

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI
GV RA ĐỀ: PHẠM VĂN THANH

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ HỌC SINH GIỎI LỚP 9
MÔN: TOÁN
Thời gian: 150 phút

ĐỀ ĐỀ NGHỊ

Bài 1: (3 điểm)

a) Cho a là số nguyên. Chứng minh $a^3 - a$ chia hết cho 6.

b) Cho ba số nguyên a, b, c . Chứng minh rằng:

Nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì $a^3 + b^3 + c^3$ cũng chia hết cho 6.

Bài 2: (3 điểm) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}} - 2\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$

b) $B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

Bài 3: (3 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + x - \frac{7}{x^2 + x + 1} = 5$ b) $x^2 + 5x + 8 = 2\sqrt{x + 3}$

Bài 4: (3 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$M = x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x + 2018$$

b) Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2} \quad \text{với } a > b > 0 \text{ và } a.b = 1$$

Bài 5: (3 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH và BK.

Chứng minh: $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$

Bài 6: (5 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi C là điểm bất kì trên tia tiếp tuyến Ax vẽ tiếp tuyến CM (M là tiếp điểm, M khác A) cắt tiếp tuyến By ở D.

a) Cho $AB = 4\text{cm}$, xác định vị trí của điểm C trên tia Ax để chu vi tứ giác ABDC bằng 14cm.

b) Đặt $AB = 2R$ và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác COD bằng r .

Chứng minh $\frac{1}{3} < \frac{r}{R} < \frac{1}{2}$: