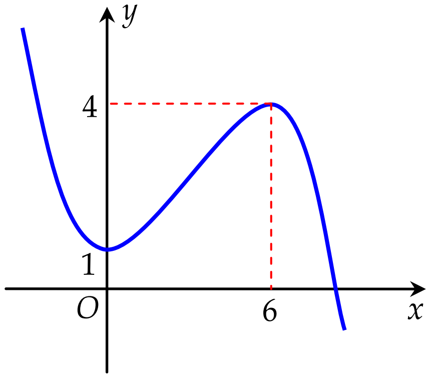
MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐỒ THỊ HAY

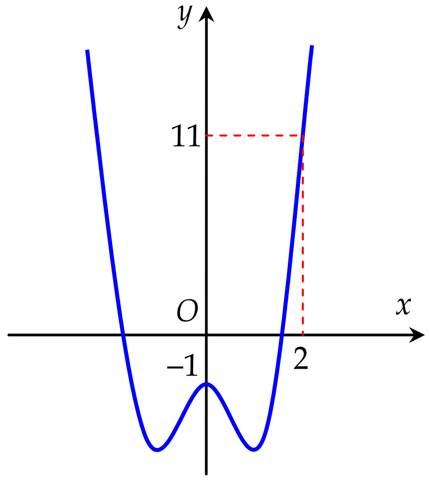
Nguyễn Minh Tuấn

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số tiệm cận đứng ít nhất có thể của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{(x^2+1)(f(x)-1)}$ có thể bằng bao nhiêu?



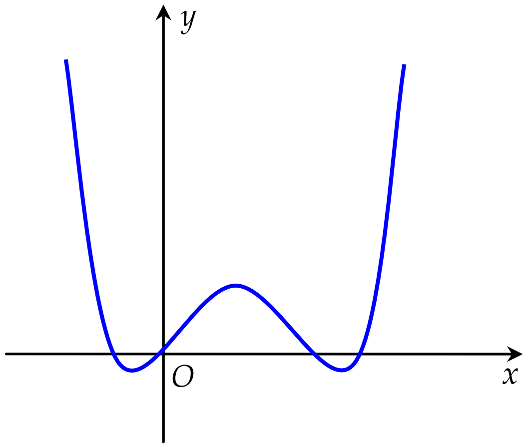
A. 1 **B.** 2
C. 3 **D.** 4

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ đồng thời $f(x+1)-f(x)=2x(2x+1)(x+1)(*)$ Biết rằng hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\,;g(x)=mx^2+nx+p$ và $f(x)=g(x^2-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$



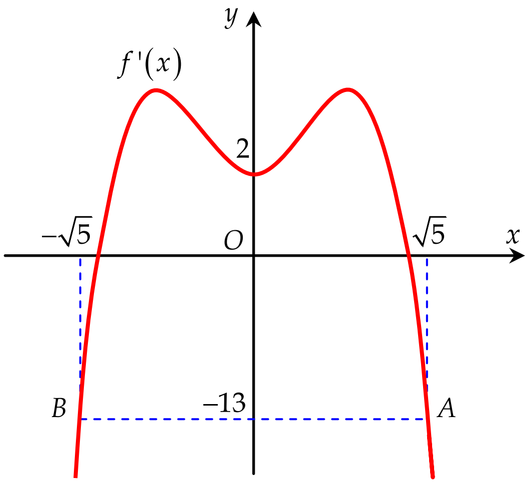
A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{4}$
C. -2 **D.** -4

Câu 3. Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox.



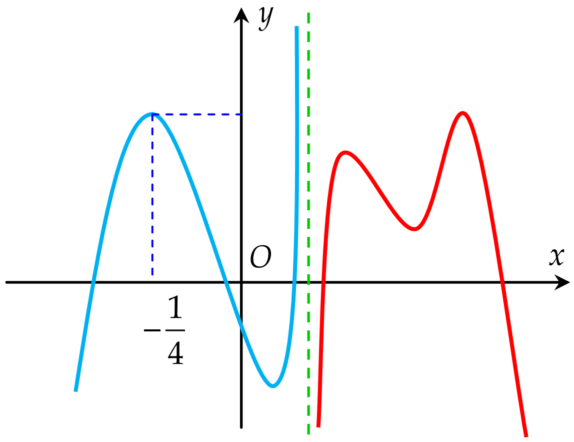
A. 4
C. 6
B. 2
D. −4

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x)\le 0\ \ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m\ge\dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$ **B.** $m\le\dfrac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$
C. $m\le\dfrac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$ **D.** $m\ge\dfrac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$

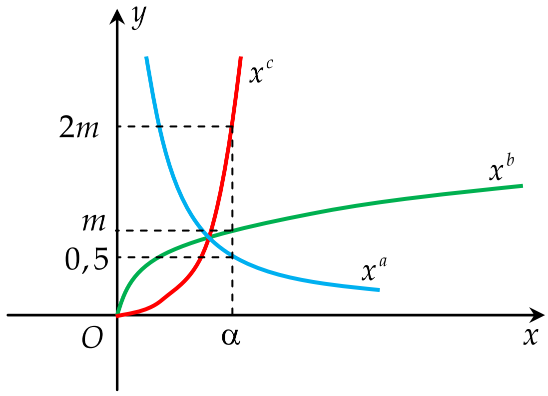
Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + x)$?



A. 10
B. 11
C. 12
D. 13

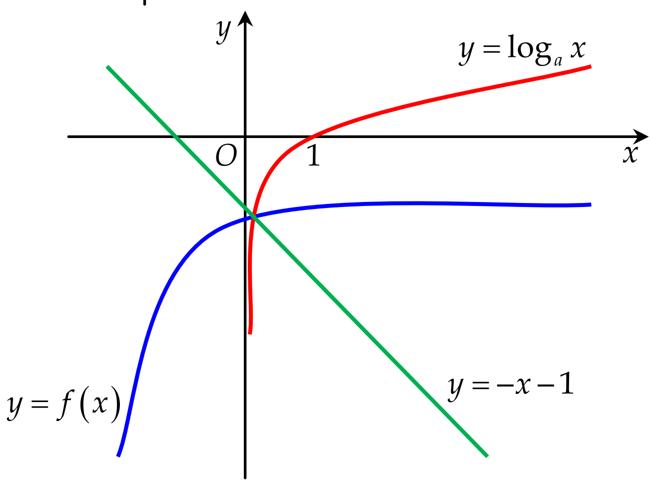
Câu 6. Cho hình vẽ của đồ thị các hàm số $y = x^a; y = x^b; y = x^c$ có đồ thị như hình bên. Khi đó hãy tìm tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{3a^2 + (2b + a + c)^2}{a^2 + 5c^2 + 4ac}$$



A. 31 **B.** 32
C. 33 **D.** 34

Câu 7. Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = f(x)$. Đồ thị của chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x - 1$. Tính $f(\log_a 2018)$



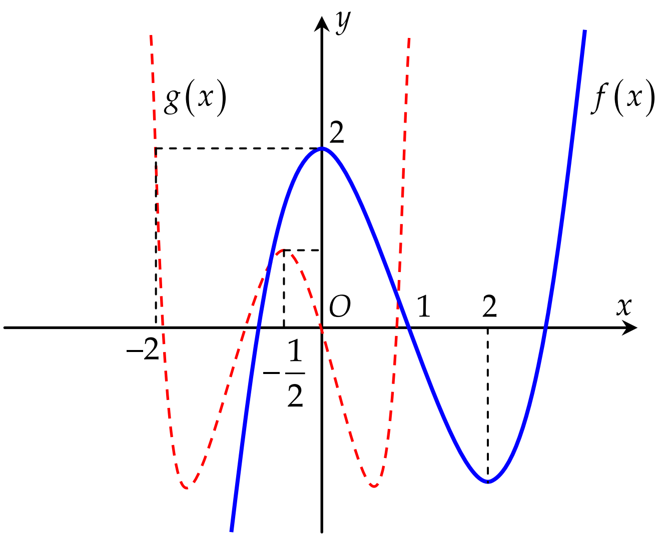
A. $f(\log_a 2018) = -1 - \frac{a}{2018}$

B. $f(\log_a 2018) = -1 - \frac{1}{2018a}$

C. $f(\log_a 2018) = -1 + \frac{a}{2018}$

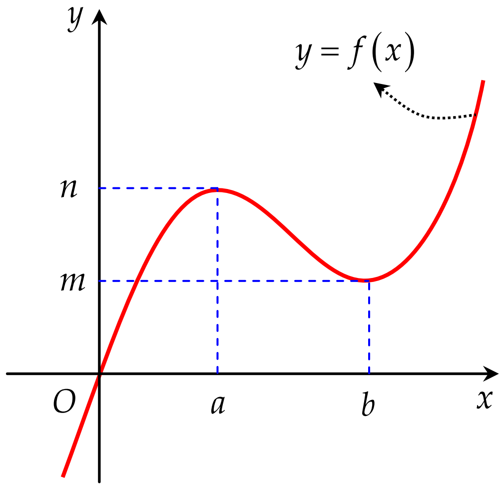
D. $f(\log_a 2018) = -1 + \frac{1}{2018a}$

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x) = f(mx^2 + nx + p)\,(m, n, p \in \mathbb{Q})$ có đồ thị như hình dưới, trong đó đường nét liền là đồ thị hàm $f(x)$, đồ thị hàm nét đứt là đồ thị hàm $g(x)$, đường $x = -\frac{1}{2}$ là trục đối xứng hàm $g(x)$. Giá trị của biểu thức $P = (n + m)(m + p)(p + 2n)$ bằng bao nhiêu?



A. 6 **B.** 24
C. 12 **D.** 16

Câu 9. Cho $0<\sqrt{a}-1<\sqrt{b}-1<a$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)}{f\left((x+1)^2\right)}$ có đạo hàm trên $[0;+\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi $x\in\left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right]$



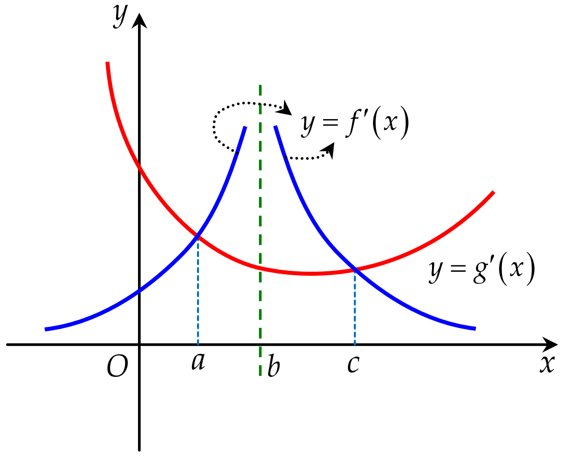
A. $g(x)\ge\dfrac{f\left(\sqrt{b}-1\right)}{m}$ **B.** $g(x)\le\dfrac{f\left(\sqrt{a}-1\right)}{n}$

C. $g(x)\le\dfrac{f\left(\sqrt{b}-1\right)}{m}$ **D.** $-10\le g(x)\le 0$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hai hàm số $y=f'(x), y=g'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$ và

$$S=-\left[h\left(x^2+b\right)\right]^2+h\left(b+x^2\right)\left(1+2h(c)\right)-\left[h(c)\right]^2$$

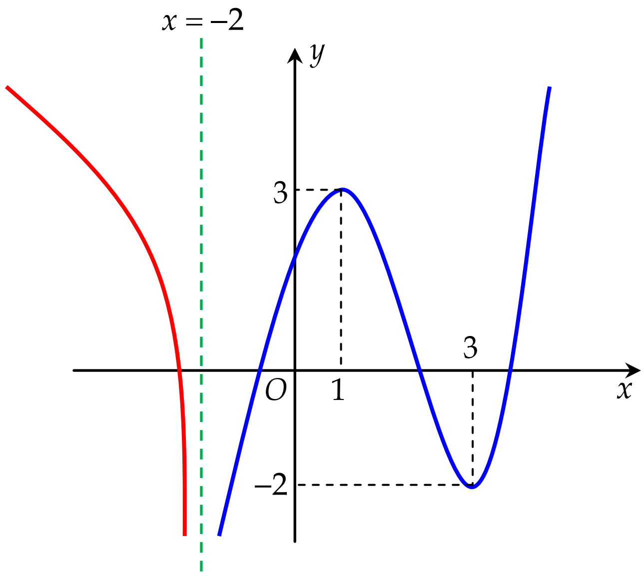
với a,b,c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x\neq 0$ là?



A. $S\in\left[h(c);h(a+c)\right]$ **B.** $S\le h(c)$

C. $S\le\left[h(c);h(a+b)\right]$ **D.** $S\in\left[h(a);h(c)\right]$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ dưới. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=f\left(|x|+m\right)$ có 5 điểm cực trị?



A. -210

B. -212

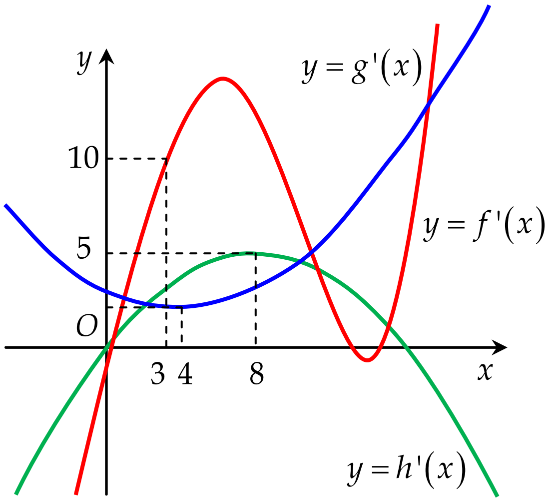
C. -211

D. -209

Câu 12. Cho 3 hàm số $y=f(x), y=g(x)$ $, y=h(x)$. Đồ thị của 3 hàm số $y=f'(x)$, $, y=g'(x)$ $, y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số

$$k(x)=f(x+7)+g(5x+1)-h\left(4x+\frac{3}{2}\right).$$

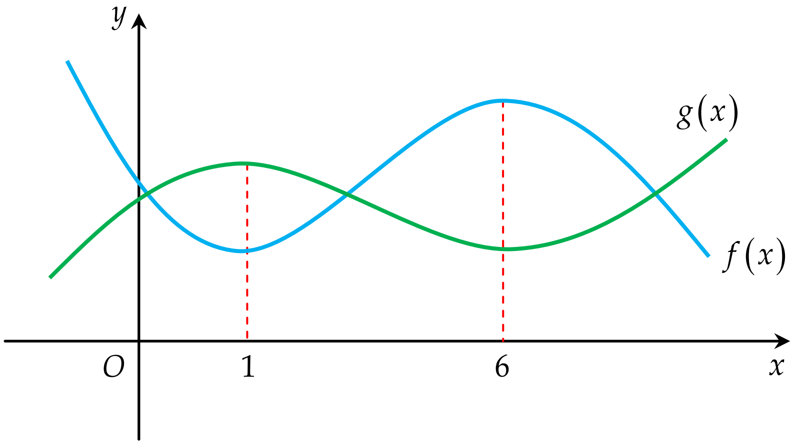
Đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\frac{15}{4};0\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$.

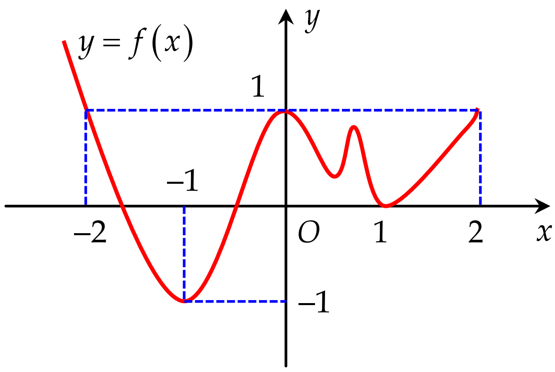
C. $\left(\frac{3}{8};1\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{8};+\infty\right)$.

Câu 13. Cho 2 hàm số $f(x), g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $x=1, x=6$ đều là các điểm cực trị của 2 hàm số $f(x), g(x)$ đồng thời $f(1)=g(6), 2f(6)=g(1)+3$ và $2f(-5x+16)=3g(5x-9)-1\,(*)$.Gọi M,m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(x)(f(x)-2g(x)+1)+g^2(x)+g(x)$. Tính tổng $P=M+m$?



A. $\frac{27}{4}$ **B.** $\frac{23}{4}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\sqrt[3]{f^2(x)-2f(x)+9}=\sqrt{|f(x-2)|+3}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên đoạn $[-2;3]$?

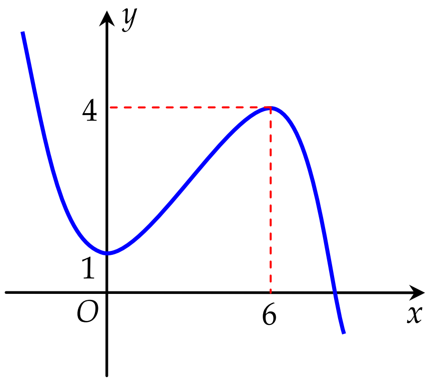


A. 1 **B.** 2

C. 3 **D.** 4

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số tiệm cận đứng ít nhất có thể của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{(x^2+1)(f(x)-1)}$ có thể bằng bao nhiêu?



A. 1 **B.** 2

C. 3 **D.** 4

Lời giải

Hàm số có dạng

$$f(x)-1=k.x^{2p}.(x-x_1)^{2q-1};x_1\ge 6;p\ge 1;q\ge 1$$

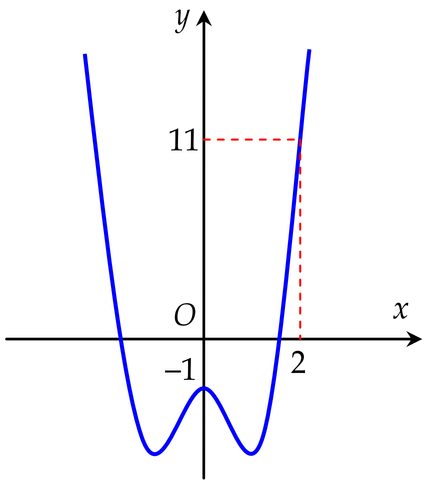
$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{f(x)-1}=\frac{x^2}{k.x^{2p}.(x-x_1)^{2q+1}.\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{k.x^{2p-2}.(x-x_1)^{2q+1}.\sqrt{x^2+1}+1}$$

Trường hợp ít TCĐ nhất là $2p-2=0\Leftrightarrow p=1$. khi đó:

$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{f(x)-1}=\frac{x^2}{k.x^{2p-2}.(x-x_1)^{2q+1}.\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{k(x-x_1)^{2q+1}.\sqrt{x^2+1}+1}$$

Suy ra có TCĐ duy nhất $x=x_1$

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$có đồ thị như hình vẽ đồng thời $f(x+1)-f(x)=2x(2x+1)(x+1)(*)$ Biết rằng hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c;g(x)=mx^2+nx+p$ và $f(x)=g(x^2-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$



A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{4}$

C. -2 **D.** -4

Lời giải

Từ $(*)$ ta thay $x=0\Rightarrow f(1)=f(0)$

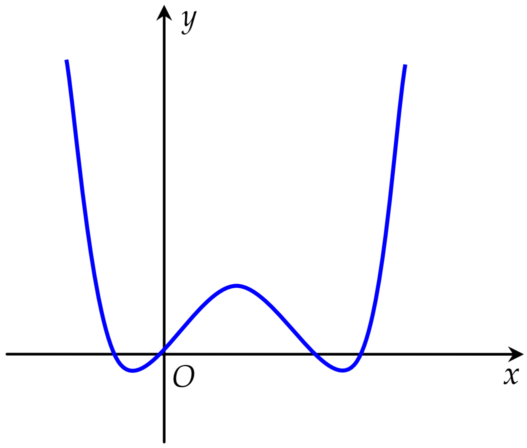
Ta có $x=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow c=-1\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\c=-1\end{cases}$ và $x=2,y=11\Rightarrow f(x)=x^4-x^2-1$

Mặt khác $x^4-x^2-1=g(x^2-1)=m(x^2-1)^2+n(x^2-1)+p=mx^4-2mx^2+m+nx^2-n+p$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=1\\-2+n=-1\\-1=-n+p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=1\\p=0\end{cases}\Rightarrow g(x)=x^2+x;g'(x)=2x+1;g'(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất $g(x)=-\dfrac{1}{4}$

Câu 3. Biết rằng đồ thị hàm số bậc 4: $y=f(x)$ được cho như hình vẽ bên. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox.



A. 4
C. 6
B. 2
D. –4

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)$ và trục Ox bằng số nghiệm của phương trình: $\left[f'(x)\right]^2-f(x).f''(x)=0 \Leftrightarrow \left[f'(x)\right]^2=f(x).f''(x)$.

Giả sử đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R};a\neq 0,b\neq 0)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4.

Đặt $A=x-x_1$, $B=x-x_2$, $C=x-x_3$, $D=x-x_4$ ta có:

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=a.ABCD$.

- TH1: Nếu $x=x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì $g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2>0$.

Do đó $x=x_i$, $i=1,2,3,4$ không phải nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

- TH2: Nếu $x\neq x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì ta viết lại

$$f'(x)=a(BCD+ACD+ABD+ABC)=f(x)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right).$$

$$f''(x)=f'(x)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)-f(x)\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$$

$$=f(x).\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)^2-f(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$$

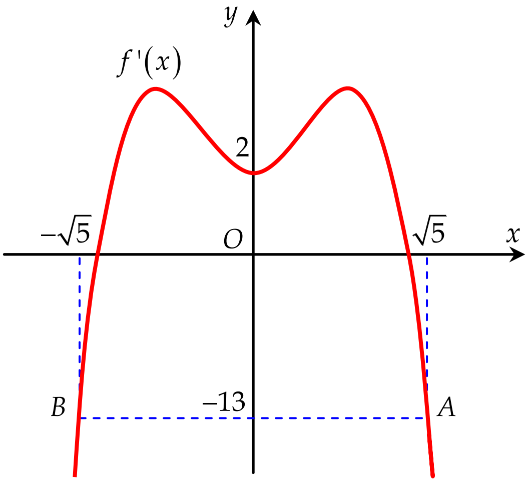
Suy ra, $f''(x).f(x)=f^2(x).\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)^2-f^2(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)$.

Khi đó $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)=f^2(x).\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right)>0\ \ \forall x\neq x_i\,(i=1,2,3,4)$.

Từ đó suy ra phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ không cắt trục hoành.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Để $g(x)\le 0\ \ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ thì điều kiện của m là



A. $m\ge \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$ **B.** $m\le \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$

C. $m\le \frac{2}{3}f(0)-2\sqrt{5}$ **D.** $m\ge \frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)-4\sqrt{5}$

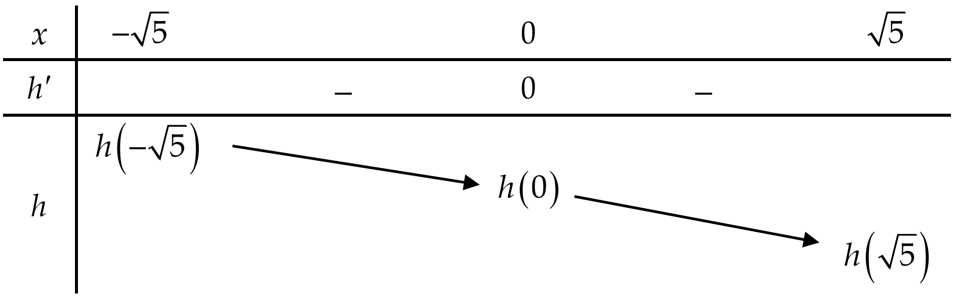
Lời giải

Ta có $g(x)\le 0 \Leftrightarrow g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}\le 0 \Leftrightarrow 3m\ge 2f(x)+2x^3-4x-6\sqrt{5}$.

Đặt $h(x)=2f(x)+2x^3-4x-6\sqrt{5}$. Ta có $h'(x)=2f'(x)+6x^2-4$.

Suy ra $\begin{cases} h'\left(-\sqrt{5}\right)=2f'\left(-\sqrt{5}\right)+6.5-4=0 \\ h'\left(\sqrt{5}\right)=2f'\left(\sqrt{5}\right)+6.5-4=0 \\ h'(0)=2f'(0)+0-4=0 \\ h'(1)=2f'(1)+6.1-4>0 \\ h'(-1)=2f'(-1)+6.1-4>0 \end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $3m\ge h\left(\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow m\ge \frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

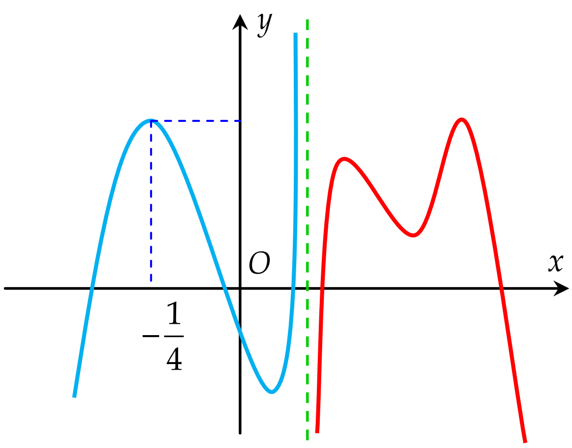
Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+x\right)$?

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

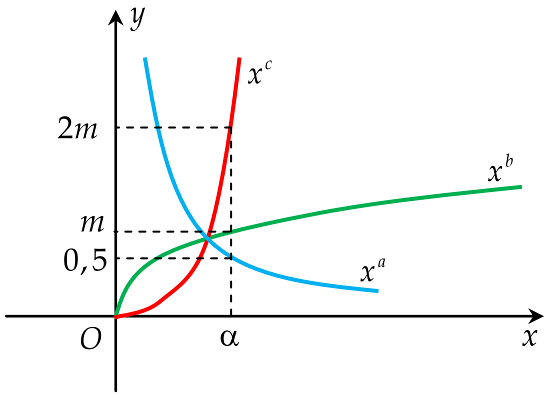


Lời giải

Ta có $y'=(2x+1)f'(x^2+x)$, $x^2+x=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge -\frac{1}{4}$. Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm trong đó 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$ và có một tiệm cận. Khi đó ứng với mỗi giao điểm có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và 1 điểm không xác định thì $y'=0$ có 2 nghiệm Từ đây dễ dàng suy ra hàm $y=f(x^2+x)$ có 11 cực trị!

Câu 6. Cho hình vẽ của đồ thị các hàm số $y=x^a;y=x^b;y=x^c$ có đồ thị như hình bên. Khi đó hãy tìm tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{3a^2+(2b+a+c)^2}{a^2+5c^2+4ac}$$



A. 31 **B.** 32

C. 33 **D.** 34

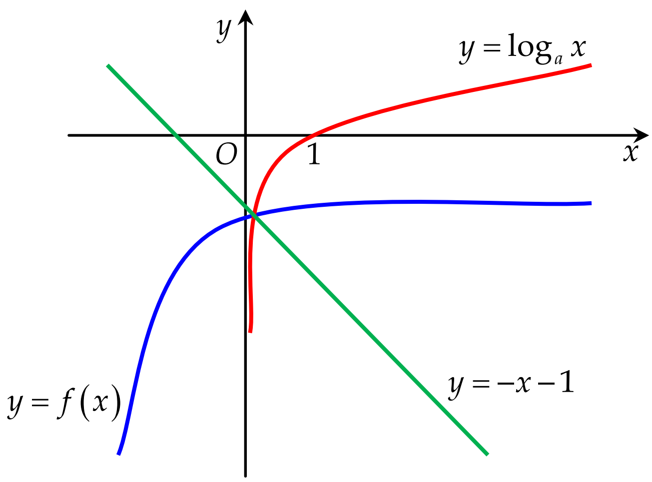
Hướng dẫn

Nhận thấy ngay khi $x=\alpha$, ta có

$$\alpha^c=2\alpha^b\Leftrightarrow c\log_2\alpha=1+b\log_2\alpha\Leftrightarrow (c-b)\log_2\alpha=1$$
$$\alpha^a=0.5\Leftrightarrow a\log_2\alpha=-1$$
$$\Leftrightarrow a+c=b$$

Đến đây thay vào biểu thức ta được một hàm thuần nhất 2 biến rồi đặt 1 ẩn đưa về khảo sát hàm 1 biến!

Câu 7. Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x$ và $y=f(x)$. Đồ thị của chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x-1$ .Tính $f(\log_a 2018)$



A. $f(\log_a 2018)=-1-\frac{a}{2018}$

B. $f(\log_a 2018)=-1-\frac{1}{2018a}$

C. $f(\log_a 2018)=-1+\frac{a}{2018}$

D. $f(\log_a 2018)=-1+\frac{1}{2018a}$

Lời giải

Gọi $(b;c)\in(C_1):y=\log_a x;(e;f)\in(C_2):y=f(x)$.

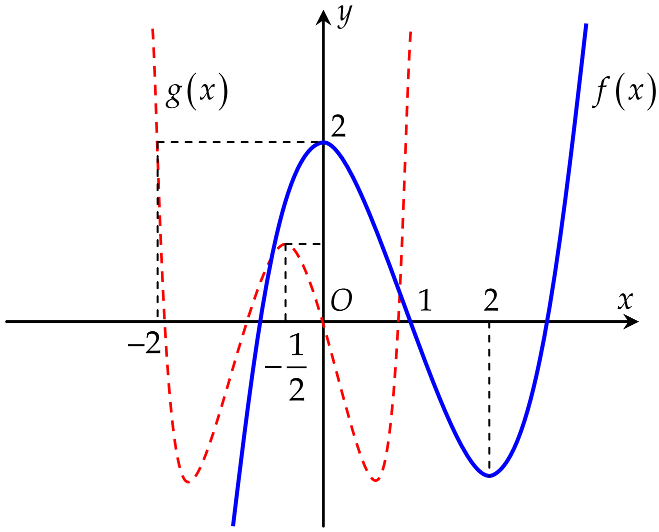
Ta có hệ điều kiện

$$\begin{cases}c+f=-(b+e)-2\\1(b-e)-1(c-f)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=-f-e-2\\b-c=e-f\end{cases}\begin{cases}b=-f-1\\c=-e-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow -e-1=\log_a(-f-1)\Leftrightarrow -f-1=a^{-e-1}\Leftrightarrow f=-1-a^{-e-1}\Leftrightarrow f(x)=-1-a^{-x-1}.$$

Vậy $f\left(\log_a 2018\right)=-1-a^{-\log_a 2018-1}=-1-\dfrac{1}{2018a}$

Câu 8. Cho hàm số bậc ba $f(x)$ và $g(x)=f\left(mx^2+nx+p\right)\left(m,n,p\in\mathbb{Q}\right)$ có đồ thị như hình dưới, trong đó đường nét liền là đồ thị hàm $f(x)$, đồ thị hàm nét đứt là đồ thị hàm $g(x)$, đường $x=-\dfrac{1}{2}$ là trục đối xứng hàm $g(x)$. Giá trị của biểu thức $P=(n+m)(m+p)(p+2n)$ bằng bao nhiêu?



A. 6 **B.** 24

C. 12 **D.** 16

Lời giải

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Hàm số đạt cực trị tại $x=0;x=2$ và đồ thị đi qua điểm $(1;0),(0;2)$ nên ta có

$$\begin{cases}f'(0)=0\\f'(2)=0\\f(1)=0\\f(0)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2$$

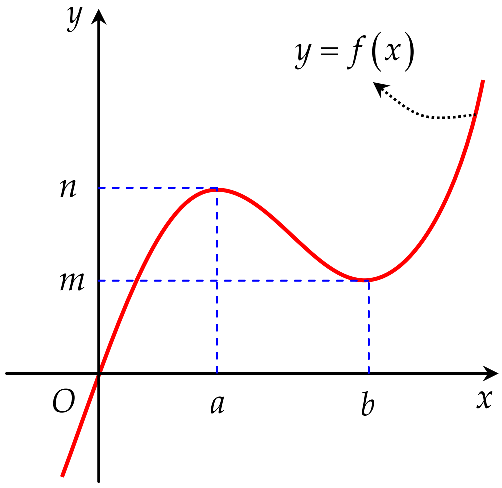
Ta có $g(x)=\left(mx^2+nx+p\right)^3-3\left(mx^2+nx+p\right)^2+2$. Hệ số tự do bằng p^3-3p^2+2. Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(0;0)$ nên $p^3-3p^2+2=0\Rightarrow p=1$. Đồ thị hàm số $g(x)=f\left(mx^2+nx+p\right)$ có trục đối xứng $x=-\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số $y=mx^2+nx+p$ cũng có trục đối xứng $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{n}{2m}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=n$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ đi qua điểm $(-2;2)$ nên

$$g(-2)=0\Rightarrow g(x)=(2m+1)^3-3(2m+1)^2+2=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=n=1\\m=n=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Do đồ thị có hướng quay lên trên nên ta suy ra $m>0\Rightarrow m=n=p=1$

Câu 9. Cho $0<\sqrt{a}-1<\sqrt{b}-1<a$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)}{f\left((x+1)^2\right)}$ có đạo hàm trên $[0;+\infty)$. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi $x\in\left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right]$



A. $g(x)\ge\frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$ **B.** $g(x)\le\frac{f(\sqrt{a}-1)}{n}$ **C.** $g(x)\le\frac{f(\sqrt{b}-1)}{m}$ **D.** $-10\le g(x)\le 0$

Lời giải

Ta có $x\in\left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right]\Rightarrow(x+1)^2\in[a;b]$, dựa vào đồ thị ta có

$$m\le f\left((x+1)^2\right)\le n\Rightarrow\frac{1}{n}\le\frac{1}{f\left((x+1)^2\right)}\le\frac{1}{m}$$

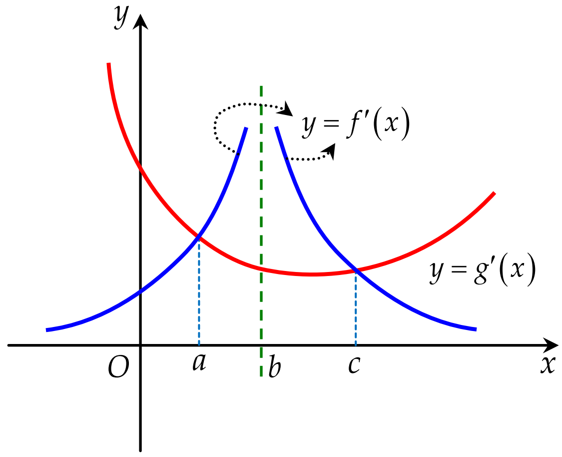
Mặt khác $0<\sqrt{a}-1<\sqrt{b}-1<a$ dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{a}-1;\sqrt{b}-1\right]$

nên ta có $f\left(\sqrt{a}-1\right)\le f(x)\le f\left(\sqrt{b}-1\right)\Rightarrow g(x)\le\frac{f\left(\sqrt{b}-1\right)}{m}$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{b\}$ và hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hai hàm số $y=f'(x),y=g'(x)$ như hình vẽ dưới. Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$ và

$$S=-\left[h\left(x^2+b\right)\right]^2+h\left(b+x^2\right)\left(1+2h(c)\right)-\left[h(c)\right]^2$$

với a,b,c là các số thực đã biết. Khẳng định đúng với mọi $x\ne 0$ là?



A. $S\in\left[h(c);h(a+c)\right]$ **B.** $S\le h(c)$

C. $S\le\left[h(c);h(a+b)\right]$ **D.** $S\in\left[h(a);h(c)\right]$

Lời giải

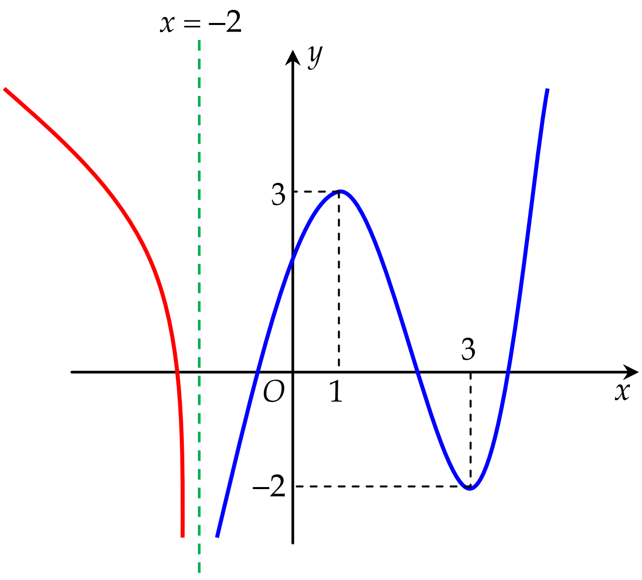
Từ đồ thị đã cho ta suy ra $h'(x)=f'(x)-g'(x);h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\\x=c\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên ta có

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↘	$h(a)$	↗	||	↗	$h(c)$	↘	

Lại có $S=-\left(h\left(b+x^2\right)-h(c)\right)^2+h\left(b+x^2\right)\le h\left(x^2+b\right)\le h(c)$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ dưới. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $y=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị?



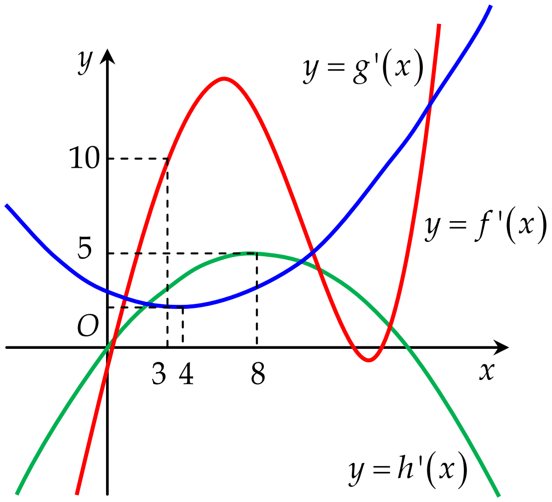
A. -210 **B.** -212 **C.** -211 **D.** -209

Lời giải

Chúng ta có thể tính nhanh theo công thức là hàm số $y=f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương và hàm số phải liên tục tại $x_0=0$. Dựa vào đồ thị của hàm số ta suy ra

$$\begin{cases}1-m>0\\-2-m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\m\ne -2\end{cases}\Rightarrow m\in\{-20,-19,-18,...,-3,-1,0\}$$

Câu 12. Cho 3 hàm số $y=f(x),y=g(x),y=h(x)$. Đồ thị của 3 hàm số $y=f'(x),y=g'(x),y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới, trong đó đường đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $k(x)=f(x+7)+g(5x+1)-h\left(4x+\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(-\frac{15}{4};0\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{8};1\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{8};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta cần giải bất phương trình $k'(x)=f'(x+7)+2g'\left(2x+\frac{15}{2}\right)-4h'\left(4x+\frac{3}{2}\right)>0$

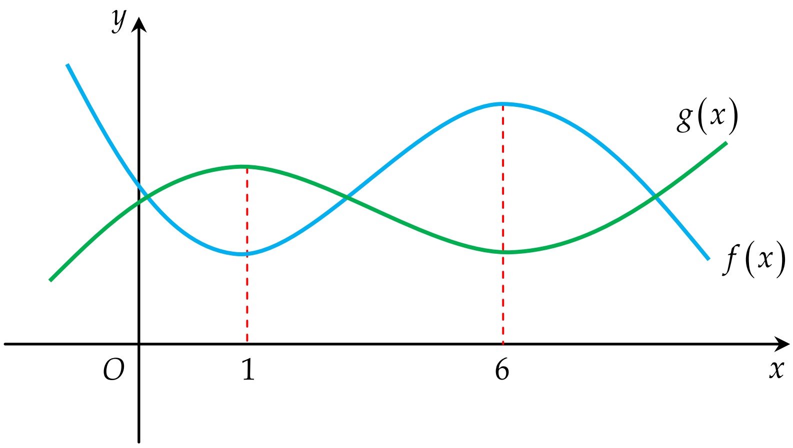
Không thể giải trực tiếp bất phương trình này. Quan sát các đồ thị của các hàm số $y=f'(x),y=g'(x),y=h'(x)$ ta nhận thấy

$f'(x)>10,\forall x\in(3;8);g'(x)\geq 5,\forall x,h'(x)<5,\forall x\in(3;8)$

Do đó $f'(a)+2g'(b)-4h'(c)>10+2.5-4.5=0,\forall a,c\in(3;8),b\in\mathbb{R}$

Vì vậy ta chỉ cần chọn $\begin{cases}3<x+7<8\\3<4x+\frac{3}{2}<8\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{8}<x<1$. Đối chiếu với đáp án ta chọn ý C.

Câu 13. Cho 2 hàm số $f(x),g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $x=1,x=6$ đều là các điểm cực trị của 2 hàm số $f(x),g(x)$ đồng thời $f(1)=g(6),2f(6)=g(1)+3$ và $2f(-5x+16)=3g(5x-9)-1(*)$.Gọi M,m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(x)(f(x)-2g(x)+1)+g^2(x)+g(x)$. Tính tổng $P=M+m$?



A. $\frac{27}{4}$ **B.** $\frac{23}{4}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Lần lượt thay $x=2, x=3$ vào $(*)$ đồng thời kết hợp điều kiện ban đầu ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2f(1)=3g(6)-1 \\ 2f(6)=3g(1)-1 \\ 2f(6)=4g(1)-4 \\ 2f(1)=4g(6)-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=g(6)=1 \\ f(6)=\dfrac{5}{2}, g(1)=2 \end{cases}$

Từ giả thiết kết hợp đồ thị ta nhận thấy rằng $g(x)$ nghịch biến trên $[1;6]$ và $f(x)$ đồng biến trên $[1;6] \Rightarrow g(x)\in[1;2], f(x)\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$. để đơn giản ta đặt $u=f(x), y=g(x)$

Ta có $S=u^2-2uy+y^2+u+y=f(u;y)$. Coi đây là 1 hàm số theo ẩn u ta có

$$f_u'(u;y)=2u-2y+1=0 \Leftrightarrow u=\frac{2y-1}{2}$$

Ta có $f(1;y)=1-2y+y^2+y+1=y^2-y+2; f\left(\dfrac{5}{2};y\right)=y^2-4y+\dfrac{35}{4}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{5}{2};y\right)-f(1;y)>0, \forall y\in[1;2]$$

Xét $y\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow u=\dfrac{2y-1}{2}\notin\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ và $y\in\left[\dfrac{3}{2};2\right] \Rightarrow u=\dfrac{2y-1}{2}\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

Với $y\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right)(1)$ khảo sát hàm số $f(u;y)$ theo biến $u\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

$$\Rightarrow f_u(u;y)\ge f(1;y)=y^2-y+2\ge 1 \text{ ,và } f_u(u;y)\le f\left(\frac{5}{2};y\right)=y^2-4y+\frac{35}{4}\le\frac{23}{4}$$

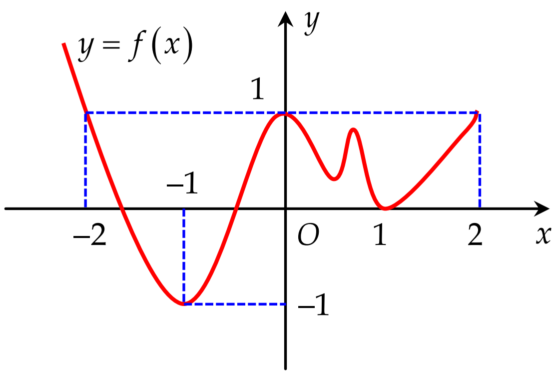
Với $y\in\left[\dfrac{3}{2};2\right](2)$. Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(u;y)$ theo biến $u\in\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ ta có

$$\Rightarrow f_u(u;y)\ge f\left(\frac{2y-1}{2};y\right)=\left(\frac{2y-1}{2}\right)^2-y(2y-1)+y^2+\frac{2y-1}{2}+y=\frac{8y-1}{2}\ge\frac{7}{4}$$

Và $f_u(u;y)\le f\left(\dfrac{5}{2};y\right)=y^2-4y+\dfrac{35}{4}\le\dfrac{23}{4}$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \max S=M=\dfrac{23}{4}, \min S=m=1 \Rightarrow P=M+m=\dfrac{23}{4}+1=\dfrac{27}{4}$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ dưới. Hỏi phương trình $\sqrt[3]{f^2(x)-2f(x)+9}=\sqrt{|f(x-2)|+3}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên đoạn $[-2;3]$?

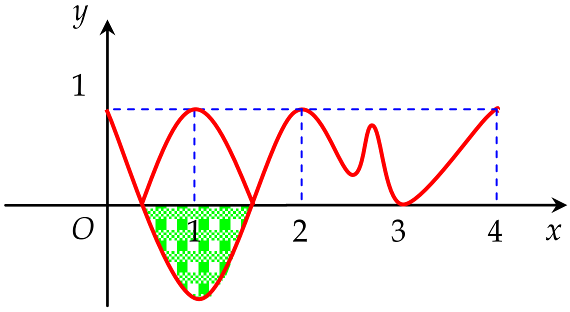


A. 1 **B.** 2

C. 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có đồ thị hàm $y=\left|f\left(x-2\right)\right|$ như hình vẽ dưới (phần trên trục Ox)



Xét hàm số $y=\sqrt{\left|f\left(x-2\right)\right|+3}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$ ta có $y=\sqrt{\left|f\left(x-2\right)\right|+3}\le 2$,

Xét hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;2\right]$ ta có $\sqrt[3]{f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+9}=\sqrt[3]{\left(f\left(x\right)-1\right)^2+8}\ge 2$

Suy ra $VT\ge VP$ dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\left|f\left(x-2\right)\right|=1\\ f\left(x\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$