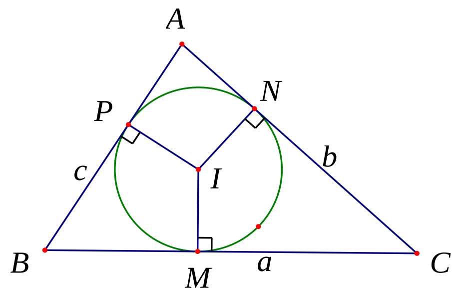
$$\overrightarrow{NM} = \frac{NM}{AC}\overrightarrow{AC} = \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$$

Ví dụ 4: Đường tròn tâm I nội tiếp trong tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA , AB lần lượt tại M,N,P. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \vec{0}$ (Trong đó BC=a , CA=b, AB=c)

Giải:

Gọi p là nửa chu vi tan giác ABC , ta có:



$$\begin{cases} AP = AN = p - a \\ BM = BP = p - b \\ CN = CM = p - c \end{cases}$$

Áp dụng ví dụ 3 ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{IB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{IC}$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{IM} = (p-c)\overrightarrow{IB} + (p-b)\overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\begin{cases} b\overrightarrow{IN} = (p-a)\overrightarrow{IC} + (p-c)\overrightarrow{IA} \\ c\overrightarrow{IP} = (p-b)\overrightarrow{IA} + (p-a)\overrightarrow{IB} \end{cases}$ Cộng từng vế các đẳng thức này ta được

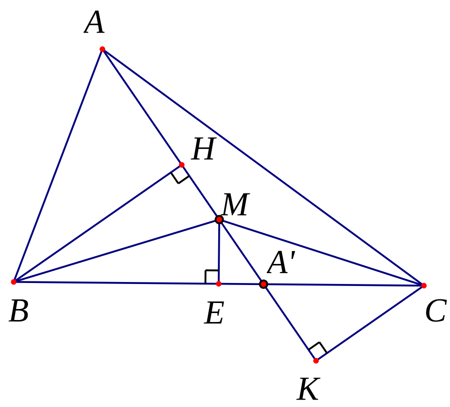
$$a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = (2p-b-c)\overrightarrow{IA} + (2p-c-a)\overrightarrow{IB} + (2p-a-b)\overrightarrow{IC} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì trong tam giác . Đặt

$S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng: $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Giải:

Áp dụng ví dụ 3 ta có $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$



Ta lại có:

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{\frac{1}{2}MA'.CK}{\frac{1}{2}MA'.BH} = \frac{CK}{BH} = \frac{\frac{1}{2}CK.MA}{\frac{1}{2}BH.AM} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c}$$

$$\Rightarrow \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \;;\; \Rightarrow \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC} \quad (*).$$

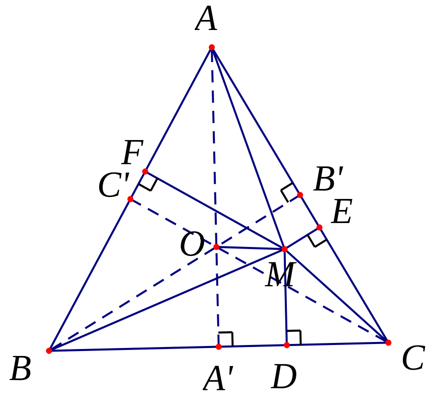
+ Tính $\frac{MA'}{MA}=\frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}}=\frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}}=\frac{S_{MA'C}+S_{MA'B}}{S_{MAC}+S_{MAB}}=\frac{S_a}{S_b+S_c}\Rightarrow\overrightarrow{MA'}=-\frac{S_a}{S_b+S_c}\overrightarrow{MA}$. Thay vào (*)

Ta được $-\frac{S_a}{S_b+S_c}\overrightarrow{MA}=\frac{S_b}{S_b+S_c}\overrightarrow{MB}+\frac{S_c}{S_b+S_c}\overrightarrow{MC}$. Suy ra $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Ví dụ 6: Cho tam giác đều ABC tâm O. M là một điểm tuỳ ý bên trong tam giác. D,E,F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Giải:

Gọi AA' , BB' , CC' là các đường cao của tam giác đều ABC



Khi đó $S_{MBC}.\overrightarrow{MA}+S_{MCA}.\overrightarrow{MB}+S_{MAB}.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Đặt $S=S_{ABC}$

Ta luôn có: $\overrightarrow{MD}=\frac{MD}{AA'}.\overrightarrow{AA'}=\frac{S_{MBC}}{S}\overrightarrow{AA'}=\frac{3}{2}\frac{S_{MBC}}{S}\overrightarrow{AO}$

$$\overrightarrow{ME}=\frac{ME}{BB'}\overrightarrow{BB'}=\frac{S_{MCA}}{S}\overrightarrow{BB'}=\frac{3}{2}\frac{S_{MCA}}{S}\overrightarrow{BO}$$

$$\overrightarrow{MF}=\frac{MF}{CC'}\overrightarrow{CC'}=\frac{S_{MAB}}{S}\overrightarrow{CC'}=\frac{3}{2}\frac{S_{MAB}}{S}\overrightarrow{CO}$$

Cộng vế với vế ba đẳng thức này ta được

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\left(\frac{S_{MBC}}{S}\overrightarrow{AO}+\frac{S_{MCA}}{S}\overrightarrow{BO}+\frac{S_{MAB}}{S}\overrightarrow{CO}\right)$$

$$=\frac{3}{2S}\left(S_{MBC}\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA}\right)+S_{MCA}\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}\right)+S_{MAB}\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MC}\right)\right)$$

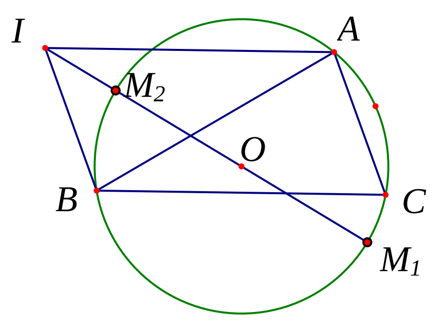
$$=\frac{3}{2S}(S_{MBC}+S_{MCA}+S_{MAB}).\overrightarrow{MO}-\frac{3}{2S}\left(S_{MBC}.\overrightarrow{MA}+S_{MCA}\overrightarrow{MB}+S_{MAB}\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2S}.S.\overrightarrow{MO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Ví dụ 7: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ lớn nhất , nhỏ nhất.

Giải:

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBI , ta có



$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}$, ∀M

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ lớn nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_1$

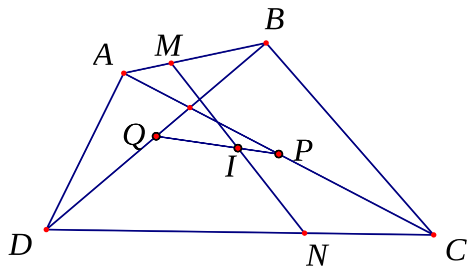
$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv M_2$

Trong đó M_1 ,M_2 là giao điểm của đường thẳng IO với đường tròn, M_1 khác phía với I, M_2 cùng phía với I đối với tâm O.

(Tam giác ABC nhọn nên I luôn nằm ngoài đường tròn)

Ví dụ 8: Cho tứ giác ABCD. Hai điểm M,N thay đổi trên các cạnh AB , CD sao cho: $\frac{AM}{AB}=\frac{CN}{CD}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN.

Giải:



Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=k\overrightarrow{CD}$; $(0\le k\le 1)$

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD.

$$\begin{cases}\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}\\ \overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NI}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{PI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}\right)=\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$$

Có $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{PI}=k\overrightarrow{PQ}$. Chứng tỏ P,I,Q thẳng hàng . Vì $0\le k\le 1$nên I thuộc đoạn PQ.

Vậy :Tập hợp các trung điểm I của đoạn MN là đoạn PQ.

Bài tập

Bài 1: Cho ngũ giác ABCDE. Các điểm M,N,P,Q , R, S theo thứ tự là trung điểm các đoạn EA, AB. BC,CD,MP,NQ. Chứng minh rằng RS//ED và $RS=\frac{1}{4}ED$

Bài 2: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD . Chứng minh rằng I,E,F thẳng hàng.

Bài 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh ràng véctơ $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ Không phụ thuộc vào vị trí của M. Tính độ dài véctơ $\vec{u}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC , hai điểm M,N thay đổi sao cho $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CHƯƠNG I. VÉCTƠ

1.1 Xác định véctơ

Câu 1: Cho tam giác ABC, có thể xác định bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C ?

A.3 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 9

Câu 2: Cho tứ giác ABCD. Số các vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 12

Câu 3: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của lục giác là:

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9

Câu 4: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và cuối là đỉnh của lục giác là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Câu 5: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C, có bao nhiêu điểm D thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 6: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C, có bao nhiêu điểm D thỏa mãn: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** vô số

Câu 7: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:

A. ABCD là hình bình hành. **B.** ABDC là hình bình hành.

C. AD và BC có cùng trung điểm **D.** AB = CD và AB // CD

1.2 Tổng – Hiệu hai véc tơ

Câu 8: Cho hình chữ nhật ABCD có AB=3, BC=4. Độ dài của $\overrightarrow{AC}$ là:

A.5 **B.**6 **C.** 7 **D.** 9

Câu 9: Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ **D.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$

Câu 10: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. IA = IB **B.** $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ **C.** $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ **D.** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$

Câu 11: Cho ΔABC cân ở A, đường cao AH . Câu nào sau đây sai:

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}$ **C.** $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Câu 12: Cho đường tròn tâm O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với (O) tại hai điểm A và B . Câu nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OB}$ **C.** OA = –OB **D.** AB = –BA

Câu 13: Cho ΔABC đều , cạnh a . Câu nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ **B.** $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$ **C.** $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$ **D.** $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC}$

Câu 14: Cho đ.tròn tâm O , và hai tiếp tuyến MT, MT ' (T và T' là hai tiếp điểm) . Câu nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MT'}$ **B.** $\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MT'} = \overrightarrow{TT'}$ **C.** MT = MT ′ **D.** $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OT'}$

Câu 15: Cho ΔABC, với M là trung điểm của BC . Tìm câu đúng:

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ **B.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ **C.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$

Câu 16: Cho ΔABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tìm câu sai:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PM}$

Câu 17: Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$ **B.** $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$ **D.** $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}$

Câu 18: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

A. I A = I B **B.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **C.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$

Câu 19: Cho ba điểm ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

A. AB + BC = AC **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{BC}|$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}$

Câu 20: Cho bốn điểm ABCD. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$

Câu 21: Cho hình vuông ABCD, trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng ?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **D.** $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$

Câu 22: Cho ΔABC và một điểm M thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Trong các mệnh đề sau tìm đề sai :

A. MABC là hình bình hành **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ **D.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$

1.3 Tích véctơ với một số

Câu 23: Cho ΔABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$ **B.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ **C.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$

Câu 24: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\mathbf{3}\overrightarrow{\mathbf{AG}}$ **C.** $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{\mathbf{BG}}+\overrightarrow{\mathbf{CG}}$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}$

Câu 25: Cho hình bình hành ABCD. Đẳng thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{\mathbf{BD}}=2\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{\mathbf{BD}}=2\overrightarrow{C\mathbf{D}}$ **D.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{A\mathbf{D}}=\overrightarrow{C\mathbf{D}}$

Câu 26: Cho ΔABC vuông tại A với M là trung điểm của BC . Câu nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$ **B.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$ **C.** $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2}$

Câu 27: Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề sai :

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{NC}$ **C.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{MN}$ **D.** $\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Câu 28: Cho hình vuông ABCD có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$

Câu 29: Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thoả mãn : $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=1$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 30: Cho hình bình hành ABCD, có M là giao điểm của hai đường chéo. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

Câu 31: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng :

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$ **C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Câu 32: Cho tam giác ABC điểm I thoả: $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}}{3}$ **B.** $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{3}$

C. $\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ **D.** $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{-3}$

Câu 33: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ bằng

A. 2a **B.** a **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 34: Cho ΔABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$ **B.** $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

Câu 35: Cho tam giác ABC. I là điểm nào nếu $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

A. Trung điểm AB **B.** Trọng tâm tam giác ABC

C. Đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBI **D.** Đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCI

Câu 36: Cho hình bình hành ABCD, Điểm M thoả mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ Khi đó, điểm M là:

A. Trung điêm AC **B.** Điểm C **C.** Trung điểm AB **D.** Trung điểm AD

Câu 37: Cho ba điểm ABC thoả mãn $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$. Chọn câu trả lời sai :

A. Ba điểm A,B,C thẳng hàng **B.** Điểm B nằm trên AC và ngoài đoạn AC

C. Điểm C là trung điểm đoạn thẳng AB **D.** Điểm B là trung điểm đoạn thẳng AC

Câu 38: Cho tam giác ABC. Điểm N thoả mãn $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ là:

A. Trọng tâm tam giác ABC

B. Trung điểm đoạn BC

C. Trung điểm đoạn AK với K là trung điểm đoạn BC

D. Đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và AC làm hai cạnh.

Câu 39: Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

A. I là trung điểm BC **B.** I không thuộc BC

C. I nằm trên BC ngoài đoạn BC **D.** I thuộc đoạn BC và $BI=\frac{3}{2}IC$

Câu 40: Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

A. Trọng tâm tam giác ABC **B.** Đỉnh của hình bình hành ABCM

C. Trùng điểm B **D.** Trung điểm BC

Câu 41: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Trên cạnh BC lấy hai điểm M,N sao cho BM=MN=NC. Điểm G là điểm gì của tam giác AMN ?

A. Trực tâm **B.** Tâm đường tròn ngoại tiếp

C. Tâm đường tròn nội tiếp. **D.** Trọng tâm

Câu 42: Cho tứ giác ABCD. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB và CD.Điểm G thoả mãn : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Xét các mệnh đề :

I. G là trung điểm của AC II. G là trung điểm của EF.

Mệnh đề nào đúng :

A. Chỉ I **B.** Cả I,II đều đúng **C.** Chỉ II **D.** I , II đều sai

Câu 43: Cho tứ giác ABCD. Điểm P thoả mãn hệ thức $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

A. P là trung điểm AG , G là trọng tâm tam giác ACD.
B. P là trung điểm AG , G là trọng tâm tam giác BAD.
C. P là trung điểm AG , G là trọng tâm tam giác BCD.
D. P là trung điểm AG , G là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 44: Tứ giác ABCD là hình thoi có đáy AB và CD khi và chỉ khi

A. AD//BC
B. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ với $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
C. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ với k>0
D. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ với k<0

Câu 45: Tứ giác ABCD là hình thoi khi và chỉ khi

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $AC\perp BD$
B. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ và AC là phân giác BAD
C. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$
D. Các kết quả A,B,C đều đúng.

Câu 46: Cho tam giác ABC có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì tam giác ABC :

A. Cân
B. Đều
C. Vuông tại A
D. Vuông tại B

Câu 47: Tứ giác ABCD là hình gì nếu thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$?

A. Hình thang
B. Hình chữ nhật
C. Hình bình hành
D. Hình vuông

Câu 48: Tứ giác ABCD thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$ thì tứ giác đó là hình gì?

A. Hình bình hành
B. Hình chữ nhật
C. Hình thang
D. Hình thoi.

Câu 49: Gọi M,N lầ lượt là trung điểm của cạnh AD và DC của tứ giác ABCD . Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AN}$ .Tứ giác ABCD là hình gì ?

A. Hình bình hành
B. Hình thang
C. Hình chữ nhật
D. Hình vuông

Câu 50: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a,b,c và trọng tâm G thoả mãn $a^2\overrightarrow{GA}+b^2\overrightarrow{GB}+c^2\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Tam giác ABC là tam giác gì ?

A. Đều
B. Cân tại A
C. Thường
D. Vuông tại B.

Câu 51: Cho tam giác ABC cố định , M là điểm di động thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3$. Khi đó tập hợp các điểm M là :

A. Đoạn thẳng
B. Đường thẳng
C. Đường tròn
D. Các kết quả A,B,C đều sai

Câu 52: Cho tam giác ABC có trọng tâm G , I là trung điểm BC. Tập hợp các điểm M di động thoả mãn $2\left|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right|=3\left|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right|$ là :

A. Đường trung trực của IG
B. Đường thẳng qua G và vuông góc với IG
C. Đường thẳng qua G và song song với IG
D. Đường tròn tâm G, bán kính IG

Câu 53: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau:

A. Tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF ; E,F lần lượt là trung điểm của AB, AC.
B. Tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với BC.
C. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AB}{9}$
D. Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AC.

Câu 54: Cho hai điểm cố định A và B. Tập hợp điểm M thoả mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là:

A. Đường tròn đường kính AB
B. Trung trực của đoạn thẳng AB

C. Đường tròn tâm I , bán kính AB **D.** Nửa đường tròn đường kính AB.

Câu 55: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ là:

A. Đường tròn tâm G , đường kính BC **B.** Đường tròn tâm G, đường kính $\frac{BC}{3}$

C. Đường tròn tâm G, bán kính $\frac{BC}{3}$ **D.** Đường tròn tâm G , đường kính 3MG

Câu 56: Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương sao cho $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2}$. Khi đó, véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá

A. Trùng nhau **B.** Song song với nhau

C. Vuông góc với nhau **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau

Câu 57: Cho tam giác đều ABC , tâm O, M là điểm bất kì trong tam giác . Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác là D, E., F . Hệ thức giữa các véctơ $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{MO}$ là :

A. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Câu 58: Cho tam giác ABC có trực tâm H, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chọn khẳng định đúng:

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OH}$

Câu 59: Cho tam giác ABC có trực tâm H, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Chọn khẳng định đúng:

A. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=4\overrightarrow{OH}$ **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OH}$

C. $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OH}$ **D.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{OH}$

Câu 60: Cho tam giác ABC với các cạnh AB=c , BC=a, CA=b . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A. $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ **B.** $\frac{1}{a}\overrightarrow{IA}+\frac{1}{b}\overrightarrow{IB}+\frac{1}{c}\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

C. $b\overrightarrow{IA}+c\overrightarrow{IB}+a\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ **D.** $a\overrightarrow{IA}-b\overrightarrow{IB}-c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$