

LUYỆN TẬP HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

Câu 1: Tính:

a, $(x + 2y)^2$

b, $(x - 3y)(x + 3y)$

c, $(5 - x)^2$

Lời giải:

a, $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

b, $(x - 3y)(x + 3y) = x^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$

c, $(5 - x)^2 = 5^2 - 10x + x^2 = 25 - 10x + x^2$

Câu 2: Tính:

a, $(x - 1)^2$

b, $(3 - y)^2$

c, $(x - 1/2)^2$

Lời giải:

a, $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

b, $(3 - y)^2 = 9 - 6y + y^2$

c, $(x - 1/2)^2 = x^2 - x + 1/4$

Câu 3: Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương một tổng:

a, $x^2 + 6x + 9$

b, $x^2 + x + 1/4$

c, $2xy^2 + x^2y^4 + 1$

Lời giải:

$$a, x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2.x.3 + 3^2 = (x + 3)^2$$

$$b, x^2 + x + 1/4 = x^2 + 2.x.1/2 + (1/2)^2 = (x + 1/2)^2$$

$$c, 2xy^2 + x^2y^4 + 1 = (xy^2)^2 + 2.xy^2.1 + 1^2 = (xy^2 + 1)^2$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức:

$$a, (x + y)^2 + (x - y)^2$$

$$b, 2(x - y)(x + y) + (x + y)^2 + (x - y)^2$$

$$c, (x - y + z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - y + z)(y - z)$$

Lời giải:

$$a, (x + y)^2 + (x - y)^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2$$

$$= 2x^2 + 2y^2$$

$$b, 2(x - y)(x + y) + (x + y)^2 + (x - y)^2$$

$$= [(x + y) + (x - y)]^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

$$c, (x - y + z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - y + z)(y - z)$$

$$= (x - y + z)^2 + 2(x - y + z)(y - z) + (y - z)^2$$

$$= [(x - y + z) + (y - z)]^2 = x^2$$

Câu 5: Biết số tự nhiên a chia cho 5 dư 4. Chứng minh rằng a^2 chia cho 5 dư 1.

Lời giải:

Số tự nhiên a chia cho 5 dư 4, ta có: $a = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\text{Ta có: } a^2 = (5k + 4)^2$$

$$= 25k^2 + 40k + 16$$

$$= 25k^2 + 40k + 15 + 1$$

$$= 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$$

Ta có: $5(5k^2 + 8k + 3) : 5$

Vậy $a^2 = (5k + 4)^2$ chia cho 5 dư 1.

Câu 6: Tính giá trị của biểu thức sau:

a, $x^2 - y^2$ tại $x = 87$ và $y = 13$

b, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tại $x = 101$

c, $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ tại $x = 97$

Lời giải:

a, Ta có: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

b, Thay $x = 87, y = 13$, ta được:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$= (87 + 13)(87 - 13)$$

$$= 100.74 = 7400$$

c, Ta có: $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$$= x^3 + 3.x^2.3 + 3.x.3^2 + 3^3$$

$$= (x + 3)^3$$

Thay $x = 97$, ta được: $(x + 3)^3 = (97 + 3)^3 = 100^3 = 1000000$

Câu 7: Chứng minh rằng:

a, $(a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 2a^3$

b, $(a + b)[(a - b)^2 + ab] = (a + b)[a^2 - 2ab + b^2 + ab] = a^3 + b^3$

c, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

Lời giải:

$$a, \text{ Ta có: } (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + b^3 + a^3 - b^3 = 2a^3$$

Vế trái bằng vế phải nên đẳng thức được chứng minh.

$$b, \text{ Ta có: } (a + b)[(a - b)^2 + ab] = (a + b)[a^2 - 2ab + b^2 + ab]$$

$$= (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Vế phải bằng vế trái nên đẳng thức được chứng minh.

$$c, \text{ Ta có: } (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$

$$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = c^2(a^2 + b^2) + d^2(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Vế phải bằng vế trái nên đẳng thức được chứng minh.

Câu 8: Chứng tỏ rằng:

$$a, x^2 - 6x + 10 > 0 \text{ với mọi } x$$

$$b, 4x - x^2 - 5 < 0 \text{ với mọi } x$$

Lời giải:

$$a, \text{ Ta có: } x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 + 1 = (x - 3)^2 + 1$$

Vì $(x - 3)^2 \geq 0$ với mọi x nên $(x - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x

Vậy $x^2 - 6x + 10 > 0$ với mọi x .

$$b, \text{ Ta có: } 4x - x^2 - 5 = -(x^2 - 4x + 4) - 1 = -(x - 2)^2 - 1$$

Vì $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x nên $-(x - 2)^2 \leq 0$ với mọi x .

Suy ra: $-(x - 2)^2 - 1 \leq 0$ với mọi x

Vậy $4x - x^2 - 5 < 0$ với mọi x .

Câu 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của các đa thức:

a, $P = x^2 - 2x + 5$

b, $Q = 2x^2 - 6x$

c, $M = x^2 + y^2 - x + 6y + 10$

Lời giải:

a, Ta có: $P = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x - 1)^2 + 4$

Vì $(x - 1)^2 \geq 0$ nên $(x - 1)^2 + 4 \geq 4$

Suy ra: $P = 4$ là giá trị bé nhất $\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Vậy $P = 4$ là giá trị bé nhất của đa thức khi $x = 1$.

b, Ta có: $Q = 2x^2 - 6x = 2(x^2 - 3x) = 2(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4})$

$= 2[(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{9}{4}] = 2(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{9}{2}$

Vì $(x - \frac{2}{3})^2 \geq 0$ nên $2(x - \frac{2}{3})^2 \geq 0 \Rightarrow 2(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}$

Suy ra: $Q = -\frac{9}{2}$ là giá trị nhỏ nhất $\Rightarrow (x - \frac{2}{3})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy $Q = -\frac{9}{2}$ là giá trị nhỏ nhất của đa thức khi $x = \frac{2}{3}$.

c, Ta có: $M = x^2 + y^2 - x + 6y + 10 = (y^2 + 6y + 9) + (x^2 - x + 1)$

$= (y + 3)^2 + (x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = (y + 3)^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

Vì $(y + 3)^2 \geq 0$ và $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ nên $(y + 3)^2 + (x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$

$\Rightarrow (y + 3)^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow M = \frac{3}{4}$ là giá trị nhỏ nhất khi $(y + 3)^2 = 0$

$\Rightarrow y = -3$ và $(x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy $M = \frac{3}{4}$ là giá trị nhỏ nhất tại $y = -3$ và $x = \frac{1}{2}$

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất của đa thức:

$$\text{a, } A = 4x - x^2 + 3$$

$$\text{b, } B = x - x^2$$

$$\text{c, } N = 2x - 2x^2 - 5$$

Lời giải:

$$\text{a, Ta có: } A = 4x - x^2 + 3$$

$$= 7 - x^2 + 4x - 4$$

$$= 7 - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= 7 - (x - 2)^2$$

$$\text{Vì } (x - 2)^2 \geq 0 \text{ nên } A = 7 - (x - 2)^2 \leq 7$$

Vậy giá trị của A lớn nhất là 7 tại $x = 2$

$$\text{b, Ta có: } B = x - x^2$$

$$= 1/4 - x^2 + x - 1/4$$

$$= 1/4 - (x^2 - 2 \cdot x \cdot 1/2 + 1/4)$$

$$= 1/4 - (x - 1/2)^2$$

$$\text{Vì } (x - 1/2)^2 \geq 0 \text{ nên } B = 1/4 - (x - 1/2)^2 \leq 1/4$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 1/4 tại $x = 1/2$.

$$\text{c, Ta có: } N = 2x - 2x^2 - 5$$

$$= -2(x^2 - x + 5/2)$$

$$= -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1/2 + 1/4 + 9/4)$$

$$= -2[(x - 1/2)^2 + 9/4]$$

$$= -2(x - 1/2)^2 - 9/2$$

$$\text{Vì } (x - 1/2)^2 \geq 0 \text{ nên } -2(x - 1/2)^2 \leq 0$$

$$\text{Suy ra: } N = -2(x - 1/2)^2 - 9/2 \leq -9/2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức N là $-9/2$ tại $x = 1/2$.

Câu 11:

Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } (a - b)^3 = -(b - a)^3; \quad \text{b) } (-a - b)^2 = (a + b)^2$$

Đáp án và hướng dẫn giải

$$\text{a) } (a - b)^3 = -(b - a)^3$$

Biến đổi vế phải thành vế trái:

$$\begin{aligned} -(b - a)^3 &= -(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) = -b^3 + 3b^2a - 3ba^2 + a^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất hai số đối nhau:

$$(a - b)^3 = [(-1)(b - a)]^3 = (-1)^3(b - a)^3 = -1^3 \cdot (b - a)^3 = -(b - a)^3$$

$$\text{b) } (-a - b)^2 = (a + b)^2$$

Biến đổi vế trái thành vế phải:

$$\begin{aligned} (-a - b)^2 &= [(-a) + (-b)]^2 \\ &= (-a)^2 + 2 \cdot (-a) \cdot (-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất hai số đối nhau:

$$(-a - b)^2 = [(-1) \cdot (a + b)]^2 = (-1)^2 \cdot (a + b)^2 = 1 \cdot (a + b)^2 = (a + b)^2$$