Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số :

1) Hàm bậc 3 : $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

* TXĐ : D=R

* Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^3=\left[\begin{array}{l}+\infty(a>0)\\-\infty(a<0)\end{array}\right.$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^3=\left[\begin{array}{l}-\infty(a>0)\\+\infty(a<0)\end{array}\right.$;

* Đạo hàm : $y'=3ax^2+2bx+c$

* Cực trị :

- y' vô nghiệm hoặc nghiệm kép-> không có cực trị, nếu a>0 =>f(x) luôn đồng biến, a<0 -> f(x) luôn nghịch biến
- y' có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 , hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2

* Điểm uốn U(**-b/3a**, **f(-b/3a)**)

* Nhận xét : H/số đồng(nghịch) biến / các khoảng; H/số lồi(lõm) / các khoảng; Hàm số có cực đại (tiểu).

* Đồ thị : Các điểm CĐ,CT, uốn; Giao với Ox; Giao với Oy tại (0;d); Các điểm phụ.

2) Hàm trùng phương $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$

*TXĐ : D=R, * Đạo hàm y'

* Cực trị :Xét pt $y'=4ax(x^2+b/2a)=0$

+ Nếu ab<0 thì $y'=0 \Leftrightarrow x\in\{-\sqrt{-b/2a};\sqrt{-b/2a}\}$ =>h/số đạt cực trị tại 2 điểm này.

+ Nếu ab≥0 y' đổi dấu tại x=0 nên đạt cực trị tại x=0

* Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}ax^4=\left[\begin{array}{l}+\infty(a>0)\\-\infty(a<0)\end{array}\right.$

* Điểm uốn $y''=12ax^2+2b=12a[x^2+b/6a]$

+ Nếu ab<0 thì $y''=0 \Leftrightarrow x\in\{-\sqrt{-b/6a};\sqrt{-b/6a}\}$ =>h/số có 2 điểm uốn có hoành độ là 2 điểm này.

+ Nếu ab≥0 y'' không đổi dấu nên h/số không có điểm uốn.

* Nhận xét : H/số đồng(nghịch) biến / các khoảng; H/số lồi(lõm) / các khoảng; Hàm số có cực đại (tiểu). H/số có điểm uốn ?

* Đồ thị : Các điểm CĐ,CT, uốn (nếu có); Giao với Ox (nếu có); Giao với Oy tại (0;c); Các điểm phụ.

* Chú ý : do $f(x)=ax^4+bx^2+c$ là hàm số chẵn nên đồ thị (C):y=f(x) nhận Oy làm trục đối xứng.

3)Hàm phân thức bậc 1 / bậc 1

$y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $\begin{cases}c\neq 0\\ ad-bc\neq 0\end{cases}$

*TXĐ : D=R\{-d/c}

* Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$: nếu ad-bc>0 thì f(x) luôn đồng biến trên D_f và ngược lại.

* Tiệm cận :

$\lim\limits_{x\to d/c}f(x)=\lim\limits_{x\to d/c}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\infty$ =>TCĐ $x=\dfrac{-d}{c}$ ‖ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}$ => TCN $x=\dfrac{a}{c}$

* Không có điểm uốn, nhận **I(-d/c;a/c)** là giao 2 tiệm cận làm tâm đối xứng

D=ad-bc>0			D=ad-bc<0		
x	$-\infty$ -d/c	$+\infty$	x	$-\infty$ -d/c	$+\infty$
f’	+	+	f’	-	-
f	$\frac{a}{c} \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \frac{a}{c}$	f	$\frac{a}{c} \searrow -\infty$	$+\infty \searrow \frac{a}{c}$

4)Hàm phân thức bậc 2/ bậc 1 y=f(x)= $\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

* TXĐ : D=R\{-e/d}
* Sự biến thiên

- Đạo hàm y'=f'(x)= $\frac{adx^2+2aex+(be-cd)}{(dx+e)^2}=\frac{g(x)}{(dx+e)^2}$

+ Xét g(x)=0 $\Rightarrow \Delta'_g=(ae)^2-ad(be-cd)$

Nếu $\Delta'_g \le 0$ thì g(x) cùng dấu với ad $\forall$ x $\in$ D

Xét $\begin{cases}\Delta'_g \le 0\\ am>0\end{cases}$: g(x)≥0 hay f'(x)≥0 $\forall$ x $\in$ D , hàm đồng biến

Xét $\begin{cases}\Delta'_g \le 0\\ am<0\end{cases}$: g(x)≤0 hay f'(x)≤0 $\forall$ x $\in$ D, hàm nghịch biến

Nếu $\Delta'_g>0$ thì g(x)=0 có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 , hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

- Tiệm cận :

$\lim_{x\to\frac{-e}{d}} f(x)=\lim_{x\to\frac{-e}{d}}\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\infty \Rightarrow$ TCĐ $x=\frac{-e}{d}$

$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(\frac{a}{d}x+\frac{bd-ae}{d^2})]=0 \Rightarrow$ TCX $y=\frac{a}{d}x+\frac{bd-ae}{d^2}$

- Lập bảng biến thiên

* Nhận xét : Đồ thị luôn nhận giao 2 tiệm cận làm tâm đối xứng.