

**Bài 1. (1,5 điểm)**

Cho hai biểu thức  $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$  và  $B = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$  ( $x \geq 0, x \neq 1$ )

a) Rút gọn các biểu thức A và B;

b) Tìm giá trị của x để  $2A + B = 0$ .

**Bài 2. (1,5 điểm)**

a) Viết phương trình đường thẳng (d) biết rằng đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d'):  $y = 2x + 1$  và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-2} = -1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{5}{y-2} = 8 \end{cases}$$
.

**Bài 3. (2,5 điểm)**

1. Cho phương trình:  $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$  (với m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm m để biểu thức  $P = (x_1 - x_2)^2 + x_1x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**2. Bài toán thực tế**

Máy thở là một thiết bị công nghệ hữu ích, có tác dụng hỗ trợ hô hấp cho những người rất kém hoặc không còn khả năng tự hô hấp. Đây là thiết bị sống còn giúp chống chọi với bệnh Covid-19 của các bệnh nhân đã mắc ở thể nặng. Theo ước tính có khoảng 10% bệnh nhân mắc bệnh Covid-19 phải dùng đến máy thở, do đó khi dịch bệnh bùng phát thì trên thế giới sẽ thiếu hụt nghiêm trọng các thiết bị này.

Để chủ động ứng phó dịch bệnh, một nhà máy được giao sản xuất 360 chiếc máy thở trong một thời gian hạn định. Trước tình hình dịch bệnh Covid 19 diễn

biến hết sức phức tạp, xác định trách nhiệm tham gia bảo vệ sức khỏe cộng đồng nên nhà máy đã nâng cao năng lực sản xuất bằng cách tiến hành cải tiến kỹ thuật đồng thời kết hợp tăng ca để quyết tâm rút ngắn thời gian hoàn thành kế hoạch. Chính vì vậy, trên thực tế mỗi ngày nhà máy đã sản xuất tăng thêm 3 máy nên hoàn thành sớm trước 6 ngày so với kế hoạch được giao. Hỏi theo kế hoạch thì mỗi ngày nhà máy phải sản xuất bao nhiêu chiếc máy thở.

**Bài 4. (3,5 điểm)**

1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C nằm trên đường kính AB và điểm D trên đường tròn (O) (Các điểm C, D không trùng với A và B). Gọi E là điểm chính giữa cung nhỏ BD. Đường thẳng EC cắt đường tròn tại điểm thứ hai F. Gọi G là giao điểm của DF và AE.

a) Chứng minh  $\widehat{BAE} = \widehat{DFE}$  và AGCF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh CG vuông góc với AD.

c) Kẻ đường thẳng đi qua C song song với AD cắt DF tại H. Chứng minh  $CH = CB$ .

2. Quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính thể tích của hình trụ đó biết rằng  $AB = 2.AD = 4\text{cm}$ .

**Bài 5. (1,0 điểm)**

a) Cho ba số x, y, z thỏa mãn  $yz > 0$ . Chứng minh rằng:  $x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ .

b) Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng:

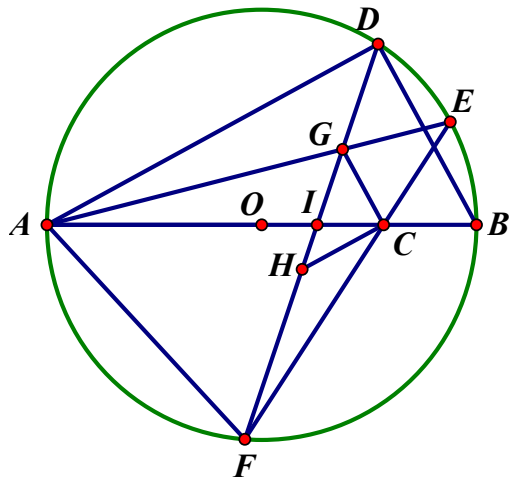
$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Hết đề

(Lưu ý: Đáp án có 04 trang)

Bài	Lời giải đề xuất	Điểm
<b>Bài 1</b> (1,5 điểm)	<b>a) - - 1,0 điểm</b>	
	- Ta có: $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{5}$	0,25
	$=  \sqrt{5} - 2  - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$	0,25
	- Với $0 \leq x \neq 1$ , ta có:	
	$B = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1}$	0,25
	$= \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x}$	0,25
	<b>b) - - 0,5 điểm</b>	
Ta có: $2A + B = 0 \Rightarrow -4 + 2\sqrt{x} = 0$	0,25	
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn ĐK)	0,25	
Vậy với $x = 4$ thì $2A + B = 0$		
<b>Bài 2</b> (1,5 điểm)	<b>a) - - 0,75 điểm</b>	
	Gọi phương trình đường thẳng (d) là $y = ax + b$	
	(d)//(d'): $y = 2x + 1 \Rightarrow a = 2, b \neq 1 \Rightarrow (d): y = 2x + b$ ( $b \neq 1$ )	0,25
	Vì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 ta có ( $x = -3, y = 0$ ) $\Rightarrow 2 \cdot (-3) + b = 0 \Rightarrow b = 6$ (Thỏa mãn $b \neq 1$ )	0,25
	Vậy (d): $y = 2x + 6$	0,25
	<b>b) - - 0,75 điểm</b>	
	Đặt $\frac{1}{x+1} = u, \frac{1}{y-2} = v$ , ta có :	
$\begin{cases} 2u + 3v = -1 \\ 3u - 5v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u + 9v = -3 \\ 6u - 10v = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19v = -19 \\ 2u + 3v = -1 \end{cases}$	0,25	
$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ 2u + 3 \cdot (-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ 2u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ u = 1 \end{cases}$		
Điều kiện xác định : $x \neq -1, y \neq 2$ . Ta có :		
$\begin{cases} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \frac{1}{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ y-2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn ĐKXD)	0,25	
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất ( $x = 0, y = 1$ )	0,25	

<b>Bài 3</b> 2,5 điểm	<b>1.a) - - 0,5 điểm</b>	
	a) Xét pt: $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (1) - tham số $m$ , có : $\Delta' = (-m)^2 - (m-1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall m$	<b>0.25</b>
	Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$	<b>0.25</b>
	<b>1.b) - - 1 điểm</b>	
	b) Theo câu a, Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$ . Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$	<b>0.25</b>
	$P = (x_1 - x_2)^2 + x_1 x_2 = \dots = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2$ Ta có: $= (2m)^2 - 3(m - 1) = 4m^2 - 3m + 3 = \left(2m - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16} \geq \frac{39}{16} \forall m$	<b>0.25</b>
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 2m - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 2m = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$	<b>0.25</b>
Vậy $P_{\min} = \frac{39}{16}$ tại $m = \frac{3}{8}$ .	<b>0.25</b>	
<b>2. Bài toán - - 1 điểm</b>		
Gọi số máy thở nhà máy sản xuất trong mỗi ngày theo kế hoạch là $x$ chiếc - Điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$	<b>0.25</b>	
Thời gian dự định sản xuất trong $\frac{360}{x}$ ngày Thực tế, mỗi ngày nhà máy sản xuất được $x+3$ chiếc và đã hoàn thành kế hoạch trong thời gian $\frac{360}{x+3}$ ngày	<b>0.25</b>	
Theo bài ra, ta có phương trình: $\frac{360}{x} - \frac{360}{x+3} = 6$ Giải phương trình ta được $x_1 = 12$ (TMĐK) và $x_2 = -15$ (trái ĐK)	<b>0,25</b>	
Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày nhà máy sản xuất 12 chiếc máy thở.	<b>0.25</b>	
<b>Bài 4</b> 3,5 điểm	<b>4.1 - - 3 điểm</b>	
	Vẽ hình đúng cho câu a	<b>0,50</b>



**1.a) - - 1,0 điểm**

Xét đường tròn (O) có: E là điểm chính giữa cung nhỏ BD  
 $\Rightarrow \widehat{EB} = \widehat{ED}$

0,25

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{DFE}$  (Tính chất góc nội tiếp) hay  $\widehat{CAG} = \widehat{CFG}$

0,25

Lại có A, F nằm cùng phía với CG

0,25

Suy ra tứ giác AFCE là tứ giác nội tiếp

0,25

**1.b) - - 1,0 điểm**

Tứ giác AGCF nội tiếp (theo câu a)

$\Rightarrow \widehat{ACG} = \widehat{AFG}$  (góc nội tiếp cùng chắn cung AG) hay (1)

0,25

Xét đường tròn (O) đường kính AB ta có

$\widehat{AFG} = \widehat{ABD}$  (Góc nội tiếp cùng chắn cung AD) (2)

0,25

Từ (1) và (2) suy ra:  $\widehat{ACG} = \widehat{ABD} \Rightarrow CG \parallel BD$  (đồng vị)

0,25

Mà  $BD \perp AD$  ( $\widehat{ADB} = 90^\circ$  - góc nt chắn nửa đường tròn)  
 $\Rightarrow CG \perp AD$

0,25

**1.c) - - 0,5 điểm**

Gọi I là giao điểm của DF và AB

-  $CG \parallel BD \Rightarrow \frac{CB}{CI} = \frac{DG}{GI}$  (định lý Ta-let) (3)

-  $\widehat{EB} = \widehat{ED} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{EAD} \Rightarrow \frac{DG}{GI} = \frac{AD}{AI}$  (Tc đường p/g) (4)

0,25

-  $CH \parallel AD \Rightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{CH}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{CH}{CI}$  (h/q đ/l Ta-let) (5)

Từ (3), (4), (5)  $\Rightarrow \frac{CB}{CI} = \frac{CH}{CI} \Rightarrow CB = CH$

0,25

	<b>4.2 - - 0,5 điểm</b>	
	Bán kính đáy của hình trụ: $R = AD = AB : 2 = 4 : 2 = 2(cm)$	<b>0,25</b>
	Chiều cao của hình trụ: $h = AB = 4(cm)$ Thể tích hình trụ: $V = \pi R^2 h = \pi 2^2 \cdot 4 = 16\pi(cm^3)$	<b>0,25</b>
<b>Bài 5</b> <i>1,0 điểm</i>	<b>a) - - 0,25 điểm</b>	
	Có: $x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz} \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{yz} + yz \Leftrightarrow (x - \sqrt{yz})^2 \geq 0$ Luôn đúng với mọi $x, y, z$ và $yz > 0$ . Dấu “=” xảy ra khi $x^2 = yz$ .	<b>0,25</b>
	<b>b) - - 0,75 điểm</b>	
	*Với $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3$ , ta có: $3x + yz = (x + y + z)x + yz = x^2 + yz + x(y + z) \geq x(y + z) + 2x\sqrt{yz}$ (áp dụng kq câu a) $\Rightarrow \sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{x(y + z) + 2x\sqrt{yz}} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})$ $\Rightarrow x + \sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$ $\Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ (1)	<b>0,50</b>
Chứng minh tương tự ta có: $\frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ (2) $\frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ (3) Cộng vế của (1), (2), (3) ta có $\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$ Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$		<b>0,25</b>