Trung tâm Bồi dưỡng Văn hóa
Hà Nội- Amsterdam
Thi thử vào lớp10 - đợt1 ngày5/4/2015

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 CHUYÊN

Môn : TOÁN

(Dành cho học sinh thi vào Chuyên Toán-Tin)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (*1,5 điểm*)

Đơn giản biểu thức: $A = \dfrac{1}{3+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}} + \dfrac{1}{5\sqrt{7}+7\sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{101\sqrt{103}+103\sqrt{101}}$.

Câu II (2,5 điểm).

1) Cho x, y, z là các số dương thay đổi và thỏa mãn: xyz = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P = \frac{\sqrt{x}}{1+x+xy} + \frac{\sqrt{y}}{1+y+yz} + \frac{\sqrt{z}}{1+z+zx}$$

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^3 + x = y^3 + 2y \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases}$

Câu III (2,5 điểm).

1) Cho a và b là các số nguyên dương khác nhau thỏa mãn: ab(a + b) chia hết cho (a^2 + ab + b^2). Chứng minh rằng: $|a-b| > \sqrt[3]{3ab}$.

2) **Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn** phương trình:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 3x + xy} .$$

Câu IV (2,5 điểm).

Cho tam giác nhọn **ABC** và **AB = AC = a**. Dựng đường tròn (O, r) tiếp xúc với đường thẳng AB tại điểm B và tiếp xúc với đường thẳng AC tại điểm C. Gọi M là điểm tùy ý trên cung nhỏ BC của (O) và M khác B, M khác C. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng AB, AC và BC.

1) Chứng minh tam giác MDF đồng dạng với tam giác MFE.

2) Xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC để biểu thức $\dfrac{1}{MD^2} + \dfrac{1}{ME^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a và r.

CâuV (1 điểm).

Cho đa thức P(x) = x^2 + ax + b, trong đó a và b là hai số nguyên dương cho trước và thỏa mãn $a^2 < 4b$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên m, n sao cho:

m > 2015, n > 2017 và $\dfrac{P(m)}{P(n)} = \dfrac{P(2015)}{P(2017)}$.

Hướng dẫn chấm

CâuI(1,5đ)	• c/m $\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n+3}+(2n+3)\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n+3}})$ • Cho n = 0, 1, 2, ...50. Cộng vế với vế có A = $\frac{103-\sqrt{103}}{206}$	0,75 đ 0,75đ
CâuII ý1=1,5đ	• c/m : M = $\sum\frac{1}{1+x+xy}=1$ và N = $\sum\frac{x}{1+x+xy}=1$ • Sử dụng $AB\le\frac{1}{2}(A^2+B^2)$ ta có $P=\sum(\frac{1}{\sqrt{1+x+xy}}.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x+xy}})\le\frac{1}{2}(M+N)=\frac{1+1}{2}=1$ • MaxP = 1 khi và chỉ khi x = y = z = 1. (Học sinh có thể dùng BĐT Bu nhi cốp xiki để đánh giá $P\le\sqrt{M.N}=1$)	1,0 đ 0,5đ

CauII y2=1đ	Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x^3+x=y^3+2y,(1)\\x^2-2y^2=-1(2)\end{cases}$ • Thay $1=-x^2+2y^2$ vào PT(1) có : $(x-y)((x+\frac{3y}{2})^2+\frac{11}{4}y^2)=0$. Suy ra x = y hoặc x = y =0 • Thay y = x vào PT(2) có x = 1, x = -1. • Nghiệm của hệ $x=y=\pm1$	0,5đ 0,5đ
Cau III:2,5đ	1) Gọi USCLN (a, b) = d. Suy ra a = dx, b = dy . Trong đó d, x, y là các số nguyên dương, x khac y và (x, y) =1. • Từ gt có $dxy(x+y)\vdots(x^2+xy+y^2)$. **Đặt** $x^2+xy+y^2=m\in N^*$ Gọi USCLN(x, m) = t vói t là số nguyên dương. Nếu t khác 1, gọi p là ước nguyên tố của t. Suy ra $y^2\vdots p, y\vdots p$. Vậy p là ƯC của x và y, mâu thuẫn với (x,y) =1. Do đó (x , m) =1. Chứng minh tương tự (y,m) = 1. • Mặt khác $m=x^2+xy+y^2=x(x+y)+y^2$ mà (x, y) =1. Suy ra (x+y, m) = 1. Vậy từ: dxy(x + y) chia hết cho m ta có $d\vdots m$, suy ra $d\ge m$	**0,5đ** **0,5đ**

	• Theo BĐT Cau chy ta có $d \ge m > 3\sqrt[3]{(xy)^3} = 3xy$ (do x khác y). Suy ra $d^3 > 3ab$ (1). Lại có: $\lvert a-b \rvert = d\lvert x-y \rvert > d$, Suy ra $\lvert a-b \rvert > \sqrt[3]{3ab}$. 2) **Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn** phương trình: $\mathbf{x^2 + y^2 = 3x + xy}$ **.** • Nhân 2 vế với 4 có $(2x-y-3)^2 + 3(y-1)^2 = 12$ Ta có (2x –y -3)^2 là số chính phương không vượt quá 12 và chia hết cho 3, do đó 2x – y – 3 = - 3, 0, 3. • Giải từng trường hợp có: $(x,y) \in \{(3;3),(1;-1),(0;0),(3;0),(4;2),(1;2)\}$	**0,5đ** **0,5đ** **0,5đ**
CauIV:2,5đ ***Câu V (1đ):***	1) * Học sinh tự vẽ hình • C/m các tứ giác nội tiếp MDBF, MECF (Có tổng 2 góc đối bằng 180^0). • $\widehat{MDF} = \widehat{MBF} = \widehat{MCE} = \widehat{MFE}, \widehat{MFD} = \widehat{MBD} = \widehat{MCF} = \widehat{MEF}$. Tam giác MDF đồng dạng với tam giác MFE (g – g) 2) Từ kết quả trên suy ra MD.ME = MF^2. • AO cắt cung nhỏ BC và đoạn BC tại K, H là hai điểm cố định. Khi đó $MF \le KH$ • $\frac{1}{MD^2} + \frac{1}{ME^2} \ge \frac{2}{MD.ME} = \frac{2}{MF^2} \ge \frac{2}{KH^2} = \frac{2(a^2+r^2)}{r^2(a^2+2r^2-2r\sqrt{a^2+r^2})}$ Dấu bằng xảy ra khi M trùng với K (Điểm chính giữa cung nhỏ BC). • $P(x) = x^2 + ax + b = (x+\frac{a}{2})^2 + \frac{4b-a^2}{4} > 0, \forall x$ • C/m : P(x).P(x + 1) = P(P(x)+x) với mọi x • Chọn x = 2015, x= 2016 có: $\frac{P(2015).P(2016)}{P(2017).P(2016)} = \frac{P(P(2015)+2015)}{P(P(2016)+2016)} = \frac{P(2015)}{P(2017)}$ • Vậy m = 2015 + P(2015) và n = 2016 + P(2016) thỏa mãn bài toán**.**	 1,0đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ