8 CĐ

ĐS

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN 9
ĐỒNG HÀNH VÀO 10

MỤC LỤC

"Tài liệu tổng hợp từ nhiều nguồn: Sách, đề cương, đề thi."

Chủ đề 1

CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN CĂN THỨC

A. CÁC BÀI TOÁN RÚT GỌN CĂN THỨC

✪ CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

1. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \ge 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

2. $\sqrt{AB} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ (Với $A \ge 0; B \ge 0$)

3. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (Với $A \ge 0; B > 0$)

4. $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ (Với $B \ge 0$)

5. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ (Với $A \ge 0; B \ge 0$)

6. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ (Với $A < 0; B \ge 0$)

7. $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{1}{|B|}\sqrt{AB}$ (Với $A \ge 0; B > 0$)

8. $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (Với $B > 0$)

9 $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp B\right)}{A - B^2}$ (Với $A \ge 0; \mathrm{A} \ne \mathrm{B}^2$)

10 $\dfrac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{C\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right)}{A - B}$ (Với $A \ge 0; B \ge 0; \mathrm{A} \ne \mathrm{B}$)

11 $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$

✪ CÁCH TÌM ĐKXĐ CỦA MỘT BIỂU THỨC TRONG BÀI TOÁN RÚT GỌN

BIỂU THỨC - ĐKXĐ:			VÍ DỤ		
1.	$\sqrt{A}$	ĐKXĐ: $A \geq 0$	Ví dụ: $\sqrt{x-2018}$	ĐKXĐ:	$x \geq 2018$
2.	$\dfrac{A}{B}$	ĐKXĐ: $B \neq 0$	Ví dụ: $\dfrac{x+4}{x-7}$	ĐKXĐ:	$x \neq 7$
3.	$\dfrac{A}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $B > 0$	Ví dụ: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$x > 3$
4.	$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$	ĐKXĐ: $A \geq 0; B > 0$	Ví dụ: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$	ĐKXĐ:	$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$
5.	$\sqrt{\dfrac{A}{B}}$	ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	Ví dụ: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$	ĐKXĐ:	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$
6.	Cho a > 0 ta có: $x^2 > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{array}\right.$		Ví dụ: $x^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{a} \\ x < -\sqrt{a} \end{array}\right.$		
7.	Cho a > 0 ta có: $x^2 < a \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$		Ví dụ: $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$		

🗁 Dạng 1: Biểu thức dưới dấu căn là một số thực dương.

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{80}$

$A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$

$B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - \sqrt{300}$

$P = \sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

$C = (2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}) : \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

$M = \sqrt{45} + \sqrt{245} - \sqrt{4^2.5}$

$= \sqrt{3^2.5} + \sqrt{7^2 \cdot 5} - \sqrt{4^2.5}$

$= 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$N = 5\sqrt{8} + \sqrt{50} - 2\sqrt{18}$

$= 5.2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2.3\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= (10 + 5 - 6)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$P = 5\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

$= -5\sqrt{5}$

$A=\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}$
$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}$

$B=2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-\sqrt{300}$
$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3^2.3}-\sqrt{10^2.3}$
$=2\sqrt{3}+3.3.\sqrt{3}-10\sqrt{3}$
$=\sqrt{3}$

$C=(2\sqrt{3}-5\sqrt{27}+4\sqrt{12}):\sqrt{3}$
$=(2\sqrt{3}-5.3\sqrt{3}+4.2\sqrt{3}):\sqrt{3}$
$=-5\sqrt{3}:\sqrt{3}=-5$

<u>Nhận xét:</u> Đây là một dạng toán dễ. Học sinh có thể bấm máy tính để giải, đa phần áp dụng kiến thức đưa thừa số ra ngoài dấu căn để giải toán. $\sqrt{A^2B}=|A|\sqrt{B}$ $(B\ge 0)$

Tự luyện:

$A=\left(3\sqrt{50}-5\sqrt{18}+3\sqrt{8}\right).\sqrt{2}$ $\quad B=2\sqrt{32}-5\sqrt{27}-4\sqrt{8}+3\sqrt{75}$ $\quad C=\sqrt{20}-\sqrt{45}+2\sqrt{5}$

Dạng 2: Áp dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$ $\quad$ b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2}-\sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$ $\quad$ c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ $\quad$ e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$ $\quad$ f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Giải mẫu:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}=\left|3-2\sqrt{2}\right|+\left|3+2\sqrt{2}\right|=3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$

Lưu ý: Điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối: $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A & \text{nếu } A\ge 0\\ -A & \text{nếu } A<0\end{cases}$

Kết quả: $\quad$ *b)* $-4\sqrt{6}$ $\quad$ *c)* 1 $\quad$ *d)* 4 $\quad$ *e)* $2\sqrt{5}$ $\quad$ *f)* $2\sqrt{2}-4$

Dạng 3: Biểu thức dưới dấu căn đưa được về hằng đẳng thức $\sqrt{A^2}=|A|$

<u>Ví dụ 1:</u> Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

$A=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}-\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}$
$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$
$=\left|\sqrt{3}-1\right|-\left|2+\sqrt{3}\right|$
$=\sqrt{3}-1-\left(2+\sqrt{3}\right)=-3$.

Nhận xét: Các biểu thức $4-2\sqrt{3}$; $7+4\sqrt{3}$ đều có dạng $m \pm p\sqrt{n}$ trong đó với $a^2+b^2=m$ $p\sqrt{n}=2ab$. Những biểu thức như vậy đều viết được dưới dạng bình phương của một biểu thức.

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $B=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

$$B=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|$$
$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\ .$$

Cách 2:

$$B=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

Ta có:

$$B^2=5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}-2\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}=10-2\sqrt{1}=8$$

Vì $B>0$ nên $B=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Nhận xét: Các biểu thức $5+2\sqrt{6}$ và $5-2\sqrt{6}$ là hai biểu thức liên hợp. Gặp những biểu thức như vậy, để tính B ta có thể tính B^2 trước rồi sau đó suy ra B.

Bài 1: Rút gọn

a) $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ b) $B=\sqrt{4-\sqrt{12}}$

c) $C=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ d) $D=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Hướng dẫn giải

a) $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\left|\sqrt{5}-1\right|=\sqrt{5}-1$

b) $B=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|$

c) $C=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=\left|4-\sqrt{3}\right|=4-\sqrt{3}$

d) $D=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Bài 2: Rút gọn

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

b) $B=\sqrt{8-2\sqrt{15}}$

c) $C=\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

d) $D=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$

e) $E=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

f) $F=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{20}+\frac{1}{2}\sqrt{8}$

Hướng dẫn giải

a) $A=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$

b) $B=\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{15}-1\right)^2}=\sqrt{15}-1$

c) $C=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-2$

d) $D=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{14+2\sqrt{13}}-\sqrt{14-2\sqrt{13}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\left(\sqrt{13}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}\right]=\sqrt{2}$

e) $E=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=|\sqrt{5}+1|-|\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2$

f) $F=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{20}+\frac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}+2\sqrt{5}+\frac{1}{2}.2\sqrt{2}$

$=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|+2\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}=3\sqrt{5}$

Bài 3: Rút gọn (Bài tự luyện)

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{24+8\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

g) $\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

h) $\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

i) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

j) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

k) $\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$

l) $\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}+\sqrt{1-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}}$

🗁 Dạng 4: Rút gọn tổng hợp (sử dụng trục căn thức, hằng đẳng thức, phân tích thành nhân tử; ...)

Bài 1: Rút gọn:

$$A=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \qquad B=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

$$C=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \qquad D=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

$$E=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} \qquad F=\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\frac{2}{3+\sqrt{3}}$$

Hướng dẫn giải

a) $A=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=2$

b) $B=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}+\frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{5}=2\sqrt{6}$

c) $C=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+...+\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)=9$

d) $D=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}+2-\sqrt{3}=4$

e) $E=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{5^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}}$

$=\sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}}-\sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{3}-1\right|-\sqrt{3}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.(-2)=-\sqrt{2}$$

f) $F=\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\frac{2}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2.\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3\left(3-1\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Bài 2: Rút gọn

$A=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

$B=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)-\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-2}$

$C=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$

$D=\sqrt{\frac{4}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}-\sqrt{\frac{4}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}}$

Hướng dẫn giải

a) $A=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}+2-\sqrt{3}=4$$

b) $B=(\sqrt{5})^2-2^2-\frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{3}-2}=5-4-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}=1-(-1)=2$

c) $A=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(3\sqrt{3}-4\right)\left(2\sqrt{3}-1\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1}}-\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{5^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}}-\sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{3}-1\right|-\sqrt{3}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.(-2)=-\sqrt{2}$$

d) $$D=\sqrt{\frac{4}{\left(2-\sqrt{5}\right)^{2}}}-\sqrt{\frac{4}{\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}}}=\frac{\sqrt{2^{2}}}{\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^{2}}}-\frac{\sqrt{2^{2}}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}}}$$

$$=\frac{2}{\left|2-\sqrt{5}\right|}-\frac{2}{\left|2+\sqrt{5}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{5}+2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+2\right)-2\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}=\frac{2\sqrt{5}+4-2\sqrt{5}+4}{5-4}=8$$

Bài 3: Rút gọn - Bài tập tự luyện

a) $\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}-\dfrac{6-2\sqrt{7}}{4}+\dfrac{6}{\sqrt{7}-2}-\dfrac{5}{4+\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}+\dfrac{5}{\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

Bài 4: Rút gọn – Bài tập tự luyện

1) $A=\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}-\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}$

2) $B=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

3) $C=\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

4) $D=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

5) $E=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

6) $F=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$

7) $G=\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

8) $H=\sqrt{\dfrac{4}{\left(2-\sqrt{5}\right)^{2}}}-\sqrt{\dfrac{4}{\left(2+\sqrt{5}\right)^{2}}}$

9) $I=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

10) $J=\left(1+\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right).\left(1-\dfrac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)$

11) $K=\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{2+\sqrt{5}}$

12) $L=\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right):\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

13) $M=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}:\dfrac{1}{6}$

14) $N=\dfrac{6}{1+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

15) $O=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

16) $P=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$

17) $Q=\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

18) $R=\dfrac{2}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{2}{7-4\sqrt{3}}$

19) $S=\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{21-12\sqrt{3}}}$

20) $T=\dfrac{4}{1-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{13}}{1+\sqrt{5}}$

21) $U=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}-\sqrt{\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}}$

22) $V=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{\dfrac{2}{6-3\sqrt{3}}}$

23) $W=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3}}-\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3}}$

24) $Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$

Kinh nghiệm: Đôi khi một số bài toán rút gọn căn thức sẽ thực hiện dễ dàng hơn nếu chúng ta ***trục căn thức*** hoặc ***rút gọn được một hạng tử*** trong đề toán. Nếu quy đồng mẫu số thì việc thực hiện các phép tính rất phức tạp. Vì vậy trước khi làm bài toán rút gọn, học sinh cần quan sát kỹ đề toán từ đó có định hướng giải đúng đắn để lời giải được ngắn gọn, chính xác.

Dạng 5. Bài toán chứa ẩn (ẩn x) dưới dấu căn và những ý toán phụ.

✓ Rút gọn.

Bước 1: Tìm điều kiện xác định.

Bước 2: Tìm mẫu thức chung, quy đồng mẫu thức, rút gọn tử, phân tích tử thành nhân tử.

Bước 3: Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung của tử và mẫu.

Bước 4: Khi nào phân thức tối giản thì ta hoàn thành việc rút gọn.

Bài 1: Cho biểu thức $P=\dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{x-2\sqrt{x}-3}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị của P, biết $x=4+2\sqrt{3}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x\ge 0;\ x\ne 9$.

a) $$P=\frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}+\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3}-\frac{3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+3\left(3\sqrt{x}-5\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{3x-9\sqrt{x}+2\sqrt{x}-6+2x+2\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3-9\sqrt{x}+15}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{5x-17\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{5x-15\sqrt{x}-2\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$=\frac{\left(5\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}.$$

b) Ta có $x=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{3}+1$;

Do đó: $P=\dfrac{5\left(\sqrt{3}+1\right)-2}{\left(\sqrt{3}+1\right)+1}=\dfrac{5\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}=\dfrac{\left(5\sqrt{3}+3\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=7\sqrt{3}-9$.

c) Ta có $P=\dfrac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{5\sqrt{x}+5-7}{\sqrt{x}+1}$

$$P=5-\frac{7}{\sqrt{x}+1}.$$

Vì $\dfrac{7}{\sqrt{x}+1}>0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \dfrac{7}{\sqrt{x}+1}$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$.

Khi đó min $P=5-7=-2$.

Bài 2: Cho biểu thức $Q=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\dfrac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$

a) Rút gọn Q;

b) Tìm x để $Q=2$;

c) Tìm các giá trị của x để Q có giá trị âm.

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x>0;\ x\neq 4;\ x\neq 9$.

a) $$Q=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{5\sqrt{x}+2}{4-x}\right):\frac{3\sqrt{x}-x}{x+4\sqrt{x}+4}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}:\frac{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2-2x+4\sqrt{x}-5\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{-x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$$

b) $$Q=2\Leftrightarrow=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}=2$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}+2=2\sqrt{x}-6$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x}=-8\Leftrightarrow \sqrt{x}=8\Leftrightarrow x=64$.(Thỏa mãn ĐKXĐ).

c) $$Q<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}<0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3<0$ (vì $\sqrt{x}+2>0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x}<3\Leftrightarrow x<9$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $Q<0$ khi $0<x<9$ và $x\neq 4$.

Bài 3: Cho biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}-\dfrac{3}{\sqrt{a}+3}-\dfrac{a-2}{a-9}$ với $a\geq 0; a\neq 9$

a) Rút gọn B.

b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Hướng dẫn giải

a) Với $a\geq 0; a\neq 9$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}-\frac{3}{\sqrt{a}+3}-\frac{a-2}{a-9}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}-\frac{3}{\sqrt{a}+3}-\frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}-\frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}-\frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}$$

$$=\frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}=\frac{11}{a-9}$$

b) Để $B\in Z\Leftrightarrow \frac{11}{a-9}\in Z\Leftrightarrow 11\vdots(a-9)\Leftrightarrow(a-9)\in U(11)$

$U(11)=\{1;11;-1;-11\}$

Khi đó ta có bảng giá trị

$a-9$	-11	-1	1	11
a	-2	8	10	20
	Không thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a\in\{8;10;20\}$ thì $B\in Z$

Bài 4: Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}-\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(1-\frac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

(với $x>0; x\neq 4; x\neq 9$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}.(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

a) $$P=\frac{(x-9)+(4-x)+(9-x)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}:\frac{x-9-3\sqrt{x}+9}{x-9}$$

$$=\frac{4-x}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}:\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}=\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

b) $$x=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}}=2$$

Nên $P = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$

Bài 5: Với x > 0, cho hai biểu thức $A = \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 64.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm x để $\dfrac{A}{B} > \dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Với x = 64 ta có $A = \dfrac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \dfrac{2+8}{8} = \dfrac{5}{4}$

b) $B = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})+(2\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})} = \dfrac{x\sqrt{x}+2x}{x\sqrt{x}+x} = 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

c) Với x > 0 ta có: $\dfrac{A}{B} > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} : \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$ (Do x>0)

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \dfrac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$

b) Chứng minh $B = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{B} \geq \dfrac{x}{4}+5$

Hướng dẫn giải

a) Do x = 9 thoả mãn điều kiện nên thay x = 9 vào A ta có

$$A = \dfrac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-1} = \dfrac{3+4}{3-1} = \dfrac{7}{2}.$$

b) $B = \dfrac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$

$= \dfrac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+3}$

$$=\frac{3\sqrt{x}+1-2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

c) $\frac{A}{B}\geq\frac{x}{4}+5\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}:\frac{1}{\sqrt{x}-1}\geq\frac{x}{4}+5$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x}+4)\geq x+20\Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4\leq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2\leq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow x=4$$

x = 4 thoả mãn điều kiện. Vậy x = 4 thì $\frac{A}{B}\geq\frac{x}{4}+5$

Bài 7: Cho biểu thức $A=\frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ (Với $x>0,x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A.
b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Hướng dẫn giải

a) $A=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

b)

Cách 1: Với $x>0,x\neq 1\Rightarrow x+\sqrt{x}+1>\sqrt{x}+1>1$.

Vậy $0<A=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}<\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}<2$.

Vì A nguyên nên A = 1 $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=1\Leftrightarrow x=1$ (Không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giả trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow \text{Ax+(A-1)}\sqrt{x}+A-2=0$$

Trường hợp 1: $A=0\Rightarrow\sqrt{x}=-2\Rightarrow x\in\varnothing$

Trường hợp 2: $A\neq 0\Rightarrow\Delta=(A-1)^2-4A(A-2)=-3A^2+6A+1\geq 0\Leftrightarrow A^2-2A-\frac{1}{3}\leq 0$

$\Leftrightarrow A^2-2A+1\le\frac{4}{3}\Leftrightarrow (A-1)^2\le\frac{4}{3}\Rightarrow A\in\{1;2\}\, do A\in Z, A>0$

Với A = 1 => x = 1 (loại)

Với A = 2 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}=2\Leftrightarrow x=0$ (loại).

Bài 8: Cho biểu thức $P=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$, (với $x>0$ và $x\ne 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P tại $x=\sqrt{2022+4\sqrt{2018}}-\sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $1-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Và $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

nên $P=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Có $x=\sqrt{2022+4\sqrt{2018}}-\sqrt{2022-4\sqrt{2018}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{2018}+2\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2018}-2\right)^2}$

$=\left|\sqrt{2018}+2\right|-\left|\sqrt{2018}-2\right|=\sqrt{2018}+2-\sqrt{2018}+2=4$ thỏa mãn điều kiện $x>0$ và $x\ne 1$.

+ Vậy giá trị của biểu thức P tại $x=4$ là: $\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$.

Bài 9: Cho biểu thức $B=\left(\frac{6}{a-1}+\frac{10-2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1}\right).\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$ (với $a>0;\ a\ne 1$).

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Đặt $C=B.(a-\sqrt{a}+1)$. So sánh C và 1.

Hướng dẫn giải

a) Với $a > 0;\ a \neq 1$, ta có:

$$B = \left[\frac{6}{a-1} + \frac{10-2\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}\right].\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}+4}{(a-1)(\sqrt{a}-1)}.\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}.\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$ Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

b) Với $a > 0;\ a \neq 1$, ta có: $C - 1 = \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - 1 = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}} > 0$. Vậy $C > 1$.

Bài 10: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$, với $x > 0$.

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

b) Với $x > 0$ ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ và $\sqrt{x} > 0$; $\sqrt{x}+2 > 0$.

Khi đó $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$

Suy ra: $0 < x \leq 1$.

Bài 11: Cho biểu thức $B = \left(\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+3}{1-\sqrt{x}}\right).\frac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}$ (với $x \geq 0;\ x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{4}$).

Tìm tất cả các giá trị của x để $B < 0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A = \sqrt{25} + 3\sqrt{4.2} - 2\sqrt{9.2} = 5 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 5$. Vậy $A = 5$.

b) Ta có $B=\left[\dfrac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}\right].\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}$

$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1}.\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-1}=\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-1}.$$

Vì $x\ge 0$ nên $2\sqrt{x}+3>0$, do đó $B<0$ khi $2\sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$.

Mà $x\ge 0; x\ne 1$ và $x\ne\dfrac{1}{4}$ nên ta được kết quả $0\le x<\dfrac{1}{4}$.

Bài 12: Cho biểu thức $V=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x>0, x\ne 0$.

a) Rút gọn biểu thức V.

b) Tìm giá trị của x để $V=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

a) $V=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$

b) $V=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\sqrt{x}-2=6\Leftrightarrow x=64$ (thỏa mãn)

Bài 13: Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x\ge 0, x\ne 25$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A=B.\left|x-4\right|$.

Hướng dẫn giải

1) Tính giá trị biểu thức A khi $x=9$.

Khi $x=9$ ta có $A=\dfrac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-5}=\dfrac{3+2}{3-5}=-\dfrac{5}{2}$

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$.

Với $x\ge 0, x\ne 25$ thì $B=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{x-15}=\dfrac{3}{\sqrt{x}+5}+\dfrac{20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}$

$=\dfrac{3\left(\sqrt{x}-5\right)+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}$ *(đpcm)*

3) Tìm tất cả các giá trị của để $A=B.\left|x-4\right|$.

Với $x\ge 0, x\ne 25$ Ta có: $A=B.\left|x-4\right|$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}.\left|x-4\right| \Leftrightarrow \sqrt{x}+2=\left|x-4\right| \qquad (*)$

Nếu $x\ge 4, x\ne 25$ thì $(*)$ trở thành : $\sqrt{x}+2=x-4$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$

Do $\sqrt{x}+2>0$ nên $\sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn)

Nếu $0\le x<4$ thì $(*)$ trở thành : $\sqrt{x}+2=4-x$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)=0$

Do $\sqrt{x}+2>0$ nên $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy có hai giá trị $x=1$ và $x=9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14: Cho biểu thức : $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, với $x\ge 0, x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Cho biểu thức $Q=\dfrac{(x+27).P}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$, với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne 4$. Chứng minh $Q\ge 6$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-x+x\sqrt{x}+6-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}-x+x\sqrt{x}+6-x-3\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{-x+x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x-4\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\sqrt{x}-2.$$

b) Với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 4$, ta có

$$Q=\frac{\left(x+27\right).P}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x+27}{\sqrt{x}+3}=\frac{x-9+36}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\sqrt{x}-3+\frac{36}{\sqrt{x}+3}=-6+\left(\sqrt{x}+3\right)+\frac{36}{\sqrt{x}+3}\geq -6+12=6.$$ (co-si)

Dấu "=" xẩy ra khi $\sqrt{x}+3=\dfrac{36}{\sqrt{x}+3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+3\right)^2=36\Leftrightarrow x=9$.

Bài 15: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$ với 0 < a < 1.

Chứng minh rằng P = –1

Hướng dẫn giải

Với 0 < a < 1 ta có:

$$P=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-\left(\sqrt{1-a}\right)^2}\right]\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{1-a}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}\right]\left[\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}}-\frac{1}{a}\right]$$

$$=\left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right]\left(\frac{\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}}{a^2}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{2\sqrt{1-a}.\sqrt{1+a}-(1-a)-(1+a)}{2a}$$

$$=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\frac{-\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)^2}{2a}$$

$$=-\frac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}{2a}$$

$$=-\frac{1+a-1+a}{2a}=-\frac{2a}{2a}=-1$$

Bài 16: 1) Tính giá trị biểu thức : $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ khi x = 9.

2) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right).\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0; x\neq 1$.

a) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) Tìm giá trị của x để 2P = $2\sqrt{x}+5$.

Hướng dẫn giải

1. Với x = 9 thì $\sqrt{x}=\sqrt{9}=3\Rightarrow A=\dfrac{3+1}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2$

2) a) Chứng minh $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

- Với $x>0; x\neq 1$ ta có

$$P=\left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\right).\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$P=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

- Vậy với $x>0; x\neq 1$ ta có $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

b) - Với $x>0; x\neq 1$ ta có: $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

- Để 2P = $2\sqrt{x}+5$ nên $\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+5$

- Đưa về được phương trình $2x+3\sqrt{x}-2=0$

- Tính được $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-2 \text{ (loại)}\\ \sqrt{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện $x>0; x\neq 1$

Vậy với $x=\frac{1}{4}$ thì 2P = $2\sqrt{x}+5$

Bài 17: Cho hai biểu thức $A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$ và $B=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ (x>0, $x\neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A và B.

b) Tìm giá trị của x để $3A+B=0$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{5}$

$$=\left|\sqrt{5}-2\right|-\sqrt{5}=\sqrt{5}-2-\sqrt{5}=-2 \text{ (vì } \sqrt{5}>2\text{)}$$

$$B=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}.(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{(\sqrt{x}-1).(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1=2\sqrt{x}$$

b) $3A+B=0 \Leftrightarrow -6+2\sqrt{x}=0$ với $x\geq 0,\ x\neq 1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow \sqrt{x}=3 \Leftrightarrow x=9 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

Vậy với x = 9 thì 3A + B = 0

Bài 18: Cho biểu thức $A = \left(2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}\right) : \sqrt{3}$

$$B = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

a) Rút gọn biểu thức A và B

b) Tìm x biết B - 3$\sqrt{2x-7}$ = A

Hướng dẫn giải

a) $A = \left(2\sqrt{3} - 5\sqrt{27} + 4\sqrt{12}\right) : \sqrt{3}$

$= \left(2\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 8\sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$

$= -5\sqrt{3} : \sqrt{3}$ = -5

$$B = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4-3} = 1$$

b) B - 3$\sqrt{2x-7}$ = A (ĐK: $x \ge \frac{7}{2}$)

$\Leftrightarrow$ 1 - 3$\sqrt{2x-7}$ = - 5

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-7}$ = 2 $\Leftrightarrow$ 2x - 7 = 4 $\Leftrightarrow$ x = 5,5 (TMĐK)

Bài 19: Cho $x = \frac{15}{\sqrt{6}-1} - \frac{2}{\sqrt{6}+2}$; $A = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$. với x > 0, x ≠ 1

a) Tính giá trị của x và rút gọn A

b) Tính giá trị biểu thức B = (A + 1)($\sqrt{3} - \sqrt{2}$) với giá trị của x tính được ở phần a.

Hướng dẫn giải

a) $x = \frac{15(\sqrt{6}+1)}{6-1} - \frac{2(\sqrt{6}-2)}{6-4} = 3(\sqrt{6}+1) - (\sqrt{6}-2) = 5 + 2\sqrt{6}$

$$A=\frac{x}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\frac{x}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}-1$$

b) $B=(\sqrt{x}-1+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})=\sqrt{x}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ với $x=5+2\sqrt{6}$ ta có

$$B=\sqrt{5+2\sqrt{6}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$$

Bài 20: Cho biểu thức $A=\frac{3}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A khi $x=3-2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

1. $A=\frac{3}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$

$$=\frac{3}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}-3-\sqrt{x}-1-\sqrt{x}+3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

2. $x=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ thoả mãn $x\ge 0$ và $x\ne 1$

+) Thay $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ vào A

$$A=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1+1}\quad (\text{do } \sqrt{2}>1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kết luận $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ thì $A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 21: Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{4x}{(x-1)^2}$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $|x-5|=4$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $x\geq 0; x\neq 1$

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1}\right):\frac{4x}{(x-1)^2}=\left(\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\right).\frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\frac{(x-1)^2}{4x}=\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$ với ĐKXĐ: $x>0; x\neq 1$.

b) Với điều kiện: $x\geq 0; x\neq 1$.

Khi $|x-5|=4\Leftrightarrow x-5=4\Leftrightarrow x=9\Rightarrow \sqrt{x}=3$. Ta có $A=\dfrac{3+1}{6}=\dfrac{2}{3}$

🗁 Bài tập tự luyện:

Bài 1: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{4x}{4-x}\right):\dfrac{x+5\sqrt{x}+6}{x-4}$.

a) Rút gọn P;

b) Tính giá trị của P khi $x=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

c) Tìm x để $P=2$.

Bài 2: Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-4}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}\right).\dfrac{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}{6\sqrt{x}-18}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm các giá trị của x để $P>0$;

c) Tìm các giá trị của x để $P<1$.

Bài 3: Cho biểu thức $P=\frac{x+2}{x\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm x để $|P|=\frac{2}{3}$;

c) Chứng minh rằng với những giá trị của x làm cho P được xác định thì $P<1$.

Bài 4: Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{x-\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}+\frac{x-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}-2}\right)$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

c) Tìm x để $P.\frac{x-1}{x^2+8x}<-2$.

Bài 5: Cho biểu thức: $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$, với $x>0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của P khi $x=4$.

c) Tìm x để $P=\frac{13}{3}$.

Bài 6: Cho biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}-\frac{10\sqrt{x}}{x-25}-\frac{5}{\sqrt{x}+5}$, với $x\ge 0$ và $x\ne 25$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A khi $x=9$.

c) Tìm x để $A<\frac{1}{3}$.

Bài 7: Cho biểu thức: $P=\frac{x\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+4}+3(1-\sqrt{x})\quad (x\ge 0)$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của x để biểu thức $Q=\frac{2P}{1-P}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 8: a) Cho biểu thức $A=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của A khi $x=36$.

b)Rút gọn: $B=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}+\frac{4}{\sqrt{x}-4}\right):\frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 16$

c) Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức là số nguyên.

Bài 9: Cho biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}-\frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ (Với $x>0, x\neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức B.
b) Tính giá trị của A khi $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.
c) Cho biểu thức $P=\frac{A}{B}$. Hãy tìm các giá trị của m để x thỏa mãn P = m

HD câu d:

d) $P=\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ Với điều kiện $x>0, x\neq 4, x\neq 9$.

$P=m \Leftrightarrow (m-1)\sqrt{x}=3 \quad (1)$

Nếu m = 1 thì phương trình (1) vô ghiệm.

Nếu $m\neq 1$ thì từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{3}{m-1}$.

Do $x>0, x\neq 4, x\neq 9 \Rightarrow \sqrt{x}>0, \sqrt{x}\neq 2, \sqrt{x}\neq 3$.

Để có x thỏa mãn P = m $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{m-1}>0\\ \frac{3}{m-1}\neq 2\\ \frac{3}{m-1}\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1\\ m\neq \frac{5}{2}\\ m\neq 2\end{cases}$

Vậy $m>1, m\neq \frac{5}{2}, m\neq 2$ (*Thỏa mãn yêu cầu bài toán*)

Bài 10: Cho biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}-\frac{7\sqrt{x}-9}{x-9}$ (Với $x>0, x\neq 9$).

a) Rút gọn biểu thức A.
b) Tính giá trị của A khi $x=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.
c) Tìm x để biểu thưc $\frac{A}{B}=1$.

d) Tìm các giá trị m để có x thỏa mãn $\frac{A}{B} = m$.

Chủ đề **2**

CÁC BÀI TOÁN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

B. CÁC BÀI TOÁN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

🗁. Kiến thức cơ bản

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $(I)\ \begin{cases} \text{ax} + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Trong đó a và b cũng như a′ và b′ không đồng thời bằng 0.

* Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

* Hệ (I) vô nghiệm khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.

* Hệ (I) có vô số nghiệm khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

✪ 1. Giải phương trình bằng phương pháp thế. (giả sử hệ có ẩn x và y)

- Từ một phương trình của hệ, biểu thị một ẩn chẳng hạn ẩn x theo ẩn kia

- Thế biểu thức của x vào phương trình còn lại rồi thu gọn, ta tìm được giá trị của y.

- Thế giá trị của y vào biểu thức của x ta tìm được giá trị của x.

✪ 2. Giải phương trình bằng phương pháp cộng đại số (giả sử hệ có ẩn x và y)

- Nhân các vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn bằng nhau hoặc đối nhau.

- Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới trong đó có một phương trình một ẩn.

- Giải hệ phương trình vừa thu được

Chú ý: Nếu hệ phương trình có một ẩn mà hệ số bằng ± 1 thì nên giải hệ này theo phương pháp thế.

🕮 **Lưu ý:*

Khi trong hệ có chứa các biểu thức giống nhau, ta kết hợp phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ về một hệ mới đơn giản hơn. Sau đó sử dụng phương pháp cộng hoặc thế để tìm ra nghiệm của hệ phương trình.

✪ Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

a) Phương pháp giải

- Đặt điều kiện để hệ có nghĩa (*nếu cần*).

- Đặt ẩn phụ và điều kiện của ẩn phụ *(nếu có).*

- Giải hệ theo các ẩn phụ đã đặt.

- Trở lại ẩn đã cho để tìm nghiệm của hệ số (*lưu ý với điều kiện lúc đặt ẩn phụ*).

🗁. Ví dụ minh họa

Bài 1: Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a)

+ Giải theo phương pháp thế:

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=11 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-2y)-2y=11 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-6y-2y=11 \\ x=1-2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-8y=11 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-11=8y \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y=-8 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1-2.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;-1).

+ Giải theo phương pháp cộng đại số:

$$\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=12 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2y=-2 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;-1).

b) + Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Điều kiện: $x \neq 0;\ y \neq\ 0$

Đặt $\dfrac{1}{x}=a;\dfrac{1}{y}=b$ (*)

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} a-b=1 \\ 3a+4b=5 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} a-b=1 \\ 3a+4b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=3 \\ 3a+4b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7b=2 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2}{7} \\ a=1+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{2}{7} \\ a=\dfrac{9}{7} \end{cases}$

Thay $\begin{cases} b=\dfrac{2}{7} \\ a=\dfrac{9}{7} \end{cases}$ vào (*) ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{7} \\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7}{2} \\ x=\dfrac{7}{9} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;\, y)=\left(\dfrac{7}{9};\, \dfrac{7}{2}\right)$

. Bài tập.

Bài 1: Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+2y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-7y=-26 \\ 5x+3y=-16 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+y=9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-2y=8 \\ x+y=-1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=23 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=6 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

b) $\begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 3x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 15x-5y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x=17 \\ 2x+5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-1)$.

c) $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2(x-1)=3 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=5 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

d) $\begin{cases} x-7y=-26 \\ 5x+3y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-35y=-130 \\ 5x+3y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7y=-26 \\ -38y=-114 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-5;3)$.

e) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=12 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;-1)$.

f) $\begin{cases}2x-3y=1\\4x+y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=1\\12x+3y=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=1\\14x=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

g) $\begin{cases}x-2y=8\\x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3y=9\\x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3\\x+(-3)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3\\x=2\end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-3)$.

h) $\begin{cases}3x-y=5\\5x+2y=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=10\\5x+2y=23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11x=33\\3x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;4)$.

i) $\begin{cases}2x+y=1\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Nhận xét: Học sinh thành thạo phương pháp thế hoặc phương pháp cộng thì giải theo phương pháp đó.

Bài 2: Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+y=3\\\dfrac{1}{x}-2y=4\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{-1}{2}\\2x-\dfrac{3}{y}=\dfrac{-7}{2}\end{cases}$

d) $\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}$

e) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{1}{y-1}=5\\\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{y-1}=-1\end{cases}$

f) $\begin{cases}4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=4\\2\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a)

$$\begin{cases}3(x+1)+2(x+2y)=4\\4(x+1)-(x+2y)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+3+2x+4y=4\\4x+4-x-2y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4y=1\\3x-2y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+4y=1\\6x-4y=10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}11x=11\\6x-4y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-1)$.

b) Điều kiện $x\neq 0$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+y=3\\\dfrac{1}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{x}+2y=6\\\dfrac{1}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}=10\\\dfrac{1}{x}-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{2}{x}+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=-1\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$.

c) Điều kiện $y\neq 0$. Đặt $t=\dfrac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}x+t=\dfrac{-1}{2}\\2x-3t=\dfrac{-7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{-1}{2}-x\\2x-3(\dfrac{-1}{2}-x)=\dfrac{-7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{-1}{2}-x\\5x=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\t=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(-1;2)$.

d) $(I)\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}$ ĐK $x\neq 1; y\neq -2$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}=a\\\dfrac{1}{y+2}=b\end{cases}$. Khi đó hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases}3a-2b=4\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=4\\4a+2b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7a=14\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} = 2 \\ \dfrac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y) = (2;-1)$.

e) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y} + \dfrac{1}{y-1} = 5 \\ \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{y-1} = -1 \end{cases}$. Điều kiện: $x \neq -y; y \neq 1$

Đặt $u = \dfrac{1}{x+y}$ và $v = \dfrac{1}{y-1}$. Hệ phương trình thành :

$$\begin{cases} 4u + v = 5 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u + 2v = 10 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u = 9 \\ 2v = u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$$

Thay vào hệ đã cho ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = 1 \\ \dfrac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y) = (-1;2)$.

f) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 4\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{y} = 0 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \\ 2\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;0)$.

🗁. Bài tập tự luyện

Bài 1: Giải hệ phương trình.

1. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 3x+y=6 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x-y=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-2y=-9 \\ 4x+3y=2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5x+6y=17 \\ 9x-y=7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ 6x-3y=5 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 5x+2y=14 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-2y=14 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=3 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{3} \\ \frac{x+8}{y+4}=\frac{9}{4} \end{cases}$ 15. $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ x+y-10=0 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} \frac{3}{5}x+\frac{2}{3}y=1 \\ \frac{3}{7}x-\frac{1}{3}y=-5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+2y=1 \\ 4x-(\sqrt{2}+1)y=3 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x+y=\sqrt{2}+1 \\ x+y=1 \end{cases}$ 19. $\begin{cases} 5x-3y=4 \\ x+2y=3 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} -3x+2y=3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 5x+2y=2 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-3 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 4x-2y=4 \\ x+5y=17,5 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 3x-4y=-7 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 3x+3y=1 \\ -x+1,5y=-0,5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x\sqrt{3}+y=2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6}-y\sqrt{2}=2 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 0,2x+0,1y=0,3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ 31. $\begin{cases} 0,75x-3,2y=10 \\ x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=4\sqrt{3} \end{cases}$ 32. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ -x+4y=10 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 5x+2y=28 \end{cases}$ 34. $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x-y=-8 \end{cases}$ 35. $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+y=8 \end{cases}$ 36. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=4 \end{cases}$

Phương pháp: *Giải hệ bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số.*

Bài 2: Giải hệ phương trình.

1. $\begin{cases} 4x-3y+5(x-y)=1 \\ 2x-4(2y-1)=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2(x+1)-15(y-1)=8 \\ 3(x+1)-2(y-1)=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5(x-y)-3(2x+3y)=12 \\ 3(x+2y)-4(x+2y)=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{2x+3}{y-1}=\frac{4x+1}{2y+1} \\ \frac{x+2}{y-1}=\frac{x-4}{y+2} \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \frac{x-y}{2}+\frac{x-3y}{4}=0 \\ \frac{3x-5y+1}{2}-1=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3)=\frac{1}{2}xy+50 \\ \frac{1}{2}(x-2)(y-2)=\frac{1}{2}xy-32 \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x+2)(y-2)=xy \\ (x+4)(y-3)=xy+6 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} (x-1)(y-2)-(x+1)(y-3)=4 \\ (x-3)(y+1)-(x-3)(y-5)=18 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} (x+5)(y-2)=xy \\ (x-5)(y+12)=xy \end{cases}$

10. $\begin{cases}(x-1)(y-2)=(x+1)(y-3)\\(x-5)(y+4)=(x-4)(y+1)\end{cases}$ 11. $\begin{cases}3(x-7)-6(x-y+1)=0\\4(x-1)+2(x-2y+7)=0\end{cases}$ 12. $\begin{cases}5(x+2y)-3(x-y)=99\\x-3y=7x-4y-17\end{cases}$

13. $\begin{cases}3(y-5)+2(2-3)=0\\7(x-4)+3(x+y-1)=14\end{cases}$ 14. $\begin{cases}2(x+1)-5(y+1)=8\\3(x+1)-2(y+1)=1\end{cases}$ 15. $\begin{cases}2(3y+1)-4(x-1)=5\\5(3y+1)-8(x-1)=9\end{cases}$

16. $\begin{cases}3(x+y)-2(x-y)=9\\2(x+y)+(x-y)=-1\end{cases}$ 17. $\begin{cases}x^2+3y=1\\3x^2-y=1\end{cases}$ 18. $\begin{cases}(x-3)(2y+5)=(2x+7)(y-1)\\(4x+1)(3y-6)=(6x-1)(2y+3)\end{cases}$

19. $\begin{cases}2(2x+3y)=3(2x-3y)+10\\4x-3y=4(6y-2x)+3\end{cases}$ 20. $\begin{cases}-x+2y=-4(x-1)\\5x+3y=-(x+y)+8\end{cases}$ 21. $\begin{cases}(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+y=\sqrt{2}\\x+(\sqrt{3}+\sqrt{2})y=\sqrt{6}\end{cases}$

22. $\begin{cases}2(x-2)+3(1+y)=-2\\3(x-2)-2(1+y)=-3\end{cases}$ 23. $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\(x+y)+2(x-y)=5\end{cases}$ 24. $\begin{cases}3(x+1)+2y=-x\\5(x+y)=-3x+y-5\end{cases}$

25. $\begin{cases}5(x+2y)=3x-1\\2x+4=3(x-5y)-12\end{cases}$ 26. $\begin{cases}3\sqrt{5}x-4y=15-2\sqrt{7}\\-2\sqrt{5}x+8\sqrt{7}y=18\end{cases}$ 27. $\begin{cases}x+y=2(x-1)\\7x+3y=x+y+4\end{cases}$

Phương pháp: *Rút gọn từng phương trình của hệ sau đó giải hệ bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số*

Bài 3: Giải hệ phương trình.

1) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y-2}=4\\\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y-2}=1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y}=-1\\\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=-1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y-2}=-1\\\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y-2}=5\end{cases}$

4) $\begin{cases}\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{6}{x+y}=-1\\\dfrac{1}{2x-y}-\dfrac{1}{x+y}=0\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10\\\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{y-1}=18\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{2}{y+4}=4\\\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{5}{y+4}=9\end{cases}$

7) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+2y}-\dfrac{1}{x-2y}=1\\\dfrac{20}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=1\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\dfrac{12}{x-3}-\dfrac{5}{y+2}=63\\\dfrac{8}{x-3}+\dfrac{15}{y+2}=-13\end{cases}$ 9) $\begin{cases}\dfrac{-5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10\\\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=-18\end{cases}$

10) $\begin{cases}\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{15}{y+2}=1\\\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=\dfrac{1}{12}\end{cases}$ 11) $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+1}=7\\\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{2}{y-1}=4\end{cases}$ 12) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+2y}-\dfrac{2}{x-2y}=1\\\dfrac{2}{x+2y}+\dfrac{3}{x-2y}=11\end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=3 \\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{3}{x-y}=1 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y-1}=1 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{5}{x-3y}=3 \\ \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{2}{x-3y}=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=2 \\ \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{5}{2x+y}=2 \\ \dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{1}{2x+y}=\dfrac{2}{15} \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x+y}=2 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x+y}=1,7 \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dfrac{5}{x-2}+\dfrac{3}{y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{5}{y-1}=1 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} \dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{9}{y-1}=1 \\ \dfrac{3}{2x+1}-\dfrac{2}{y-1}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$ 21) $\begin{cases} \dfrac{4}{2x-3y}+\dfrac{5}{3x+y}=-2 \\ \dfrac{3}{3x+y}-\dfrac{5}{2x-3y}=21 \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{6x-3}{y-1}-\dfrac{2y}{x+1}=5 \\ \dfrac{4x-2}{y-1}-\dfrac{4y}{x+1}=2 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+y-3}-\dfrac{2}{x-y+1}=8 \\ \dfrac{3}{x+y-3}+\dfrac{1}{x-y+1}=1,5 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1}-\dfrac{5}{2x-y+3}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1}+\dfrac{1}{2x-y+3}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{y+12}=1 \\ \dfrac{x}{y+12}-\dfrac{x}{y}=2 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \dfrac{5x}{x+1}+\dfrac{y}{y-3}=27 \\ \dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{3y}{y-3}=4 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y-1}+\dfrac{3y}{x-1}=1 \\ \dfrac{2y}{x-1}-\dfrac{5x}{y-1}=2 \end{cases}$

28) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=36 \\ 3x^2+7y^2=37 \end{cases}$ 29) $\begin{cases} 3x^2+y^2=5 \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$ 30) $\begin{cases} 4x^2+y^2=13 \\ 2x^2-y^2=-7 \end{cases}$

Phương pháp: *Nên đặt ẩn phụ để giải hệ phương trình để hệ được gọn và tránh sai xót trong giải toán.*

Lưu ý đặt điều kiện của x; y và ẩn phụ (nếu có)

Bài 3: Giải hệ phương trình.

1) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5 \\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{3x-1}-\sqrt{2y+1}=1 \\ 2\sqrt{3x-1}+3\sqrt{2y+1}=12 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{y-3}=3 \\ 2\sqrt{x-2}-3\sqrt{y-3}=-4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1}-3\sqrt{y-2}=5 \\ 4\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=17 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{x+3}-2\sqrt{y+1}=2 \\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=6 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,5 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1 \\ \sqrt{y}+\sqrt{x+1}=1 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 7\sqrt{x-5}-2\sqrt{y+2}=8 \\ 4\sqrt{x-5}+5\sqrt{y+2}=23 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{3}{\sqrt{y-1}}=5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{y-1}}=1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=2\dfrac{1}{6} \end{cases}$ 12) $\begin{cases} \dfrac{10}{\sqrt{12x-3}}+\dfrac{5}{\sqrt{4y+1}}=1 \\ \dfrac{7}{\sqrt{12x-3}}+\dfrac{8}{\sqrt{4y+1}}=1 \end{cases}$

Phương pháp: *Nên đặt ẩn phụ để giải hệ phương trình để hệ được gọn và tránh sai xót trong giải toán.*

Lưu ý: đặt điều kiện của các biểu thức dưới dấu căn. So sánh nghiệm với điều kiện đó.

🗁. Giải hệ phương trình và một số ý phụ.

Dạng 1: Giải hệ phương trình theo tham số m cho trước.

Phương pháp:

Bước 1: Thay giá trị của m vào hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ phương trình mới.

Bước 3: Kết luận.

Dạng 2: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa điều kiện cho trước.

Phương pháp:

Bước 1: Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x,y) theo tham số m;

Bước 2: Thế nghiệm x,y vào biểu thức điều kiện cho trước, giải tìm m;

Bước 3: Kết luận.

Dạng 3: Tìm mối liên hệ giữa x,y không phụ thuộc vào tham số m.

Phương pháp:

Bước 1: Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x,y) theo tham số m;

Bước 2: Dùng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế làm mất tham số m;

Bước 3: Kết luận.

Bài tập

Bài 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x-y=a+1 & (1) \\ x+(a-1)y=2 & (2) \end{cases}$ (a là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $a=2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

d) Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN.

Hướng dẫn giải

a) Khi $a=2$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}3x-y=3\\x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=5\\y=2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Vậy với $a=2$ hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{4}\right)$

b) Giải và biện luận:

Từ PT (1) ta có: $y=(a+1)x-(a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$x+(a+1)\left[(a+1)x-(a-1)\right]=2\Leftrightarrow x+\left(a^2-1\right)x-\left(a^2-1\right)=2\Leftrightarrow a^2x=a^2+1$ (4)

TH1: $a\neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}$. Thay vào (3) ta có:

$$y=(a+1)\frac{a^2+1}{a^2}-(a+1)=\frac{(a+1)\left(a^2+1\right)-a^2(a+1)}{a^2}=\frac{a^3+a+a^2+1-a^3-a^2}{a^2}=\frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

TH2: Nếu $a=0$, phương trình (4) vô nghiệm. Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

KL: $a\neq 0$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

$a=0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $a\neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

c) Hệ phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2+1}{a^2} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{a+1}{a^2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{Z})$

Điều kiện cần: $x = \dfrac{a^2+1}{a^2} = 1 + \dfrac{1}{a^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Điều kiện đủ:

$a = -1 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Z}$ (nhận)

$a = 1 \Rightarrow y = 2 \in \mathbb{Z}$ (nhận)

Vậy $a = \pm 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Với $a \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{a^2+1}{a^2}; \dfrac{a+1}{a^2}\right)$

d) Ta có $x + y = \dfrac{a^2+1}{a^2} + \dfrac{a+1}{a^2} = \dfrac{a^2+a+2}{a^2} = 1 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a^2}$.

Đặt $t = \dfrac{1}{a}$ ta được:

$$x + y = 2t^2 + t + 1 = 2\left(t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = -\dfrac{1}{4}$, khi đó $a = -4$

Vậy $a = -4$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x + y$ đạt GTNN bằng $\dfrac{7}{8}$

Bài 2: Tìm a, b biết hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + by = a \\ bx + ay = 5 \end{cases}$ có nghiệm $x = 1$; $y = 3$.

Hướng dẫn giải

Thay $x = 1$; $y = 3$ vào hệ ta có:

$$\begin{cases}2.1+b.3=a\\ b.1+a.3=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b=2\\ 3a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-9b=6\\ 3a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10b=-1\\ 3a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{-1}{10}\\ a=\dfrac{17}{10}\end{cases}.$$

Vậy $a=\dfrac{-1}{10}$; $y=\dfrac{17}{10}$ thì hệ phương trình có nghiệm $x=1$; $y=3$.

Bài 3: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=m+3\\ 2x-3y=m\end{cases}(I)$ $(m$ là tham số$)$.

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=-3$.

Hướng dẫn giải

a) Với $m=1$, hệ phương trình (I) có dạng:

$$\begin{cases}x+2y=4\\ 2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=8\\ 2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2;1)$.

b) $$\begin{cases}x+2y=m+3\\ 2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=2m+6\\ 2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=m+3\\ 7y=m+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5m+9}{7}\\ y=\dfrac{m+6}{7}\end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{5m+9}{7};\dfrac{m+6}{7}\right)$.

Lại có $x+y=-3$ hay $\dfrac{5m+9}{7}+\dfrac{m+6}{7}=-3\Leftrightarrow 5m+9+m+6=-21\Leftrightarrow 6m=-36\Leftrightarrow m=-6$

Vậy với $m=-6$ thì hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất (x,y) thỏa mãn $x+y=-3$.

Bài 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2-2y^2=-2$

Hướng dẫn giải

$\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5m-1-2x \\ x-2(5m-1-2x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5m-1-2x \\ 5x=10m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2m \\ y=m-1 \end{cases}$

Thay vào ta có

$x^2-2y^2=-2 \Leftrightarrow (2m)^2-2(m-1)^2=-2 \Leftrightarrow 2m^2+4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Vậy $m\in\{-2;0\}$.

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+y=2 \\ mx+y=m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn: $2x+y\le 3$.

Hướng dẫn giải

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

Ta có: $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

b) Ta có $y=2-(m-1)x$ thế vào phương trình còn lại ta được phương trình:

$mx+2-(m-1)x=m+1 \Leftrightarrow x=m-1$ suy ra $y=2-(m-1)^2$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(m-1;2-(m-1)^2\right)$

$2x+y=2(m-1)+2-(m-1)^2=-m^2+4m-1=3-(m-2)^2\le 3$ với mọi m.

Bài 6: Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 2x+ay=-4 \\ ax-3y=5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a=1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

a) Với $a=1$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y=-4\\x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+3y=-12\\x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=-7\\x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\-1-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$$

Vậy với $a=1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=(-1;-2)$.

b) Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $a=0$, hệ có dạng: $\begin{cases}2x=-4\\-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-\dfrac{5}{3}\end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a\neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\dfrac{2}{a}\neq\dfrac{a}{-3}\Leftrightarrow a^2\neq -6$ (luôn đúng, vì $a^2\geq 0$ với mọi a)

Do đó, với $a\neq 0$, hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi a.

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=m+1\\mx+y=2m\end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $\begin{cases}x\geq 2\\y\geq 1\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Thay $m=1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=3\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\4x+2y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=5\\2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

b) Xét hệ $\begin{cases}x+my=m+1 & (1)\\mx+y=2m & (2)\end{cases}$

Từ $(2)\Rightarrow y=2m-mx$ thay vào (1) ta được

$x+m(2m-mx)=m+1\Leftrightarrow 2m^2-m^2x+x=m+1$

$\Leftrightarrow (1-m^2)x = -2m^2+m+1 \Leftrightarrow (m^2-1)x = 2m^2-m-1 \qquad (3)$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm duy nhất $m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 1 \ (*)$

Khi đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\dfrac{2m+1}{m+1} \\ y=\dfrac{m}{m+1} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m+1}{m+1}\geq 2 \\ \dfrac{m}{m+1}\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{m+1}\geq 0 \\ \dfrac{-1}{m+1}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$

Kết hợp với $(*)$ ta được giá trị m cần tìm là $m<-1$.

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 & (1) \\ mx-y=4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) trong đó x,y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x=|y|$.

Hướng dẫn giải

a) Với $m=2$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 2(2y+5)-y=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ 3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$. Vậy $m=2$ hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-2)$

b) Từ phương trình (1) ta có $x=2y+5$. Thay $x=2y+5$ vào phương trình (2) ta được: $m(2y+5)-y=4 \Leftrightarrow (2m-1).y=4-5m \qquad (3)$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với: $2m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \dfrac{1}{2}$.

Từ đó ta được: $y=\dfrac{4-5m}{2m-1}$; $x=5+2y=\dfrac{3}{2m-1}$.

Ta có: $x.y=\dfrac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$. Do đó $x.y<0\Leftrightarrow 4-5m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

c) Ta có: $x=|y|\Leftrightarrow \dfrac{3}{2m-1}=\left|\dfrac{4-5m}{2m-1}\right|$ (4)

Từ (4) suy ra $2m-1>0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$. Với điều kiện $m>\dfrac{1}{2}$ ta có:

$(4)\Leftrightarrow |4-5m|=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-5m=3\\4-5m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{5}(l)\\m=\dfrac{7}{5}\end{array}\right.$. Vậy $m=\dfrac{7}{5}$.

Bài 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx+(m+1)y=1\\(m+1)x-my=8m+3\end{cases}$.

Chứng minh hệ luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$

Hướng dẫn giải

Xét hai đường thẳng $(d_1):mx+(m+1)y-1=0;(d_2):(m+1)x-my-8m+3=0$.

+ Nếu $m=0$ thì $(d_1):y-1=0$ và $(d_2):x-5=0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2).

+ Nếu $m=-1$ thì $(d_1):x+1=0$ và $(d_2):y+11=0$ suy ra (d_1) luôn vuông góc với (d_2).

+ Nếu $m\neq\{0;1\}$ thì đường thẳng $(d_1),(d_2)$ lần lượt có hệ số góc là: $a_1=-\dfrac{m}{m+1},a_2=\dfrac{m+1}{m}$ suy ra $a_1.a_2=-1$ do đó $(d_1)\perp(d_2)$.

Tóm lại với mọi m thì hai đường thẳng (d_1) luôn vuông góc với (d_2). Nên hai đường thẳng luôn vuông góc với nhau.

Xét hai đường thẳng $(d_1):mx+(m+1)y-1=0;(d_2):(m+1)x-my-8m+3=0$ luôn vuông góc với nhau nên nó cắt nhau, suy ra hệ có nghiệm duy nhất

🗁. Giải hệ phương trình bậc cao

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8x^3y^3+27=18y^3\\4x^2y+6x=y^2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $y=0$ không là nghiệm của mỗi phương trình.

Chia cả 2 vế phương trình (1) cho y^3, phương trình (2) cho y^2 ta được $\begin{cases} 8x^3+\dfrac{27}{y^3}=18 \\ 4.\dfrac{x^2}{y}+6.\dfrac{x}{y^2}=1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} 2x=a \\ \dfrac{3}{y}=b \end{cases}$ ta có hệ $\begin{cases} a^3+b^3=18 \\ a^2b+ab^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=1 \end{cases}$

a; b là nghiệm của phương trình $X^2-3X+1=0$

Từ đó suy ra hệ có 2 nghiệm: $(x_1,y_1)=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{4};\dfrac{3+\sqrt{5}}{6}\right);(x_2,y_2)=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4};\dfrac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2xy+x-2y+3=0 \\ y^2-x^2+2xy+2x-2=0. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} x^2-2xy+x-2y+3=0 \quad (1) \\ y^2-x^2+2xy+2x-2=0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-4xy+2x-4y+6=0 \\ y^2-x^2+2xy+2x-2=0 \end{cases}$$

Cộng 2 vế của hệ phương trình ta được $x^2+y^2-2xy+4x-4y+4=0$

$\Leftrightarrow (x-y+2)^2=0$

$\Leftrightarrow y=x+2$. Thay vào pt (1) ta được $x^2+5x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\dfrac{-5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+4\sqrt{xy}=16 \\ x+y=10 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+4\sqrt{xy}=16 \\ x+y=10 \end{cases} \quad (I) \quad (\text{Điều kiện: } x;y\ge 0)$$

Đặt S= $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; P = $\sqrt{xy}$ ($S \ge 0; P \ge 0$) hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} S+4P=16 \\ S^2-2P=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+4P=16 \\ 2S^2-4P=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+4P=16 \\ 2S^2+S-36=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=4(tm); S=\dfrac{-9}{2}(\text{ loai}) \\ P=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=4 \\ P=3 \end{cases}$$

Khi đó $\sqrt{x};\sqrt{y}$ là 2 nghiệm của phương trình: $t^2-4t+3=0$

Giải phương trình ta được $t_1 = 3$; $t_2 = 1$ (thỏa mãn)

$TH1: \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}$ (thỏa mãn)

$TH2: \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=11 \\ x+xy+y=3+4\sqrt{2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

- Đặt $S=x+y;\ P=xy$ được: $\begin{cases} S^2-2P=11 \\ S+P=3+4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-2P=11 \\ 2S+2P=6+8\sqrt{2} \end{cases}$

Cộng hai vế của hệ phương trình ta được phương trình:

$S^2+2S-(17+8\sqrt{2})=0$

- Giải phương trình được $S_1=3+\sqrt{2}$; $S_2=-5-\sqrt{2}$

$S_1=3+\sqrt{2}$ được $P_1=3\sqrt{2}$; $S_2=-5-\sqrt{2}$ được $P_2=8+5\sqrt{2}$

Với $S_1=3+\sqrt{2}$; $P_1=3\sqrt{2}$ có x, y là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2-(3+\sqrt{2})X+3\sqrt{2}=0$$

Giải phương trình được $X_1=3; X_2=\sqrt{2}$.

Với $S_2 = -5 - \sqrt{2}$ được $P_2 = 8 + 5\sqrt{2}$ có x, y là hai nghiệm của phương trình: $X^2 + (5+\sqrt{2})X + 8 + 5\sqrt{2} = 0$.

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ có hai nghiệm: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 3 \end{cases}$.

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2y} = x + 4 \\ \sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2y} = x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq \frac{-3}{2}$; $y \leq \frac{3}{2}$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được phương trình:

$\sqrt{3-2y} = 2 \Leftrightarrow 3 - 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}$ (t/mãn đk)

Cộng từng vế hai phương trình của hệ đã cho ta được phương trình:

$\sqrt{3+2x} = x + 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = (-1; -\frac{1}{2})$

Chủ đề 3 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

C. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình gồm ba bước:

Bước 1. Lập hệ phương trình của bài toán:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và theo đại lượng đã biết.
- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thỏa mãn, rồi kết luận.

- Đối với giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, học sinh phải chọn 2 ẩn số từ đó lập một hệ gồm hai phương trình.
- Khó khăn mà học sinh thường gặp là không biết biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và theo các đại lượng đã biết khác, tức là không thiết lập được mối quan hệ giữa các đại lượng. Tùy theo từng dạng bài tập mà ta xác định được các đại lượng trong bài, các công thức biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng ấy.

🗁. PHÂN DẠNG TOÁN

Dạng 1. Toán về quan hệ số

✓ *Số có hai, chữ số được ký hiệu là* $\overline{ab}$

Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$; *(Đk:* $1 \le a \le 9$ *và* $0 \le b \le 9$, $a,b \in N$*)*

✓ *Số có ba, chữ số được ký hiệu là* $\overline{abc}$

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$, *(Đk:* $1 \le a \le 9$ *và* $0 \le b, c \le 9$; $a, b, c \in N$*)*

✓ *Tổng hai số x; y là:* $x + y$

✓ *Tổng bình phương hai số x, y là:* $x^2 + y^2$

✓ *Bình phương của tổng hai số x, y là:* $(x + y)^2$

✓ *Tổng nghịch đảo hai số x, y là:* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đã cho.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là x, điều kiện $x \in N$, $(0 < x \le 9)$

Gọi chữ số hàng đơn vị của số cần tìm là y, điều kiện $y \in N$, $(0 \le y \le 9)$

Tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14 nên có phương trình: $x + y = 14$

Số đó là: $\overline{xy} = 10x + y$. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì số mới là: $\overline{yx} = 10y + x$

Theo bài ra ta số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị nên có phương trình: $10y + x - (10x + y) = 18$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 14 \\ y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Số cần tìm là 68.

Bài 2: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số hàng chục là a ($a \in N, 0 < a \le 9$)

Gọi chữ số hàng đơn vị là b ($b \in N, 0 \le b \le 9$)

Số cần tìm là $\overline{ab} = 10a + b$

Chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị nên ta có phương trình:

$b - a = 5 \Leftrightarrow -a + b = 5 \qquad (1)$

Khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới là

$\overline{a1b} = 100a + 10 + b$

Số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị nên ta có phương trình :

$(100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \; (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ (100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 5 \\ 90a = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases} (tm)$$

Vậy số cần tìm là 38.

Bài 3: Tìm một số có hai chữ số nếu chia số đó cho tổng hai chữ số thì ta được thương là 6. Nếu cộng tích hai chữ số với 25 ta được số nghịch đảo.

Hướng dẫn giải

Gọi chữ số hàng chục là x chữ số hàng đơn vị là y (đk : $x, y \in N, 0 < x, y \le 9$)

Nếu chia số đó cho tổng 2 chữ số ta được thương là 6 nên có phương trình: $\frac{10x+y}{x+y} = 6$

Nếu lấy tích 2 chữ số cộng thêm 25 ta được số nghịch đảo nên ta có phương trình $xy + 25 = 10y + x$

Theo bài ra ta có HPT: $\begin{cases} \frac{10x+y}{x+y} = 6 & (1) \\ xy + 25 = 10y + x & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có : $10x + y = 6x + 6y \Leftrightarrow 4x = 5y \Leftrightarrow x = \frac{5y}{4}$

Thay vào phương trình (2) ta có : $\frac{5y.y}{4} + 25 = 10y + \frac{5y}{4}$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 100 = 40y + 5y \Leftrightarrow 5y^2 - 45y + 100 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0$ *(3)*

$\Delta = 1 > 0$. Phương trình *(3)* có hai nghiệm phân biệt $y_1 = 5; y_2 = 4$ (thỏa mãn)

Với $y_1 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{5.5}{4}$ (không thỏa mãn điều kiện của x)

Với $y_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5.4}{4} = 5$ (Thỏa mãn điều kiện của x)

Vậy chữ số hàng chục là 5, chữ số hàng đơn vị là 4. Số cần tìm là 54.

Nhận xét: Có những bài toán khi giải hệ phương trình, khi sử dụng phép thế từ một phương trình thì phương trình thứ hai sẽ giải dưới dạng phương trình bậc hai một ẩn.

Bài tập tự luyện:

Bài A.01: Một số của một phân số lớn hơn tử số của nó là 3 đơn vị. Nếu tăng cả tử và mẫu của nó thêm 1 đơn vị thì được một phân số mới bằng $\frac{1}{2}$ phân số đã cho. Tìm phân số đó?

(Đ/S : Phân số cần tìm là $\frac{2}{5}$).

Bài A.02: Tổng các chữ số của 1 số có hai chữ số là 9. Nếu thêm vào số đó 63 đơn vị thì số thu được cũng viết bằng hai chữ số đó nhưng theo thứ tự ngược lại. Hãy tìm số đó?

(Đ/S: Số cần tìm là 18).

Bài A.03: Tổng hai số bằng 51. Tìm hai số đó biết rằng $\frac{2}{5}$ số thứ nhất thì bằng $\frac{1}{6}$ số thứ hai.

(Đ/S: Số cần tìm là 15 và 36).

Bài A.04: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó là 7. Nếu đổi chỗ hai chữ số hàng đơn vị và hàng chục cho nhau thì số đó giảm đi 45 đơn vị.

(Đ/S: Số cần tìm là 61).

Bài A.05: Tìm một số tự nhiên có hai chứ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng $\frac{1}{4}$ số đó. Nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số mới hơn số đã cho là 18.

(Đ/S: Số cần tìm là 24).

Bài A.06: Tìm một số tự nhiên có ba chữ số sao cho tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số đó giảm đi 99 đơn vị.

(Đ/S: Số cần tìm là 746).

Bài A.07: Tìm hai số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì nó tăng thêm 27 đơn vị.

(Đ/S: Số cần tìm là 47).

Bài A.08: Tìm một số có hai chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 và nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 và dư 6.

(Đ/S: Số cần tìm là 83).

Bài A.09: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 5 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó.

(Đ/S: Số cần tìm là $\frac{-5}{6}$).

Bài A.10: Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

Bài A.11: Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2, nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 630 đơn vị.

Bài A.12: Chữ số hàng chục của một số có hai chữ số lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được một số bằng $\frac{3}{8}$ số ban đầu. Tìm số ban đầu.

Bài A.13: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 4 đơn vị và tổng các bình phương của hai chữ số là 80.

Dạng 2: Toán chuyển động

1. Toán chuyển động có ba đại lượng:

$S = v.t$	Quãng đường $=$ Vận tốc $\times$ Thời gian	S: quãng đường
$v = \dfrac{S}{t}$	Vận tốc $=$ Quãng đường : Thời gian	v: vận tốc
$t = \dfrac{S}{v}$	Thời gian $=$ Quãng đường : Vận tốc.	t: thời gian

Các đơn vị của ba đại lượng phải phù hợp với nhau. Nếu quãng đường tính bằng ki-lô-mét, vận tốc tính bằng ki-lô-mét/giờ thì thời gian phải tính bằng giờ.

*+ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu: **Thời gian** hai xe đi được là **như nhau**, **Tổng quãng đường hai xe đã đi** đúng **bằng khoảng cách ban đầu** giữa hai xe.*

+ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB

2. Chuyển động với ngoại lực tác động: (lực cản, lực đẩy); (thường áp dụng với chuyển động cùng dòng nước với các vật như ca nô, tàu xuồng, thuyền**):**

Đối với chuyển động cùng dòng nước

- *Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng.*
- *Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước*
- *Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước*

Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Đối với chuyển động có ngoại lực tác động như lực gió ta giải tương tự như bài toán chuyển động cùng dòng nước.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Lúc 6 giờ một ô tô chạy từ A về B. Sau đó nửa giờ, một xe máy chạy từ B về A. Ô tô gặp xe máy lúc 8 giờ. Biết vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là $10\,\text{km/h}$ và khoảng cách $AB = 195\,\text{km}$. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc ô tô là $x(\text{km/h})(x>0)$.

Gọi vận tốc xe máy là $y(\text{km/h})(y>0)$.

Vì vận tốc ô tô hơn vận tốc xe máy là $10\,\text{km/h}$ nên ta có phương trình: $x-y=10$

Thời gian ô tô đã đi cho đến lúc gặp xe máy là: $8-6=2$ (giờ).

Thời gian xe máy đã đi cho đến lúc gặp ô tô là: $2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (giờ).

Quãng đường ô tô chạy trong 2 giờ là $2x(\text{km})$.

Quãng đường xe máy chạy trong $\frac{3}{2}$ giờ là $\frac{3y}{2}(\text{km})$.

Vì quãng đường AB dài $195\,\text{km}$ nên ta có phương trình $2x+\frac{3}{2}y=195$ hay $4x+3y=390$.

Do đó ta có hệ hai phương trình : $\begin{cases} x-y=10 \\ 4x+3y=390. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $x=60;\, y=50$ (*thỏa mãn điều kiện*).

Vậy vận tốc ô tô là 60 km/h, vận tốc xe máy là 50 km/h.

Bài 2: Một tàu thủy chạy xuôi dòng sông 66 km hết một thời gian bằng thời gian chạy ngược dòng 54 km. Nếu tàu chạy xuôi dòng 22 km và ngược dòng 9 km thì chỉ hết 1 giờ. Tính vận tốc riêng của tàu thủy và vận tốc dòng nước (biết vận tốc riêng của tàu không đổi).

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc riêng của tàu thủy là x (km/h).

Gọi vận tốc của dòng nước là y (km/h) $(x>y>0)$.

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x+y$ *(km/h)*.

Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x-y$ *(km/h)*.

Dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{66}{x+y} = \dfrac{54}{x-y} \\ \dfrac{22}{x+y} + \dfrac{9}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 3. \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc riêng của tàu thủy là 30 km/h.

Vận tốc của dòng nước là 3 km/h.

Bài 3: Hàng ngày, Nam đạp xe đi học với vận tốc không đổi trên quãng đường dài 10 km. Nam tính toán và thấy rằng đạp xe với vận tốc lớn nhất thì thời gian đi học sẽ rút ngắn 10 phút so với đạp xe với vận tốc hằng ngày. Tuy nhiên, thực tế sáng nay lại khác dự kiến. Nam chỉ đạp xe với vận tốc lớn nhất trên nửa đầu quãng đường (dài 5km), nửa quãng đường còn lại đường phố đông đúc nên Nam đã đạp xe với vận tốc hàng ngày. Vì vậy thời gian đạp xe đi học sáng nay của Nam là 35 phút. Hãy tính vận tốc đạp xe hàng ngày và vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam (lấy đơn vị vận tốc là km/h)

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc đạp xe hằng ngày của Nam là x (km/h, x > 0)

Vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam là y (km/h, y > x)

Thời gian đi hàng ngày của Nam từ nhà đến trường là $\frac{10}{x}$(h)

Thời gian đi của Nam từ nhà đến trường với vận tốc lớn nhất là $\frac{10}{y}$ (h)

Theo bài ra Nam tính toán và thấy rằng nếu đạp xe với vận tốc lớn nhất thì thời gian đi học sẽ rút ngắn 10 phút ($\frac{1}{6}(h)$) nên ta có pt: $\frac{10}{x} - \frac{10}{y} = \frac{1}{6}$

Thời gian đi học thực tế của Nam trong 5 km đầu là $\frac{5}{y}(h)$

Thời gian đi học thực tế của Nam trong 5 km cuối là $\frac{5}{x}(h)$

Theo bài ra vì thời gian đạp xe đi học sáng nay của Nam là 35 phút ($\frac{7}{12}(h)$)nên ta có phương trình $\frac{5}{x} + \frac{5}{y} = \frac{7}{12}$

Giải hệ pt: $\begin{cases} \dfrac{10}{x}-\dfrac{10}{y}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{60} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15\ (tm) \\ y=20\ (tm) \end{cases}$

Vậy vận tốc đạp xe hàng ngày của Nam là 15 (km/h)

Vận tốc đạp xe lớn nhất của Nam là 20 (km/h)

Bài 4: Một ca nô xuôi dòng một quãng sông dài $12km$ rồi ngược dòng quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút. Nếu cũng quãng đường sông ấy, ca nô xuôi dòng $4km$ rồi ngược dòng $8km$ thì hết 1 giờ 20 phút. Biết rằng vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước là không đổi, tính cận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước.

Hướng dẫn giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc riêng của dòng nước lần lượt là x, y (km/h; $0<y<x$).

Vận tốc ca nô xuôi dòng là: $x+y$ (km/h).

Vận tốc ca nô ngược dòng là: $x-y$ (km/h).

Đổi: 2 giờ 30 phút $=\dfrac{5}{2}$ giờ; 1 giờ 20 phút $=\dfrac{4}{3}$ giờ.

Vì ca nô xuôi dòng một quãng sông dài $12km$ rồi ngược dòng quãng sông đó mất 2 giờ 30 phút nên ta có phương trình: $\dfrac{12}{x+y}+\dfrac{12}{x-y}=\dfrac{5}{2}$ (1).

Vì ca nô xuôi dòng $4km$ rồi ngược dòng $8km$ thì hết 1 giờ 20 phút nên ta có phương trình: $\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=\dfrac{4}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{12}{x+y}+\dfrac{12}{x-y}=\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{8}{x-y}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Đặt $a=\dfrac{1}{x+y}; b=\dfrac{1}{x-y}$ $(a>0; b>0)$, ta có hệ $\begin{cases} 12a+12b=\dfrac{5}{2} \\ 4a+8b=\dfrac{4}{3} \end{cases} \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{12} \\ b=\dfrac{1}{8} \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là $10\,\text{km/h}$ và vận tốc riêng của dòng nước là $2\,\text{km/h}$

Bài tập tự luyện:

Bài B.01: Một ô tô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm 1giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ô tô tại A?

Bài B.02: Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4 km và một đoạn xuống dốc dài 5 km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 40 phút và đi từ B đến A hết 41 phút (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc, lúc xuống dốc?

Bài B.03: Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường.

Bài B.04: Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chayyj chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

Bài B.05: Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác cũng trong 7 giờ ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc nước chảy và vận tốc ca nô.

Bài B.06: Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường 640 km. Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5 km?

Bài B.07: Hai người khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố cách nhau 38 km. Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau 4 giờ. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai là 2 km?

Bài B.08: Một chiếc ca nô đi xuôi dòng theo một khúc sông trong 3 giờ và đi ngược dòng trong vòng 4 giờ, được 380 km. Một lần khác ca nô đi xuôi dòng trong 1 giờ và ngược dòng trong vòng 30 phút được 85 km. Hỏi tính vận tốc thật (lúc nước yên lặng) của ca nô và vận tốc của dòng nước (vận tốc thật của ca nô và vận tốc của dòng nước ở hai lần là như nhau).

Bài B.09: Một người đi xe máy từ A tới B. Cùng một lúc một người khác cũng đi xe máy từ B tới A với vận tốc bằng $\frac{4}{5}$ vận tốc của người thứ nhất. Sau 2 giờ hai người đó gặp nhau. Hỏi mỗi người đi cả quãng đường AB hết bao lâu?

Bài B.10: Một ca nô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 20 km/h sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A. Thời gian ca nô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian ca nô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5 km/h, vận tốc riêng của ca nô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

Bài B.11: Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,2 giờ (xe thứ nhất khởi hành từ A, xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

Bài B.12: Hai địa điểm A và B cách nhau 200 km. Cùng một lúc có một ô tô đi từ A và một xe máy đi từ B. Xe máy và ô tô gặp nhau tại C cách A một khoảng bằng 120 km. Nếu ô tô khởi hành sau xe máy 1 giờ thì sẽ gặp nhau tại D cách C một khoảng 24 km. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

Dạng 3: Toán về năng suất – Khối lượng công việc - %

Có ba đại lượng:

- *Khối lượng công việc. (KLCV)*
- *Phần việc làm (chảy) trong một đơn vị thời gian (năng suất) (NS)*
- *Thời gian (t)*

$KLCV = N.t$	Khối lượng công việc = Năng suất × Thời gian.	*KLCV*:
$NS = \dfrac{KLCV}{t}$	Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian.	*NS*: Năng suất
$t = \dfrac{KLCV}{NS}$	Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất.	*t*: thời gian

Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta xem toàn bộ công việc là 1.

- Nếu đội nào làm xong công việc trong x (ngày) thì trong 1 ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

- Nếu vòi nào chảy riêng một mình đầy bể trong x (giờ) thì trong 1 giờ vòi đó chảy được $\frac{1}{x}$ (bể).

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch ?.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y là số sản phẩm của tổ I, II theo kế hoạch .

ĐK: *x, y* nguyên dương và x < 600; y < 600.

Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm nên ta có phương trình: $x + y = 600 \quad (1)$

Số sản phẩm tăng của tổ I là: $\frac{18}{100}x$ (sp), Số sản phẩm tăng của tổ II là: $\frac{21}{100}y$ (sp).

Do số sản phẩm của hai tổ vượt mức 120(sp) nên ta có phương trình:

$\frac{18}{100}x + \frac{21}{100}y = 120 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 600 \\ \frac{18}{100}x + \frac{21}{100}y = 120 \end{cases}$

Giải hệ ta được x = 200 , y = 400 (*thỏa mãn điều kiện*)

Vậy số sản phẩm được giao theo kế hoạch của tổ I là 200, của tổ II là 400.

Bài 2: Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

Hướng dẫn giải

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là *x* (giờ), thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là *y* (giờ). (Điều kiện $x;\ y\ > 5$)

Trong 1 giờ: vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bể; vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bể

Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{5}$ bể.

Vì hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$ $\qquad(1)$

Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được $\frac{2}{3}$ bể nên ta có phương trình: $3.\frac{1}{x}+4.\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ $\qquad(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\\ \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{2}{3}\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $x=7,5$; $y = 15$ (*thỏa mãn điều kiện*)

Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 7,5 giờ, thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 15 giờ.

Bài 3: Hai công nhân cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi công nhân làm một mình thì trong bao lâu làm xong công việc.

Hướng dẫn giải

Gọi x (giờ), y(giờ) lần lượt là thời gian một mình công nhân I và một mình công nhân II làm xong công việc. ĐK: x, y > 16.

Trong 1 giờ: + Công nhân I làm được: $\frac{1}{x}$(công việc)

+ Công nhân II làm được: $\frac{1}{y}$(công việc)

+ Cả hai công nhân làm được: $\frac{1}{16}$(công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$ (1)

Trong 3 giờ công nhân I làm được: $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 6 giờ công nhân II làm được: $\frac{6}{y}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{16}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}$

$(2)-(1)$ ta được : $\frac{3}{y}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow y=3.16=48$ (tmđk)

Thay vào (1) ta được : $\frac{3}{x}+\frac{3}{48}=\frac{3}{16}\Leftrightarrow\frac{3}{x}=\frac{3}{16}-\frac{3}{48}=\frac{6}{48}\Leftrightarrow x=\frac{3.48}{6}=24$ (tmđk)

Vậy: + Một mình công nhân I làm xong công việc hết: 24 giờ

+ Một mình công nhân II làm xong công việc hết: 48 giờ

Bài 4: Theo kế hoạch hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm. Nhờ tăng năng suất lao động tổ 1 làm vượt mức 10% và tổ hai làm vượt mức 20% so với kế hoạch của mỗi tổ, nên cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ làm theo kế hoạch.

Hướng dẫn giải

Gọi số sản phẩm tổ 1 làm theo kế hoạch là x (SP, ĐK: $x\in\mathbb{N}^*, x<600$)

Gọi số sản phẩm tổ 2 làm theo kế hoạch là y (SP, ĐK: $y\in\mathbb{N}^*, y<600$)

Vì hai tổ sản xuất được giao làm 600 sản phẩm nên ta có phương trình:

$x+y=600$ (1)

Số sản phẩm vượt mức của tổ 1 là: $10\%.x$ (sảnphẩm)

Số sản phẩm vượt mức của tổ 2 là: $20\%\ y$ (sảnphẩm)

Vì tăng năng suất 2 tổ đã làm được 685 sảnphẩm, nên ta có phương trình:

$110\%\ x+120\%\ y=685$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hpt $\begin{cases} x+y=600 \\ 110\%\ x+120\%\ y=685 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=600 \\ 0,1y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=600 \\ y=250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=350 \\ y=250 \end{cases}$ (TMĐK)

Vậy số sản phẩm tổ 1 làm theo kế hoạch là 350 sản phẩm

Số sản phẩm tổ 2 làm theo kế hoạch là 250 sản phẩm.

Bài 5: Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

Hướng dẫn giải

Gọi x (h) là thời gian người thứ nhất làm 1 mình xong công việc (x > 6) . thì trong 1h người thứ nhất làm được 1/x (cv)

y (h) là thời gian người thứ hai làm 1 mình xong công việc (y > 6) trong 1h người thứ nhất làm được 1/y (cv)

Trong 3h20' người thứ nhất làm được $\frac{10}{3}.\frac{1}{x}$(cv),

Trong 10h người thứ hai làm được $10.\frac{1}{y}$(cv)

ta có phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{x}+10\cdot\frac{1}{y}=1 \end{cases}$ Đặt ẩn phụ ta có hpt: $\begin{cases} u+v=\frac{1}{6} \\ \frac{10}{3}u+10v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{1}{10} \\ v=\frac{1}{15} \end{cases}$ (thỏa)

Suy ra x = 10 ; y = 15. Kết luận.

Bài 6: Hai máy ủi cùng làm việc trong vòng 12 giờ thì san lấp được $\frac{1}{10}$ khu đất. Nếu máy ủi thứ nhất làm một mình trong 42 giờ rồi nghỉ và sau đó máy ủi thứ hai làm một mình trong 22 giờ thì cả hai máy ủi san lấp được 25% khu đất đó. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi máy ủi san lấp xong khu đất đã cho trong bao lâu ?

Hướng dẫn giải

Gọi x (giờ) và y (giờ) lần lượt là thời gian làm một mình của máy thứ nhất và máy thứ hai để san lấp toàn bộ khu đất ($x > 0$; $y > 0$)

Nếu làm 1 mình thì trong 1 giờ máy ủi thứ nhất san lấp được $\frac{1}{x}$ khu đất, và máy thứ 2 san lấp được $\frac{1}{y}$ khu đất.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{12}{x}+\frac{12}{y}=\frac{1}{10} \\ \frac{42}{x}+\frac{22}{y}=\frac{1}{4} \end{cases}$

Đặt $u=\frac{1}{x}$ và $v=\frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 12u+12v=\frac{1}{10} \\ 42u+22v=\frac{1}{4} \end{cases}$

Giải hệ phương trình tìm được $u=\frac{1}{300}$; $v=\frac{1}{200}$, Suy ra: $(x;y)=(300;200)$

Trả lời: Để san lấp toàn bộ khu đất thì: Máy thứ nhất làm một mình trong 300 giờ, máy thứ hai làm một mình trong 200 giờ .

Bài 7: Tháng đầu, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 10% vả tổ II vượt mức 12% so với tháng đầu, vì vậy, hai tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy ?

Hướng dẫn giải

Gọi số chi tiết máy tháng đầu của tổ 1 là x chi tiết (x nguyên dương, $x < 900$)

Gọi số chi tiết máy tháng đầu của tổ 2 là y chi tiết (y nguyên dương, $y < 900$)

Theo đề bài ta có hệ $\begin{cases} x+y=900 \\ 1,1x+1,12y=1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=400 \\ y=500 \end{cases}$ (thoả mãn)

Đáp số 400, 500.

Bài 8: Trong tháng thanh niên Đoàn trường phát động và giao chỉ tiêu mỗi chi đoàn thu gom 10kg giấy vụn làm kế hoạch nhỏ. Để nâng cao tinh thần thi đua bí thư chi đoàn 10A chia các đoàn viên trong lớp thành hai tổ thi đua thu gom giấy vụn. Cả hai tổ đều rất tích cực. Tổ 1 thu gom vượt chỉ tiêu 30%, tổ hai gom vượt chỉ tiêu 20% nên tổng số giấy chi đoàn 10A thu được là 12,5 kg. Hỏi mỗi tổ được bí thư chi đoàn giao chỉ tiêu thu gom bao nhiêu kg giấy vụn?

Hướng dẫn giải

Gọi số kg giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là x (kg) (Đk : 0 < x <10)

Số kg giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là y (kg) (Đk : 0 < x <10)

Theo đầu bài ta có hpt: $\begin{cases} x+y=10 \\ 1,3x+1,2y=12,5 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : (x; y) = (5;5)

Trả lời : số giấy vụn tổ 1 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg.

Số giấy vụn tổ 2 được bí thư chi đoàn giao là 5 kg.

Bài 9: Để chuẩn bị cho một chuyến đi đánh bắt cá ở Hoàng Sa, hai ngư dân đảo Lý Sơn cần chuyển một số lương thực, thực phẩm lên tàu. Nếu người thứ nhất chuyển xong một nửa số lương thực, thực phẩm; sau đó người thứ hai chuyển hết số còn lại lên tàu thì thời gian người thứ hai hoàn thành lâu hơn người thứ nhất là 3 giờ. Nếu cả hai cùng làm chung thì thời gian chuyển hết số lương thực, thực phẩm lên tàu là $\frac{20}{7}$ giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi người chuyển hết số lương thực, thực phẩm đó lên tàu trong thời gian bao lâu?

Hướng dẫn giải

Gọi x (giờ) là thời gian người thứ I một mình làm xong cả công việc.

và y (giờ) là thời gian người thứ II một mình làm xong cả công việc. (Với $x,\ y > \frac{20}{7}$)

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{20} \\ \frac{y}{2}-\frac{x}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{20} & (1) \\ y-x=6 & (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{7}{20}$

Giải phương trình được $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{30}{7}$. Chọn x = 4. (*thoả mãn điều kiện*)

Vậy thời gian một mình làm xong cả công việc của người thứ I là 4 giờ, của người thứ II là 10 giờ.

Bài 10: Một xe lửa cần vận chuyển một lượng hàng. Người lái xe tính rằng nếu xếp mỗi toa 15 tấn hàng thì còn thừa lại 5 tấn, còn nếu xếp mỗi toa 16 tấn thì có thể chở thêm 3 tấn nữa. Hỏi xe lửa có mấy toa và phải chở bao nhiêu tấn hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi x là số toa xe lửa và y là số tấn hàng phải chở.

Điều kiện: $x \in N^*$, $y > 0$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 15x = y - 5 \\ 16x = y + 3 \end{cases}$.

Giải hpt ta được: x = 8, y = 125 (thỏa mãn)

Vậy xe lửa có 8 toa và cần phải chở 125 tấn hàng.

Bài 11: Tháng giêng hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy; tháng hai do cải tiến kỹ thuật tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% so với tháng giêng, vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Hướng dẫn giải

Gọi x, y số chi tiết máy của tổ 1, tổ 2 sản xuất trong tháng giêng ($x, y \in N^*$),

ta có x + y = 900 (1) (vì tháng giêng 2 tổ sản xuất được 900 chi tiết). Do cải tiến kỹ thuật nên tháng hai tổ 1 sản xuất được: $x + 15\%x$, tổ 2 sản xuất được: $y + 10\%y$.

Cả hai tổ sản xuất được: $1,15x + 1,10y = 1010$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 1,15x + 1,1y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,1x + 1,1y = 990 \\ 1,15x + 1,1y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,05x = 20 \\ x + y = 900 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x = 400 và y = 500 (thoả mãn)

Vậy trong tháng giêng tổ 1 sản xuất được 400 chi tiết máy, tổ 2 sản xuất được 500 chi tiết máy.

Bài tập tự luyện:

Bài C.01: Hai bạn A và B cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Hỏi nếu A làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì B hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu? Biết rằng nếu làm một mình xong công việc thì B làm lâu hơn A là 9 ngày.

Bài C.02: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút bể đầy. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài C.03: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình mà đầy bể.

Bài C.04: Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình bao lâu xong công việc?

Bài C.05: Hai vòi nước cùng chảy chung vào một bể không có nước trong 12 giờ thì đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi hai chảy một mình trong 15 giờ thì được 75% thể tích của bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

Bài C.06: Hai công nhân làm chung thì hoàn thành một công việc trong 4 ngày. Người thứ nhất làm một nửa công việc, sau đó người thứ hai làm nốt công việc còn lại thì toàn bộ công việc sẽ được hoàn thành trong 9 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày?

Bài C.07: Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

Bài C.08: Hai xí nghiệp thoe kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Trên thực tế, xí nghiệp I vượt mức 12%, xí nghiệp II vượt mức 10% do đó cả hai xí nghiệp làm tổng cộng 400 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm.

Bài C.09. Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25%, tổ B giảm mức 18% nên trong tuần này, cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu.

Dạng 4: Toán có nội dung hình học

- Diện tích hình chữ nhật $S = x.y$ (x là chiều rộng; y là chiều dài)

- *Diện tích tam giác* $S=\frac{1}{2}x.y$ *(x là chiều cao, y là cạnh đáy tương ứng)*

- *Độ dài cạnh huyền:* $c^2=a^2+b^2$ *(c là độ dài cạnh huyền; a,b là độ dài các cạnh góc vuông)*

- *Số đường chéo của một đa giác* $\frac{n(n-3)}{2}$ *(n là số đỉnh)*

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2m thì diện tích tăng thêm 45m². Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Hướng dẫn giải

Gọi chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x(m); y(m). Điều kiện: $x>y>0$ (*)

Chu vi của mảnh vườn là: $2(x+y)=34$ (m).

Diện tích trước khi tăng: xy (m²).

Diện tích sau khi tăng: $(x+3)(y+2)$ (m²).

Theo bài ta có hệ: $\begin{cases}2(x+y)=34\\(x+3)(y+2)-xy=45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=34\\2x+3y=39\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\x=12\end{cases}$

$x=12; y=5$ (thỏa mãn (*)). Vậy chiều dài là 12m, chiều rộng là 5m.

Bài 2: Một hình chữ nhật ban đầu có cho vi bằng 2010 cm. Biết rằng nều tăng chiều dài của hình chữ nhật thêm 20 cm và tăng chiều rộng thêm 10 cm thì diện tích hình chữ nhật ban đầu tăng lên 13 300 cm². Tính chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ban đầu.

Hướng dẫn giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm), chiều rộng là y (cm) (điều kiện x, y > 0)

Chu vi hình chữ nhật ban đầu là 2010 cm. ta có phương trình:

$2(y+y)=2010\Leftrightarrow x+y=1005$ (1)

Khi tăng chiều dài 20 cm, tăng chiều rộng 10 cm thì kích thước hình chữ nhật mới là:

Chiều dài: $x+20$ (cm), chiều rộng: $y+10$ (cm)

Khi đó diện tích hình chữ nhật mới là: $(x+20)(y+10)=xy+13300$

$\Leftrightarrow 10x+20y=13100 \Leftrightarrow x+2y=1310$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} x+y=1005 \\ x+2t=1310 \end{cases}$

Trừ từng vế của hệ ta được: y = 305 (thoả mãn). Thay vào phương trình (1) ta được: $x=700$

Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là: 700 cm, chiều rộng là 305 cm.

Bài 3: Cho mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45 m. Nếu giảm chiều dài 2 lần tăng chiều rộng lên 3 lần thì chu vi không đổi. Tính diện tích mảnh đất

Hướng dẫn giải

Gọi chiều rộng, chiều dài của thửa ruộng tương ứng là x, y. Điều kiện x > 0, y > 0; đơn vị của x, y là mét.

Vì chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45 m nên $y-x=45$ (1).

Chiều dài giảm 2 lần, chiều rộng tăng 3 lần ta được hình chữ nhật có hai cạnh là $\frac{y}{2}$ và 3x.

Theo giả thiết chu vi không thay đổi nên $2(x+y)=2\left(3x+\frac{y}{2}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} y-x=45 \\ 2(x+y)=2(3x+\frac{y}{2}) \end{cases}$.

Giải hệ này ta có $\begin{cases} x=15\,(m) \\ y=60\,(m) \end{cases}$

Vậy diện tích của thửa ruộng là $S=xy=900$ (m^2).

Bài tập tự luyện:

Bài D.01. Một tam giác có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm^2 . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

Bài D.02. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tính diện tích của khu vườn ban đầu.

Bài D.03. Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng $\frac{7}{4}$ chiều rộng và có diện tích bằng 1792 m^2. Tính chu vi của khu vườn ấy.

Bài D.04 . Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 720 m^2, nếu tăng chiều dài thêm 6 m và giảm chiều rộng đi 4 m thì diện tích mảnh vương không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

Bài D.05. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo hình chữ nhật là 10m. Tính độ dài hai cạnh của mảnh đất hình chữ nhật.

Bài D.06. Một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm 2m và chiều rộng 3 m thì diện tích tăng 100 m^2. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng 2m thì diện tích giảm 68 m^2. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Dạng 5. Các dạng toán khác

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Hai giá sách có tất cả 500 cuốn sách. Nếu bớt ở giá thứ nhất 50 cuốn và thêm vào giá thứ hai 20 cuốn thì số sách ở cả hai giá sẽ bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi giá có bao nhiêu cuốn?

Hướng dẫn giải

Gọi số sách lúc đầu trong giá thứ nhất là x (cuốn).

Gọi số sách lúc đầu trong giá thứ hai là y (cuốn).

Điều kiện : x, y nguyên dương $(x > 50)$.

Số sách còn lại ở giá thứ nhất sau khi bớt đi 50 cuốn là $(x - 50)$ cuốn

Số sách còn lại ở giá thứ hai sau khi thêm 20 cuốn là (y + 20) cuốn

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=500 \\ x-50=y+20 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được : x = 285 và y = 215 (tmđk)

Vậy : Số sách lúc đầu trong giá thứ nhất là 285 cuốn

Số sách lúc đầu trong giá thứ hai là 215 cuốn

Bài 2: Anh Bình đến siêu thị để mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng. Tuy nhiên, thực tế khi trả tiền, nhờ siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của bàn ủi và quạt điện đã lần lượt giảm bớt 10% và 20% so với giá niêm yết. Do đó, anh Bình đã trả ít hơn 125 ngàn đồng khi mua hai sản phẩm trên. Hỏi số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết với giá bán thực tế của từng loại sản phẩm mà anh Bình đã mua là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi số tiền mua 1 cái bàn ủi với giá niêm yết là x (ngàn đồng) (0 < x < 850)

Số tiền mua 1 cái quạt điện với giá niêm yết là y (ngàn đồng) (0 < y < 850)

Tổng số tiền mua bàn ủi và quạt điện là 850 ngàn đồng nên ta có phương trình:

$x+y=850 \quad (1)$

Số tiền thực tế để mua 1 cái bàn ủi là: $\frac{90}{100}x=\frac{9}{10}x$

Số tiền thực tế để mua 1 cái quạt điện là: $\frac{80}{100}y=\frac{8}{10}y$

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{9x}{10}+\frac{8y}{10}=850-125 \Leftrightarrow \frac{9x}{10}+\frac{8y}{10}=725$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=850 \\ \frac{9}{10}x+\frac{8}{10}y=725 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=450 \\ y=400 \end{cases}$$

Số tiền thực tế mua 1 cái bàn ủi là: $\frac{9}{10}.450=405$ (ngàn đồng)

Số tiền thực tế mua 1 cái quạt điện là: $\frac{8}{10}.400 = 320$ (ngàn đồng)

Vậy số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yết và giá bán thực tế của 1 cái bàn ủi là:
$450 - 405 = 45$ (ngàn đồng)

Vậy số tiền chênh lệch giữa giá bán niêm yên và giá bán thực tế của 1 cái quạt điện là:
$400 - 320 = 80$ (ngàn đồng)

ĐS. 45 và 80 (ngàn đồng)

Bài 3: Số tiền mua 1 quả dừa và một quả thanh long là 25 nghìn đồng. Số tiền mua 5 quả dừa và 4 quả thanh long là 120 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi quả dừa và giá mỗi quả thanh long là bao nhiêu ? Biết rằng mỗi quả dừa có giá như nhau và mỗi quả thanh long có giá như nhau.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y (nghìn) lần lượt là giá của 1 quả dừa và 1 quả thanh long.

Điều kiện : 0 < x ; y < 25.

Theo bài ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 25 \\ 5x + 4y = 120 \end{cases}$

Giải ra ta được : x = 20, y = 5 (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy : Giá 1 quả dừa 20 nghìn.

Giá 1 quả thanh long 5 nghìn.

Bài 4: Có hai can đựng dầu, can thứ nhất đang chứa 38 lít và can thứ hai đang chứa 22 lít. Nếu rót từ can thứ nhất sang cho đầy can thứ hai thì lượng dầu trong can thứ nhất chỉ còn lại một nửa thể tích của nó. Nếu rót từ can thứ hai sang cho đầy can thứ nhất thì lượng dầu trong can thứ hai chỉ còn lại một phần ba thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi can.

Hướng dẫn giải

Gọi thể tích của can thứ nhất và can thứ hai lần lượt là x và y (lít) (x > 38, y > 22)

Rót từ can 1 sang cho đầy can 2, thì lượng rót là y – 22 (lít), nên can 1 còn
$38 - (y - 22) = 60 - y$ (lít), bằng 1 nửa thể tích can 1 do đó $x = 2(60 - y)$

⇔ x + 2y = 120 (1)

Rót từ can 2 sang cho đầy can 1, thì lượng rót là x – 38 (lít), nên can 2 còn $22-(x\ -\ 38)=\ 60-x$ (lít), bằng một phần ba thể tích can 2 do đó $y=3(60-x)$

$\Leftrightarrow$ 3x + y = 180 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=120\\3x+y=180\end{cases}$, giải hệ ta có x = 48; y = 36 (tm)

Vậy thể tích của can thứ nhất và can thứ hai lần lượt là 48 lít và 36 lít

Bài tập tự luyện:

Bài E.01. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứu hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

Bài E.02. Hai anh An và Bình góp vốn kinh doanh. Anh An góp 13 triệu đồn, anh Bình góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh được lãi 7 triệu đồng. Lãi được chia theo tỉ lệ góp vốn. Tính số tiền lãi mà mỗi anh được hưởng.

Bài E.03. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tê xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Mặc dù người đó mỗi giờ đã làm thêm một số sản phẩm so với dự kiến, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự kiến là 12 phút. Tính số sản phẩm dự kiến làm trong 1 giờ của người đó, biết mỗi gờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Bài E.04 . Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tât cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên một ha là bao nhiêu, biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

Bài E.05. Có hai phân xưởng, phân xưởng thứ I làm trong 20 ngày, phân xưởng thứ II làm trong 15 ngày được 1600 dụng cụ. Biết số dụng cụ phân xưởng thứ I làm trong 4 ngày bằng số dụng cụ phân xưởng I làm trong 5 ngày. Tính số dụng cụ mỗi phân xưởng đã làm.

Bài E.06 . Trong một kì thi hai trường A, B có tổng cộng 350 học sinh dự thi. Kết quả hai trường đó là 338 học sinh trúng tuyển. Tính ra thì trường A có 97% và trường B có 96% số học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi.

Bài E.07. Người ta trộn 4 kg chất lỏng loại I với 3 kg chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3. Biết khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là 200 kg/m^3. Tính khối lượng riêng của mỗi chất.

Bài E.08. Trong một buổi liên hoan văn nghệ, phòng họp chỉ có 320 chỗ ngồi, nhưng số người tới dự hôm đó là 420 người. Do đó phải đặt thêm 1 dãy ghế và thu xếp để mỗi dãy ghế thêm được 4 người ngồi nữa mới đủ. Hỏi lúc đầu trong phòng có bao nhiêu ghế.

Phần giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình với các bài tập phía trên giúp các em định hướng phương pháp giải. Tuy nhiên trong đề tuyển sinh vào 10, các em rất có thể gặp phải dạng bài toán trên nhưng phải giải theo phương pháp lập phương trình.

Các em nghiên cứu tiếp "**chuyên đề số 4: Giải bài toán bằng cách lập phương trình**" để thành thạo kiến thức, phương pháp giải dạng toán này nhé!

Chúc các em học sinh học tập và ôn luyện đạt kết quả tốt!

Chủ đề 4 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

D. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai gồm ba bước:

Bước 1. Lập phương trình của bài toán:

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và theo đại lượng đã biết.
- Lập phương trình bậc hai biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình bậc hai vừa tìm được

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không thỏa mãn, rồi kết luận.

- Đối với giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn cũng tương tự như cách giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc nhất một ẩn.

Tuy nhiên có những bài toán chúng ta có có kết hợp giữa giải hệ phương trình và phương trình bậc hai mà các em đã từng gặp ở chủ đề 3. Vì vậy việc lựa chọn ẩn số và cũng như giải toán có thể các em sẽ phân vân. Vì vậy hãy cùng nghiên cứu chủ đề 4: Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai (hệ phương trình đưa về giải theo phương trình bậc hai) từ đó hình thành kỹ năng giải dạng toán này nhé!

🗁. PHÂN DẠNG TOÁN

Dạng 1. Toán về quan hệ số

- ✓ *Số có hai, chữ số được ký hiệu là* $\overline{ab}$

  Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$; *(Đk:* $1 \le a \le 9$ *và* $0 \le b \le 9$, $a, b \in N$*)*
- ✓ *Số có ba, chữ số được ký hiệu là* $\overline{abc}$

  $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, *(Đk:* $1 \le a \le 9$ *và* $0 \le b, c \le 9$; $a, b, c \in N$*)*
- ✓ *Tổng hai số x; y là:* $x + y$
- ✓ *Tổng bình phương hai số x, y là:* $x^2 + y^2$
- ✓ *Bình phương của tổng hai số x, y là:* $(x+y)^2$
- ✓ *Tổng nghịch đảo hai số x, y là:* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của nó là 85.

Hướng dẫn giải

Gọi số bé là x ($x \in N$). Số tự nhiên kề sau là x + 1.

Vì tổng các bình phương của nó là 85 nên ta có phương trình: $x^2 + (x+1)^2 = 85$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 85$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 84 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-42) = 169 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$

Phương trình có hai nghiệm:

$x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6$ (thoả mãn điều kiện)

$x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7$ (loại)

Vậy hai số phải tìm là 6 và 7.

Bài 2: Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 5 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số mới là nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Hướng dẫn giải

Gọi tử số của phân số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần là $x+11$ (đk: $x \in Z; x \neq 0, x \neq -11$)

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11}$

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số

$\frac{x-7}{x+15}$ (Điều kiện : $x \neq -15$)

Theo bài ra ta có phương trình : $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$

Giải PT tìm $x = -5$ vậy phân số cần tìm là $\frac{-5}{6}$.

Bài tập tự luyện:

Bài A.01: Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng bằng 119.

Bài A.02: Tìm hai số biết rằng tổng chúng là 17 và tổng lập phương của chúng bằng 1241.

Bài A.03: Tích của hai số tự nhiên lien tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

Bài A.04: Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

Dạng 2: Toán chuyển động

1. Toán chuyển động có ba đại lượng:

$S = v.t$	Quãng đường $=$ Vận tốc $\times$ Thời gian	S: quãng đường
$v = \frac{S}{t}$	Vận tốc $=$ Quãng đường $:$ Thời gian	v: vận tốc
$t = \frac{S}{v}$	Thời gian $=$ Quãng đường : Vận tốc.	t: thời gian

Các đơn vị của ba đại lượng phải phù hợp với nhau. Nếu quãng đường tính bằng ki-lô-mét, vận tốc tính bằng ki-lô-mét/giờ thì thời gian phải tính bằng giờ.

+ Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu: ***Thời gian*** *hai xe đi được là* ***như nhau****,* ***Tổng quãng đường hai xe đã đi*** *đúng* ***bằng khoảng cách ban đầu*** *giữa hai xe.*

+ Nếu hai phương tiện chuyển động cùng chiều từ hai địa điểm khác nhau là A và B, xe từ A chuyển động nhanh hơn xe từ B thì khi xe từ A đuổi kịp xe từ B ta luôn có hiệu quãng đường đi được của xe từ A với quãng đường đi được của xe từ B bằng quãng đường AB

2. Chuyển động với ngoại lực tác động: (lực cản, lực đẩy); **(**thường áp dụng với chuyển động cùng dòng nước với các vật như ca nô, tàu xuồng, thuyền**):**

Đối với chuyển động cùng dòng nước

- *Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng.*
- *Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước*
- *Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng – vận tốc dòng nước*

Vận tốc của dòng nước là vận tốc của một vật trôi tự nhiên theo dòng nước (Vận tốc riêng của vật đó bằng 0)

Đối với chuyển động có ngoại lực tác động như lực gió ta giải tương tự như bài toán chuyển động cùng dòng nước.

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 36 km. Khi đi từ B trở về A, người đó tăng vận tốc thêm 3 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x km/h, $x>0$.

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là $\dfrac{36}{x}$ (giờ)

Vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là $x+3$ (km/h)

Thời gian của người đi xe đạp khi đi từ B đến A là $\dfrac{36}{x+3}$ (giờ)

Ta có phương trình: $\dfrac{36}{x}-\dfrac{36}{x+3}=\dfrac{36}{60}$

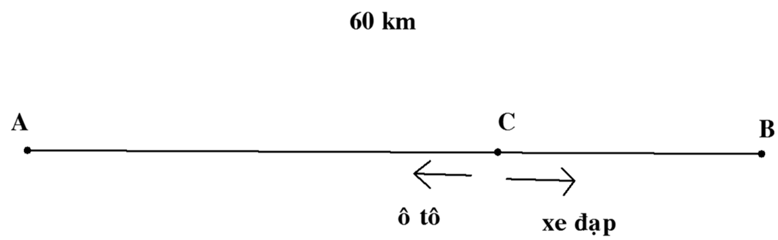
Giải phương trình này ra hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-15\left(loại\right) \end{array}\right.$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 12 km/h

Bài 2: Hai người đi xe đạp cùng xuất phát từ A để đến B với vận tốc bằng nhau. Đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường, người thứ nhất bị hỏng xe nên dừng lại 20 phút và đón ô tô quay về A, còn người thứ hai không dừng lại mà tiếp tục đi với vận tốc cũ để tới B.Biết rằng khoảng cách từ A đến B là 60 km, vận tốc ô tô hơn vận tốc xe đạp là 48 km/h và khi người thứ hai tới B thì người thứ nhất đã về A trước đó 40 phút. Tính vận tốc của xe đạp

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe đạp, thì $x+48$ (km/h) là vận tốc của ô tô. Điều kiện: $\mathbf{x>0}$



Hai người cùng đi xe đạp một đoạn đường $AC=\frac{2}{3}AB=40km$

Đoạn đường còn lại người thứ hai đi xe đạp để đến B là: $CB = AB - AC = 20\ km$

Thời gian người thứ nhất đi ô tô từ C đến A là: $\frac{40}{x+48}$ (giờ) và người thứ hai đi từ C đến B là: $\frac{20}{x}$ (giờ)

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{40}{x+48}+\frac{1}{3}=\frac{20}{x}-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{40}{x+48}+1=\frac{20}{x}$

Giải phương trình trên:

$40x+x(x+48)=20(x+48)$ hay $x^2+68x-960=0$

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $x_1=-80<0$ (loại) và $x_2=12$ (t/m)

Vậy vận tốc của xe đạp là: 12 km/h

Bài 3: Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 48 km. Một canô đi từ bến A đến bến B, rồi quay lại bến A. Thời gian cả đi và về là 5 giờ (không tính thời gian nghỉ). Tính vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Hướng dẫn giải

Gọi vận tốc canô trong nước yên lặng là x (km/h, $x > 4$)

Vận tốc canô khi nước xuôi dòng là $x+4$ và thời gian canô chạy khi nước xuôi dòng là $\dfrac{48}{x+4}$.

Vận tốc canô khi nước ngược dòng là $x-4$ và thời gian canô chạy khi nước ngược dòng là $\dfrac{48}{x-4}$.

Theo giả thiết ta có phương trình $\dfrac{48}{x+4}+\dfrac{48}{x-4}=5$

pt $\Rightarrow 48(x-4+x+4)=5(x^2-16) \Leftrightarrow 5x^2-96x-80=0$

Giải phương trình ta được $x=-0,8$ (loại), $x=20$ (thỏa mãn)

Vậy vận tốc canô trong nước yên lặng là 20 km/h

Bài 4: Một xe ô tô đi từ A đến B cách nhau 180km. Sau khi đi được 2 giờ, ô tô dừng lại để đổ xăng và nghỉ ngơi mất 15 phút rồi tiếp tục đi với vận tốc tăng thêm 20 km/h và đến B đúng giờ đã định. Tìm vận tốc ban đầu của xe ô tô.

Hướng dẫn giải

Gọi x (km/h) là vận tốc ban đầu của xe ô tô (điều kiện: x > 0)

Thì vận tốc lúc sau của ô tô là x + 20 (km/h)

Quãng đường đi được sau 2 giờ là: 2x (km)

Quãng đường đi sau khi nghỉ ngơi là: 180 – 2x (km)

Viết được phương trình: $\dfrac{180}{x}=2+\dfrac{1}{4}+\dfrac{180-2x}{x+20}$

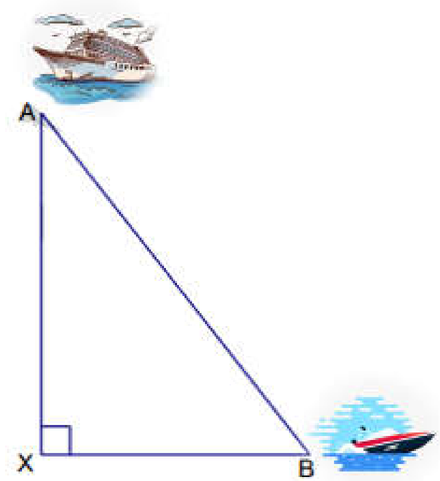
Hay $x^2+180x-14400 = 0$

Tìm được $x=60$ (thỏa mãn) ; $x = -240$ (loại)

Vậy vận tốc ban đầu của xe là 60km/h.

Bài 5: Trên một vùng biển được xem như bằng phẳng và không có chướng ngại vật. Vào lúc 6 giờ có một tàu cá đi thẳng qua tọa độ X theo hướng Từ Nam đến Bắc với vận tốc không đổi. Đến 7 giờ một tàu du lịch cũng đi thẳng qua tọa độ X theo hướng từ Đông sang Tây với vận tốc lớn hơn vận tốc tàu cá 12 km/h. Đến 8 giờ khoảng cách giữa hai tầu là 60 km. Tính vận tốc của mỗi tàu.

Hướng dẫn giải



Gọi vận tốc của tàu cá là: x (km/h), điều kiện: $x > 0$

Vận tốc của tàu du lịch là: $x + 12$ (km/h)

Đến 8 giờ thì hai tàu cách nhau khoảng AB = 60 (km)
lúc đó, thời gian tàu cá đã đi là: 8 – 6 = 2 (giờ)
thời gian tàu du lịch đã đi là: 8 – 7 = 1 (giờ)
Giả sử tàu cá đến điểm A, tàu du lịch đến điểm B
Tàu cá đã đi đoạn XA = 2x (km)
Tàu du lịch đã đi đoạn $XB = 1.(x+12) = x+12$ (km)

Vì XA $\perp$ XB (do hai phương Bắc – Nam và Đông –Tây vuông góc nhau)
Nên theo định lý Pytago, ta có: $XA^2 + XB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (2x)^2 + (x+12)^2 = 60^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 24x - 3456 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = -28,8 & (L) \\ x_2 = 24 & (TM) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của tàu cá và tàu du lịch lần lượt là: 24 km/h và 36 km/h

Bài 6: Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km ; cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nứa trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè nứa tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Hướng dẫn giải

Do ca nô xuất phát từ A cùng với bè nứa nên thời gian của ca nô bằng thời gian bè nứa:
$\frac{8}{4} = 2$ (h)

Gọi vận tốc của ca nô là x (km/h) (x>4)

Theo bài ta có: $\frac{24}{x+4}+\frac{24-8}{x-4}=2 \Leftrightarrow \frac{24}{x+4}+\frac{16}{x-4}=2$

$\Rightarrow 2x^2-40x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=20 \end{array}\right.$

$x=0$ loại, $x=20$ thỏa mãn

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20 km/h

Bài 7: Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ôtô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ôto đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB.

Hướng dẫn giải

Gọi x (h) là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB (đk: x>4)

Gọi y (h) là thời gian ôtô đi hết quãng đường AB (đk: y>4)

Trong 1 giờ xe máy đi được: $\frac{1}{x}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ xe ô tô đi được: $\frac{1}{y}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ hai xe đi được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$(1)

Mà thời gian xe ô tô về đến A sớm hơn xe máy về đến B là 6 giờ nên: x – y = 6 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \\ x-y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4} \\ y=x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-14x+24=0 \\ y=2-6 \end{cases}$ (điều kiện: $x \neq 6$)

Giải phương trình $x^2-14x+24=0$ được: x = 12 (thỏa mãn); hoặc x = 2 (loại)

Với x = 12, tìm được y = 6. Do đó, nghiệm của hệ là (12;6)

Vậy thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là 12 giờ, ôtô đi hết quãng đường AB là 6 giờ.

Bài 8: Cho quãng đường từ địa điểm A tới địa điểm B dài 90 km. Lúc 6 giờ một xe máy đi từ A để tới B. Lúc 6 giờ 30 phút cùng ngày, một ô tô cũng đi từ A để tới B với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h (Hai xe chạy trên cùng một con đường đã cho). Hai xe nói trên đều đến B cùng lúc. Tính vận tốc mỗi xe.

Hướng dẫn giải

Xe máy đi trước ô tô thời gian là : 6 giờ 30 phút - 6 giờ = 30 phút = $\frac{1}{2}h$.

Gọi vận tốc của xe máy là x (km/h) (x > 0)

Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h nên vận tốc của ô tô là x + 15 (km/h)

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x}\ (h)$

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là : $\frac{90}{x+15}\ (h)$

Do xe máy đi trước ô tô $\frac{1}{2}$ giờ và hai xe đều tới B cùng một lúc nên ta có phương trình:

$\frac{90}{x}-\frac{1}{2}=\frac{90}{x+15}$

$\Rightarrow 90.2.(x+15)-x(x+15)=90.2x$

$\Leftrightarrow 180x+2700-x^2-15x=180x$

$\Leftrightarrow x^2+15x-2700=0$b

Ta có : $\Delta=15^2-4.(-2700)=11025>0$; $\sqrt{\Delta}=\sqrt{11025}=105$

$x_1=\frac{-15-105}{2}=-60$ (không thỏa mãn điều kiện)

$x_2=\frac{-15+105}{2}=45$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy vận tốc của xe máy là 45 (km/h) , vận tốc của ô tô là 45 + 15 = 60 (km/h

Bài tập tự luyện:

Bài B.01: Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc $25km/h$. Lúc về người đó đi với vận tốc $30km/h$ nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

Bài B.02: Một ô tô phải đi qua quãng đường AB dài 60 km trong một thời gian nhất định. Xe đi nửa đầu quãng đường với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa sau kém hơn dự định 6 km/h. Biết ô tô đã đến đúng như dự định. Tính thời gian người đó dự định đi quãng đường AB.

Bài B.03: Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình 40 km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hang trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình 30 km/h. Tính quãng đường AB biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.

Bài B.04: Một ô tô chạy trên quãng đường AB. Lúc đi ô tô chạy với vận tốc 35 km/h, lúc về chạy với vận tốc 42 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi nửa giờ. Tính chiều dài quãng đường AB.

Toán về chuyển động ngược chiều.

Bài B.05: Khoảng cách giữa Hà Nội và Thái Bình là 110 km. Một người đi xe máy từ Hà Nội về Thái Bình với vận tốc 45 km/h. Một người đi xe máy từ Thái Bình lên Hà Nội với vận tốc 30 km/h. Hỏi sau mấy giờ họ gặp nhau?

Bài B.06: Hai người đi bộ khởi hành ở hai địa điểm cách nhau $4,18\ km$ đi ngược chiều nhau để gặp nhau. Người thứ nhất mỗi giờ đi được $5,7\,km$. Người thứ hai mỗi giờ đi được $6,3\,km$ nhưng xuất phát sau người thứ nhất 4 phút. Hỏi người thứ hai đi trong bao lâu thì gặp người thứ nhất.

Bài B.07: Hai người đi xe đạp cùng lúc, ngược chiều nhu từ hai địa điểm A và B cách nhau $42\,km$ và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng người đi từ A mỗi giờ đi nhanh hơn người đi từ B là 3 km.

Bài B.08. Hai người cùng đi xe đạp từ hai tỉnh A và B cách nhau 60 km đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng người đi từ A mỗi giờ đi nhanh hơn người đi từ B là 2 km.

Toán về chuyển động cùng chiều

Bài B.09: Hai xe máy khởi hành lúc 7 giờ sáng từ A để đến B. Xe máy thứ nhất chạy với vận tốc 30 km/h, xe máy thứ hai chạy với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy thứ nhất là 6 km/h. Trên đường đi xe thứ hai dừng lại nghỉ 40 phút rồi lại tiếp tục chạy với vận tốc cũ. Tính chiều dài quãng đường AB, biết cả hai xe đến B cùng lúc.

Bài B.10: Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp khởi hành từ A với vận tốc 10 km/h. Sau đó lúc 8 giờ 40 phút, một người khác đi xe máy từ A cũng đuổi theo với vận tốc 30 km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài B.11. Một đoàn tàu hỏa từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh, 1 giờ 48 phút sau, một đoàn tàu hỏa khác khởi hành từ Nam Định cũng đi Thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của đoàn tàu thứ nhất 5 km/h. Hai đoàn tàu gặp nhau (tại 1 ga nào đó) sau 4 giờ 48 phút kể từ khi đoàn tàu thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc của mỗi đoàn tàu, biết rằng Ga Nam Định nằm trên đường từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh và cách Ga Hà Nội 87 km.

Toán về chuyển động trên dòng nước

Bài B.12: Một ca nô tuần tra đi xuôi dòng từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Bài B.13: Quãng đường một ca nô đi xuôi dòng trong 4 giờ bằng $2,4$ lần quãng đường một ca nô đi ngược dòng trong 2 giờ. Hỏi vận tốc ca nô khi xuôi dòng. Biết rằng vận tốc ca nô khi nước yên tĩnh là 15 km/h.

Bài B.14. Lúc 7 giờ sáng, một chiếc ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B, cách nhau 36 km, rồi ngay lập tức quay trở về và đến bến A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc của ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc của dòng chảy là 6 km/h.

Bài B.15. Một chiếc ca nô khởi hành từ bến A đến bến B dài 120 km rồi từ B quay về A mất tổng cộng 11 giờ. Tính vận tốc của ca nô. Cho biết vận tốc của dòng là 2 km/h và vận tốc thật không đổi.

Dạng 3: Toán về năng suất – Khối lượng công việc - %

Có ba đại lượng:

- *Khối lượng công việc. (KLCV)*
- *Phần việc làm (chảy) trong một đơn vị thời gian (năng suất) (NS)*
- *Thời gian (t)*

$KLCV = N.\text{t}$ Khối lượng công việc = Năng suất × Thời gian. *KLCV*:

$NS = \dfrac{KLCV}{t}$ Năng suất = Khối lượng công việc : Thời gian. *NS*: Năng suất

$t = \dfrac{KLCV}{NS}$ Thời gian = Khối lượng công việc : Năng suất. *t*: thời gian

Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta xem toàn bộ công việc là 1.

- Nếu đội nào làm xong công việc trong x (ngày) thì trong 1 ngày đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ *(công việc).*

- Nếu vòi nào chảy riêng một mình đầy bể trong x (giờ) thì trong 1 giờ vòi đó chảy được $\frac{1}{x}$ (bể).

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 30 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì được bổ sung thêm 2 xe nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn hàng. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu chiếc xe?

Hướng dẫn giải

Gọi số xe trong đoàn xe lúc đầu là x (chiếc) $\left(x \in \mathbb{Z}^+\right)$.

Số xe trong đoàn xe khi bổ sung thêm là $x+2$ (chiếc).

Lúc đầu, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x}$ (tấn)

Lúc thêm 2 xe, lượng hàng mỗi xe phải chở là $\frac{30}{x+2}$ (tấn)

Do bổ sung thêm 2 xe thì mỗi xe chở ít hơn $0,5=\frac{1}{2}$ tấn hàng nên ta có phương trình :

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+2}=\frac{1}{2} \quad (x>0, x \text{ nguyên})$$

$$\Rightarrow 60(x+2)-60x=x(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-120=0$$

$\Delta'=1^2-1.(-120)=121>0$, $\sqrt{\Delta'}=\sqrt{121}=11$.

$x_1=-1+11=10$ (nhận) ; $x_2=-1-11=-12$ (loại).

Vậy lúc đầu đoàn xe có 10 chiếc.

Bài 2: Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện, nhờ cải tiến kĩ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm được bao nhiêu sản phẩm?

Hướng dẫn giải

Gọi số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là x (sản phẩm). (ĐK: x>10; x $\in$Z)

Do đó:

Số sản phẩm tổ dự định làm trong mỗi ngày là: $x-10$ (sản phẩm).

Thời gian tổ hoàn thành công việc trong thực tế là: $\frac{240}{x}$ (ngày)

Thời gian tổ hoàn thành công việc theo dự định là: $\frac{240}{x-10}$ ngày

Vì tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày, do đó ta có phương trình:

$$\frac{240}{x-10}-\frac{240}{x}=2 \Leftrightarrow \frac{120}{x-10}-\frac{120}{x}=1$$

$$\Rightarrow 120x-120x+1200=x^2-10x$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x-1200=0 \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40 \\ x=-30 \end{array}\right.$$

Với x = 40 thỏa mãn đk, x = -30 loại vì không thỏa mãn đk

Vậy số sản phẩm tổ đã thực hiện trong mỗi ngày là 40 sản phẩm.

Bài 3: Lớp 9A và lớp 9B cùng lao động tổng vệ sinh sân trường thì sau 6 giờ sẽ hoàn thành xong công việc. Nếu làm riêng thì lớp 9A mất nhiều thời gian hơn lớp 9B là 5 giờ mới hoàn thành xong công việc. Hỏi nếu làm riêng, mỗi lớp cần bao nhiêu thời gian để hoàn thành xong công việc ?

Hướng dẫn giải

Gọi thời gian lớp 9A, 9B hoàn thành xong công việc là $x; y$ (giờ) (ĐK : $x>5; y>0$)

1 giờ, lớp 9A làm được : $\frac{1}{x}$ (công việc)

1 giờ, lớp 9B làm được : $\frac{1}{y}$ (công việc)

1 giờ, cả 2 lớp làm được : $\frac{1}{6}$ (công việc).Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ (1)

Nếu làm riêng thì lớp 9A mất nhiều thời gian hơn lớp 9B là 5 giờ mới hoàn thành xong công việc. Ta có phương trình: $x-y=5$ (2)

Từ (1), (2) , ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ x-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ x=y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y+5}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\ x=y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{6y}{6y(y+5)}+\dfrac{6(y+5)}{6y(y+5)}=\dfrac{y(y+5)}{6y(y+5)}\\ x=y+5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6y+6y+30=y^2+5y\\ x=y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-7y-30=0\\ x=y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=10\ (tm)\\ y=-3\ (l)\end{array}\right.\\ x=y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10\ (tm)\\ x=15\ (tm)\end{cases}$$

Vậy, thời gian để lớp 9A hoàn thành 1 mình xong công việc là 15 giờ, lớp 9B hoàn thành 1 mình xong công việc là 10 giờ.

Bài 4: Một đoàn xe vận tải nhận chuyên chở 15 tấn hàng. Khi sắp khởi hành thì 1 xe phải điều đi làm công việc khác, nên mỗi xe còn lại phải chở nhiều hơn 0,5 tấn hàng so với dự định. Hỏi thực tế có bao nhiêu xe tham gia vận chuyển. (biết khối lượng hàng mỗi xe chở như nhau)

Hướng dẫn giải

Gọi số xe thực tế chở hàng là x xe (ĐK: x $\in$ N*)

Thì số xe dự định chở hàng là $x+1$ (xe).

Theo dự định mỗi xe phải chở số tấn là: $\dfrac{15}{x+1}$ (tấn)

Nhưng thực tế mỗi xe phải chở số tấn là : $\dfrac{15}{x}$ (tấn)

Theo bài ra ta có PT : $\dfrac{15}{x}-\dfrac{15}{x+1}=0,5$

Giải phương trình ta được : $x_1=-6$ (loại) ; $x_2=5$ (t/m)

Vậy thực tế có 5 xe tham gia vận chuyển hàng .

Bài 5: Hưởng ứng phong trào *"Vì biển đảo Trường Sa"* một đội tàu dự định chở 280 tấn hàng ra đảo. Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa dã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy đội tàu phải bổ sung thêm 1 tàu và mỗi tàu chở ít hơn dự định 2 tấn hàng. Hỏi khi dự định đội tàu có bao nhiêu chiếc tàu, biết các tàu chở số tấn hàng bằng nhau?

Hướng dẫn giải

Gọi x (chiếc) số tàu dự định của đội($x \in N^*,\ x < 140$)

Số tàu tham gia vận chuyển là $x+1$ (chiếc)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định: $\frac{280}{x}$ (tấn)

Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế: $\frac{286}{x+1}$ (tấn)

Theo đề bài ta có pt: $\frac{280}{x} - \frac{286}{x+1} = 2 \Rightarrow 280(x+1) - 286x = 2x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 140 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \ \ (\text{t/m}) \\ x = -14\ (l) \end{array}\right.$.

Vậy đội tàu lúc đầu là 10 chiếc.

Bài tập tự luyện:

Bài C.01: Một công nhân dự định làm 120 sản phẩm trong một thời gian dự định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác hợp lý hơn nên đã tang năng suất được thêm 3 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy người đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 1 giờ 36 phút. Hãy tính năng suất dự kiến.

Bài C.02: Một nhóm thợ đặt kế hoạch sản xuất 1200 sản phẩm. Trong 12 ngày đầu họ đã làm theo đúng kế hoạch đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 20 sản phẩm, nên hoàn thành sớm hơn kế hoạch 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm thợ cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

Bài C.03: Một tổ sản xuất dự định sản xuất 360 máy nông nghiệp. Khi làm do tổ chức quản lí tốt nên mỗi ngày họ đã làm được nhiều hơn dự định 1 máy, vì thế tổ đã hoàn thành trước thời hạn 4 ngày. Hỏi số máy dự định sản xuất trong mỗi ngày là bao nhiêu?

Bài C.04: Một tổ may áo theo kế hoạch mỗi ngày phải may 30 áo. Nhờ cải tiến kĩ thuật, tổ đã may được mỗi ngày 40 áo nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn may thêm được 20 chiếc áo nữa. Tính số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch.

Bài C.05: Một phân xưởng theo kế hoạch phải dệt 3000 tấm thảm. Trong 8 ngày đầu họ đã thực hiện theo đúng kế hoạch, những ngày còn lại họ đã dệt vượt mức mỗi ngày 10 tấm nên đã hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải dệt bao nhiêu tấm.

Bài C.06: Tháng đầu hai tổ sản xuất làm được 720 dụng cụ. Sang tháng 2 tổ 1 làm vượt mức 12%, tổ 2 vượt mức 15% nên cả hai tổ đã làm được 819 dụng cụ. Hỏi mỗi tháng mỗi tổ làm được bao nhiêu dụng cụ?

Toán về công việc làm chung, làm riêng.

Bài C.07: Hai tổ sản xuất cùng làm chung công việc thì hoàn thành trong 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi tổ phải hết bao nhiêu thời gian mới hoàn thành công việc, biết rằng khi làm riêng tổ 1 hoàn thành sớm hơn tổ 2 là 3 giờ.

Bài C.08: Hai công nhân nếu làm chung thì trong 12 giờ sẽ hoàn thành công việc. Họ làm chung trong 4 giờ thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác, người thứ hai làm nốt công việc trong 10 giờ. Hỏi người thứ hai làm một mình thì bao lâu hoàn thành công việc.

Bài C.09: Hai người cùng làm chung một công việc thì 15 giờ sẽ xong. Hai người làm được 8 giờ thì người thứ hất được điều đi làm công việc khác, người thứ hai tiếp tục làm việc trong 21 giờ nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc.

Bài C.10 Hai người cùng làm chung một công việc trong 24 giờ thì xong. Năng suất người thứ nhất bằng $\dfrac{3}{2}$ năng suất người thứ hai. Hỏi nếu mỗi người làm cả công việc thì hoàn thành sau bao lâu?

Dạng 4: Toán có nội dung hình học

- Diện tích hình chữ nhật $S = x.y$ *(x là chiều rộng; y là chiều dài)*

- Diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2}x.y$ *(x là chiều cao, y là cạnh đáy tương ứng)*

- Độ dài cạnh huyền: $c^2 = a^2 + b^2$ *(c là độ dài cạnh huyền; a,b là độ dài các cạnh góc vuông)*

- Số đường chéo của một đa giác $\dfrac{n(n-3)}{2}$ *(n là số đỉnh)*

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài lớn hơn chiều rộng 3m và diện tích bằng 270m². Tìm chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

Hướng dẫn giải

Gọi x (m) là chiều rộng của khu vườn. (ĐK: x > 0)

Chiều dài của khu vườn là: $x+3$ (m)

Do diện tích khu vườn là 270m² nên ta có phương trình:

$$x(x+3)=270 \Leftrightarrow x^2+3x-270=0$$

Giải phương trình ta được: $x_1=15$ (thỏa mãn điều kiện),

$x_2=-18$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy chiều rộng khu vườn là 15 m, chiều dài khu vườn là 18 m.

Bài 2: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính kích thước của mảnh đất, biết rằng diện tích mảnh đất là 150 m².

Hướng dẫn giải

Gọi chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là a (m), (điều kiện: a > 0)

suy ra chiều dài của mảnh đất là a + 5 (m)

Vì diện tích là 150 m² nên ta có phương trình: $a(a+5)=150$

Giải phương trình ta được $a=10;$ (thỏa mãn) và $a=-15$ (loại vì ko thỏa mãn đk)

Vậy chiều rộng là 10 m, chiều dài là 15 m.

Bài 3: Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 13 cm .Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 7 cm.Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó.

Hướng dẫn giải

Gọi x (cm) là độ dài cạnh góc vuông lớn (điều kiện : $7<x<13$)

$\Rightarrow$ độ dài cạnh góc vuông nhỏ là : $x-7$ (cm)

+ Vì độ dài cạnh huyền bằng 13 cm nên ta có phương trình: $x^2+(x-7)^2=13^2$

+Thực hiện biến đổi thu gọn ta được phương trình: $x^2-7x-60=0$

+ Giải phương trình ta được : $x_1=12$ (tmđk)

$x_2=-5$ (loại)

Trả lời : Vậy độ dài hai cạnh của tam giác vuông là : 12cm và 7cm.

Bài tập tự luyện:

Bài D.01. Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích $180\,m^2$. Tính chiều dài cạnh đáy thửa ruộng, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm $4\,m$ và chiều cao giảm đi $1\,m$ thì diện tích không đổi.

Bài D.02. Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tang chiều dài thêm $2\,m$ và chiều rộng $3\,m$ thì diện tích tăng $100\,m^2$. Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng $2\,m$ thì diện tích giảm $68\,m^2$. Tính diện tích thửa ruộng đó.

Bài D.03. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi $280\,m$. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn(thuộc đất của vườn) rộng $2\,m$, diện tích còn lại là $4256\,m^2$. Tính các kích thước của khu vườn.

Bài D.04..Một tam giác vuông có chu vi là $30m,$ cạnh huyền là $13m.$ Tính các cạnh góc vuông của tam giác.

Bài D.05. Một tam giác vuông có chu vi $30\,cm$, độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $7\,cm.$ Tính độ dài các cạnh của tam giác.

Dạng 5. Các dạng toán khác

Ví dụ minh họa:

Bài 1: Hưởng ứng phong trào thi đua "Xây dựng trường học thân thiện, học sinh tích cực", lớp 9A trường THCS Hoa Hồng dự định trồng 300 cây xanh. Đến ngày lao động, có 5 bạn được Liên Đội triệu tập tham gia chiến dịch an toàn giao thông nên mỗi bạn còn lại phải trồng thêm 2 cây mới đảm bảo kế hoạch đặt ra. Hỏi lớp 9A có bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số học sinh lớp 9A ($x > 5$, nguyên).

Số cây mỗi bạn dự định trồng là: $\dfrac{300}{x}$ (cây)

Sau khi 5 bạn tham gia chiến dịch ATGT thì lớp còn lại: $x-5$ (học sinh)

Do đó mỗi bạn còn lại phải trồng: $\dfrac{300}{x-5}$ (cây).

Theo đề ra ta có phương trình: $\dfrac{300}{x}+2=\dfrac{300}{x-5}$.

Rút gọn ta được: $x^2 - 5x - 750 = 0$.

Giải ra ta được: $x = 30$ (thỏa mãn), $x = -25$ (loại).

Vậy lớp 9A có 30 học sinh.

Bài 2: Một phòng họp có 90 người họp được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu ta bớt đi 5 dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm 3 người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người?

Hướng dẫn giải

Gọi số dãy ghế có lúc đầu là x (dãy) (ĐK: x nguyên dương và x > 5)

Thì mỗi dãy phải xếp $\frac{90}{x}$ người.

Sau khi bớt 5 dãy thì số dãy ghế là x - 5 dãy

Mỗi dãy phải xếp $\frac{90}{x-5}$ người.

Theo bài ra ta có pt : $\frac{90}{x-5} - \frac{90}{x} = 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 150 = 0$$

$x_1 = 15$ (thỏa mãn) ; $x_2 = -10$ (loại)

Vậy lúc đầu phòng họp có 15 dãy ghế và mỗi dãy có 6 người

Bài 3: Nhân ngày quốc tế thiếu nhi, 13 học sinh (nam và nữ) tham gia gói 80 phần quà cho các em thiếu nhi. Biết tổng số quà mà học sinh nam gói được bằng tổng số quà mà học sinh nữ gói được. Số quà mỗi bạn nam gói nhiều hơn số quà mà mỗi bạn nữ gói là 3 phần. Tính số học sinh nam và nữ.

Hướng dẫn giải

Gọi x (HS) là số HS nam. (ĐK: $0 < x < 13$, x nguyên.)

Số HS nữ là: $13 - x$ (HS)

Số phần quà mà mỗi HS Nam gói được: $\frac{40}{x}$ (phần)

Số phần quà mà mỗi HS nữ gói được: $\frac{40}{13-x}$ (phần)

Theo bài toán ta có phương trình:

$$\frac{40}{x}-\frac{40}{13-x}=3$$

$$\Rightarrow 40(13-x)-40x=3x(13-x)$$

$$\Leftrightarrow 520-40x-40x=39x-3x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-119x+520=0$$

Giải phương trình ta được x = 5 (thỏa mãn).; $x=\frac{104}{3}$ (không thỏa mãn)

Vậy số học sinh nam là 5, số học sinh nữ là 8.

Bài tập tự luyện:

Bài E.01. Một đoàn xe vận tải dự định điều một số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành đoàn xe được giao them 14 tấn hàng nữa, do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại trên và mỗi xe chở them $0,5$ tấn hàng. Tính số xe ban đầu biết số xe của đội không quá 12 xe.

Bài E.02. Hai lớp $8A$ và $8B$ có tổng cộng 94 học sinh biết rằng 25% số học sinh lớp 8A đạt loại giỏi, 20% số học sinh lớp 8B và tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21. Tính số học sinh mỗi lớp.

Bài E.03. Một tổ máy trộn bê tong phải sản xuất $450\,m^3$ bê tông cho đập thủy lợi mất một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất mỗi ngày $4,5\,m^3$ nên 4 ngày trước thời hạn quy định tổ đã sản xuất được 96% công việc. Hỏi thời gian quy định là bao nhiêu ngày?

Bài E.04. Tìm số học sinh của hai lớp 8A và 8B, biết rằng nếu chuyể 3 học sinh lớp 8A sang lớp 8B thì số học sinh hai lớp bằng nhau, nếu chuyển 5 học sinh từ lớp 8B sang lớp 8A thì số học sinh 8B bằng $\frac{11}{19}$ số học sinh lớp 8A.

Bài E.05. Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn $0,2\,g/cm^3$ để được một khối lượng riêng là $0,7\,g/cm^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

Chủ đề 5 HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

E. HÀM SỐ BẬC NHẤT

. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó $a; b$ là các số cho trước và $a \neq 0$.

Đặc biệt, khi $b = 0$ thì hàm có dạng $y = ax$.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b\ (a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$ và:

- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$; - Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

3. Đồ thị

Đồ thị hàm số $y = ax + b\ (a \neq 0)$ là một đường thẳng:

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b

- Song song với đường thẳng $y=ax$ nếu $b\neq 0$ và trùng với đường thẳng $y=ax$ nếu $b=0$.

Số a gọi là *hệ số góc*, số b gọi là *tung độ gốc* của đường thẳng.

4. Góc tạo bởi đồ thị hàm số bậc nhất và trục Ox

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y=ax+b\ (a\neq 0)$ và trục Ox.

Nếu $a>0$ thì $\tan\alpha=a$. *(góc tạo bởi là góc nhọn)*

Nếu $a<0$, ta đặt $\beta=180^o-\alpha$. Khi đó $\tan\beta=|a|$. *(góc tạo bởi là góc tù)*

Tính β rồi suy ra $\alpha=180^o-\beta$.

4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng, của đường thẳng và parabol

Cho các đường thẳng (d): $y=ax+b\ (a\neq 0)$ và (d') $y=a'x+b'\ (a'\neq 0)$.

Khi đó : (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a\neq a'$ $\qquad$ $(d)//(d') \Leftrightarrow a=a'$ và $b\neq b'$.

(d) trùng $(d') \Leftrightarrow a=a'$ và $b=b'$. $\qquad$ (d) vuông góc $(d') \Leftrightarrow a.a'=-1$.

🗁. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=f(x)=\ 2x+3$

a) Tính giá trị của hàm số khi $x\ =-2;-\ 0,5;0;3;\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) Tìm giá trị của x để hàm số có giá trị bằng $10;\ -7$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: Khi $x\ =-\ 2\ \Rightarrow f(-2)=2.(-2)+3=-4\ +3=-1$

$x=-\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3=-1+3=2$

$x=0\ \Rightarrow f(0)=2.0+3=3$

$x=3\ \Rightarrow f(3)=2.3+3=6+3=9$

$x\ =\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3=\sqrt{3}+3$

b) +) Để hàm số $y=f(x)=2x+3$ có giá trị bằng 10 $\Rightarrow$ $2x+3=10$

$\Rightarrow\ 2x=10-3\ \Rightarrow\ 2x=7\ \Rightarrow\ x=\dfrac{7}{2}$

Vậy khi $x=\dfrac{7}{2}$ thì hàm số có giá trị bằng 10.

+) Để hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ có giá trị bằng $-7 \Rightarrow 2x + 3 = -7$

$\Rightarrow 2x = -7 - 3 \Rightarrow 2x = -10 \Rightarrow x = -5$

Vậy khi $x = -5$ thì hàm số có giá trị bằng -7 .

Bài 2: Cho các hàm số: $y = 2mx + m + 1$ (1) và $y = (m-1)x + 3$ (2)

a) Xác định m để hàm số (1) đồng biến, còn hàm số (2) nghịch biến.

b) Xác định m để đồ thị của hàm số song song với nhau.

c) Chứng minh rằng đồ thị (d) của hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

Hướng dẫn giải

a) Hàm số (1) đồng biến và hàm số (2) nghịch biến:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

b) Đồ thị của hai hàm số song song với nhau:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = m - 1 \\ m + 1 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

c) Viết lại hàm số (1) dưới dạng $y = m(2x+1) + 1.$

Ta thấy với mọi giá trị của m, khi $x = -\dfrac{1}{2}$ thì $y = 1.$

Vậy đồ thị (d) của hàm số (1) luôn đi qua một điểm cố định là điểm $M\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right).$

Bài 3. Cho hàm số $y = (m-3)x + m + 2$ (*)

a) Tìm m để đồ thị hàm số (*) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

b) Tìm m để đồ thị hàm số (*) song song với đường thẳng $y = -2x + 1$

c) Tìm m để đồ thị hàm số (*) vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$

Hướng dẫn giải

a) Để đồ thị hàm số $y = (m-3)x + m + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng – 3 $\Rightarrow$ x = 0; y = - 3

Ta có: $-3 = (m - 3).0 + m + 2$

$\Leftrightarrow m + 2 = -3$

$\Leftrightarrow m = -5$

Vậy với $m = -5$ thì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3

b) Để đồ thị hàm số $y = (m-3)x + m + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3=-2 \\ m+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2+3 \\ m \neq 1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (t/m)}$$

Vậy với $m = 1$ thì đồ thị hàm số $y = (m-3)x + m + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x + 1$

c) Để đồ thị hàm số $y = (m-3)x + m + 2$ vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$

$$\Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow (m - 3).2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2m - 6 = -1 \Leftrightarrow 2m = 5 \Leftrightarrow \text{m} = \frac{5}{2}$$

Vậy với $\text{m} = \frac{5}{2}$ đồ thị hàm số $y = (m-3)x + m + 2$ vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$

Bài 4: Trong hệ trục toạ độ Oxy cho hàm số $y = 2x + m$ (*)

1) Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua:

a) $A(-1;3)$ b) $B\left(\sqrt{2};-5\sqrt{2}\right)$

2) Tìm m để đồ thị hàm số (*) cắt đồ thị hàm số $y = 3x - 2$ trong góc phần tư thứ **IV**

Hướng dẫn giải

1) a) Để đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua: $A(-1;3)$

$$\Leftrightarrow 3 = 2.(-1) + m$$

$$\Leftrightarrow 3 = -2 + m$$

$$\Leftrightarrow m = 5$$

Vậy với $m = 5$ thì đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua: $A(-1;3)$

b) Để đồ thị hàm số $y = 2x + m$ đi qua: $B\left(\sqrt{2};-5\sqrt{2}\right)$

$$\Leftrightarrow -5\sqrt{2} = 2.\sqrt{2} + m$$

$$\Leftrightarrow m = -7\sqrt{2}$$

Vậy với $m = -7\sqrt{2}$ thì đồ thị hàm $y = 2x + m$ đi qua: $B\left(\sqrt{2};-5\sqrt{2}\right)$

2) Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x + m$ với đồ thị hàm số $y = 3x - 2$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 2x + m \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 2x + m \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x = m + 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2 \\ y = 3.(m + 2) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2 \\ y = 3m + 6 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2 \\ y = 3m + 4 \end{cases}$$

Vậy toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x + m$ với đồ thị hàm số $y = 3x - 2$ là $(m + 2\,;\,3m + 4)$

Để đồ thị hàm số $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = 3x - 2$ trong góc phần tư thứ **IV** thì :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ 3m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{4}{3}$$

Vậy với $-2 < m < -\frac{4}{3}$ thì đồ thị hàm số $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = 3x - 2$ trong góc phần tư thứ **IV**

Bài 5: Cho hàm số $y = (2m+1)x + m + 4$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(-1;2)$.

b) Tìm m để (d) song song với đường thẳng (Δ) có phương trình: $y = 5x + 1$.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải

a) Ta có (d) đi qua điểm $A(-1;2) \Leftrightarrow 2 = (2m+1)(-1) + m + 4$.

$\Leftrightarrow 2 = -m + 3 \Leftrightarrow m = 1$.

b) Ta có $(d)//(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 = 5 \\ m + 4 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

c) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đường thẳng (d).

Khi đó ta có: $y_0 = (2m+1)x_0 + m + 4\ \forall m \Leftrightarrow (2x_0 + 1)m + x_0 - y_0 + 4 = 0\ \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{2} \\ y_0 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy khi m thay đổi đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định $M\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$

Bài 6: Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $d_1: y=-x+2$ cắt đường thẳng $d_2: y=2x+3-k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

Hướng dẫn giải

Ta thấy hai đường thẳng $d_1;d_2$ luôn cắt nhau (vì $-1\neq 2$)

+ Đường thẳng d_1 cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$

+ Đường thẳng d_2 cắt trục hoành tại điểm $B\left(\frac{k-3}{2};0\right)$

+ Để hai đường thẳng $d_1;d_2$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì $\frac{k-3}{2}=2\Leftrightarrow k=7$.

Bài 7: Cho hai đường thẳng $(d_1): y=2x+5$; $(d_2): y=-4x+1$ cắt nhau tại I. Tìm m để đường thẳng (d_3) : $y=(m+1)x+2m-1$ đi qua điểm I ?

Hướng dẫn giải

Tọa độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2}{3} \\ y=\frac{11}{3} \end{cases}$

Do (d_3) đi qua điểm I nên $\frac{11}{3}=\frac{-2}{3}(m+1)+2m-1\Leftrightarrow m=4$.

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 8: Xác định hàm số $y=ax+b$, biết đồ thị (d) của nó đi qua $A(2;1,5)$ và $B(8;-3)$. Khi đó hãy tính:

a) Vẽ đồ thị hàm số (d) vừa tìm được và tính góc α tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox;

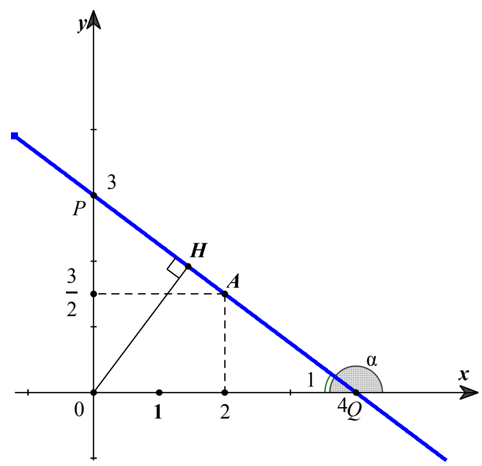
b) Khoảng cách h từ gốc toạ độ O đến đường thẳng (d).

Hướng dẫn giải

a) Vì (d) đi qua $A(2;1,5)$ và $B(8;-3)$ nên toạ độ của A và B phải thoả mãn phương trình $y=ax+b$.

Thay $x=2; y=1,5$ rồi lại thay $x=8; y=-3$ vào phương trình $y=ax+b$ ta được hệ

phương trình: $\begin{cases}1,5=2a+b\\ -3=8a+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}.\\ b=3\end{cases}$



Vậy hàm số cần xác định là $y=-\dfrac{3}{4}x+3.$

b) **Vẽ đồ thị hàm số**

Lập bảng

x	0	4
$y=-\dfrac{3}{4}x+3.$	3	0

Đồ thị hàm số (d) là đường thẳng đi qua điểm $P(0;3)$ và $Q(4;0)$

Xét ΔPOQ vuông tại O có: $\tan Q_1=\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{3}{4}\approx \tan 36^o52'$

Suy ra $\widehat{Q_1}\approx 36^o52'.$

Do đó $\alpha \approx 180-36^o52'=143^o8'.$

b) Vẽ $OH\perp PQ.$ Tam giác OPQ vuông tại O, có $OH\perp PQ.$ nên:

$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OP^2}+\dfrac{1}{OQ^2}$ hay $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{25}{144}.$ Do đó $h=\sqrt{\dfrac{144}{25}}=2,4.$

Bài 9: Vẽ đồ thị hàm số $y=3x+2$ (1)

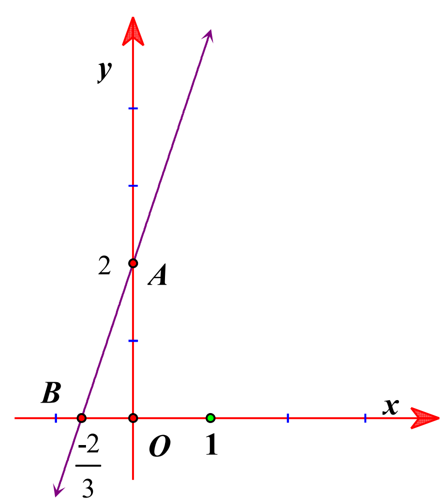
b) Gọi A, B là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục tung và trục hoành. Tính diện tích tam giác OAB .

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y=3x+2$

Lập bảng

x	0	$\dfrac{-2}{3}$
$y=3x+2$	2	0



Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua $A(0,2)$ và $B\left(\dfrac{-2}{3},0\right)$

b) Ta có OA = 2 và $OB=\left|\dfrac{-2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$. Tam giác OAB vuông tại O

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}\left|2.\dfrac{-2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$.

Bài 10: Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 7 và đi qua điểm $M(2;1)$.

Hướng dẫn giải

Gọi phương trình đường thẳng (d) là $y=ax+b$

Do đường thẳng (d) có hệ số góc bằng 7 và đi qua điểm $M(2;1)$ ta có $\begin{cases}a=7\\1=7.2+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\b=-13\end{cases}$.

Vậy $y=7x-13$.

. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài E01: Cho hàm số $y=(m+5)x+2m-10$

a) Với giá trị nào của m thì y là hàm số bậc nhất

b) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến.

c) Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm A(2; 3)

d) Tìm m để đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 9.

e) Tìm m để đồ thị đi qua điểm 10 trên trục hoành .

f) Tìm m để đồ thị hàm số song song với đồ thị hàm số $y=2x-1$

g) Chứng minh đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi m.

h) Tìm m để khoảng cách từ O tới đồ thị hàm số là lớn nhất

Bài E02: Cho đường thẳng $y=(2m-1)x+3-m$ (d). Xác định m để:

a) Đường thẳng (d) qua gốc toạ độ

b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $2y - x = 5$

c) Đường thẳng (d) tạo với Ox một góc nhọn

d) Đường thẳng (d) tạo với Ox một góc tù

e) Đường thẳng (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ 2

f) Đường thẳng (d)cắt đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ tại một điểm có hoành độ là 2

g) Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số $y = -x + 7$ tại một điểm có tung độ y = 4

h) Đường thẳng (d)đi qua giao điểm của hai đường thẳng $2x - 3y = -8$ và $2x - 3y = -8$

Bài E03: Cho hàm số $y = (2m - 3)x + m - 5$

a) Vẽ đồ thị hàm số với $m = 6$

b) Chứng minh họ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định khi m thay đổi

c) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với 2 trục toạ độ một tam giác vuông cân

d) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục hoành một góc 45^o

e) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục hoành một góc 135^o

f) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục hoành một góc 30^o , 60^o

g) Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 3x - 4$ tại một điểm trên 0y

h) Tìm m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -x - 3$ tại một điểm trên 0x

Bài E04: Cho hàm số $y = (m - 2)x + m + 3$

a) Tìm điều kiện của m để hàm số luôn luôn nghịch biến .

b) Tìm điều kiện của m để đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

c) Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x + 2$; $y = 2x - 1$ và $y = (m - 2)x + m + 3$ đồng quy.

d) Tìm m để đồ thị hàm số tạo với trục tung và trục hoành một tam giác có diện tích bằng 2

Bài E05: Cho (d_1) : $y = 4mx - (m + 5)$; (d_2) : $y = (3m^2 + 1)x + m^2 - 4$

a) Tìm m để đồ thị (d_1) đi qua M(2;3)

b) Chứng minh khi m thay đổi thì d_1 luôn đi qua một điểm A cố định, d_2 đi qua B cố định.

c) Tính khoảng cách AB.

d) Tìm m để d_1 song song với d_2

e) Tìm m để d_1 cắt d_2. Tìm giao điểm khi $m = 2$

✪ Hướng dẫn một số ý phụ

Dạng tìm điểm cố định của đồ thị hàm số

Phương pháp giải: Để tìm điểm cố định của đường thẳng $y = ax + b$ phụ thuộc tham số ta làm như sau:

- Gọi tọa độ điểm cố định là $M(x_o; y_o)$;
- Tìm điều kiện để đẳng thức $y_o = ax_0 + b$ luôn đúng khi tham số thay đổi.

Dạng toán ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Để tìm điều kiện để ba đường thẳng đồng quy ta xác định giao điểm của hai trong ba đường thẳng và tìm điều kiện để giao điểm này thuộc đường thứ 3.

Chủ đề 6 HÀM SỐ BẬC HAI VÀ CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC NHẤT

F. HÀM SỐ BẬC HAI

🗁. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$

* Hàm số này có tập xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

* Nếu a >0 thì hàm số nghịch biến khi x < 0 và đồng biến khi x > 0

* Nếu a < 0 thì hàm số nghịch biến khi x > 0 và đồng biến khi x < 0

* Nếu a > 0 thì y > 0 ∀x ≠ 0

+) y = 0 khi x = 0. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là y = 0.

* Nếu a < 0 thì y < 0 $\forall x \neq 0$

+) y = 0 khi x = 0. Giá trị lớn nhất của hàm số là y = 0.

- **Đồ thị của hàm số** $y = ax^2$ $(a \neq 0)$
  * Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một Parabol với đỉnh O.
  * Nếu **a > 0** thì đồ thị nằm phía trên trục hoành , O là điểm thấp nhất của đồ thị.
  * Nếu **a < 0** thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành , O là điểm cao nhất của đồ thị.

- ***Vị trí tương đối của của đường thẳng và parabol***

Cho đường thẳng (d): $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và parabol (P): $y = kx^2$ $(k \neq 0)$.

✓ **Tìm số giao điểm của (d) và (P)**

Khi đó : Xét phương trình $kx^2 = ax + b$ (1)

- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì (P) và (d) không giao nhau.

- Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

- Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau

- Hoành độ giao điểm (hoặc tiếp điểm) của (P) và (d) chính là nghiệm của phương trình $kx^2 = ax + b$.

✓ **Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P)**

- Giải phương trình (1) tìm ra các giá trị của x. Khi đó giá trị của x chính là hoành độ giao điểm của (d) và (P). Thay giá trị của x vào công thức hàm số của (d) (*hoặc (P)*) ta tìm ra tung độ giao điểm từ đó suy ra tọa độ giao điểm cần tìm.

Tọa độ giao điểm của (d) và (P) phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình (1)

✓ **Hàm số chứa tham số. Tìm điều kiện của tham số để tọa độ giao điểm thỏa mãn điều kiện cho trước.**

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) từ đó vận dụng biệt thức delta và hệ thức Vi-et để giải bài toán với điều kiện cho sẵn..

. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

1) Hãy tính $f\left(-2\right)$; $f\left(3\right)$; $f\left(\sqrt{5}\right)$; $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

2) Các điểm $A\left(2;6\right)$, $B\left(-\sqrt{2};3\right)$, $C\left(-4;-24\right)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{4}\right)$ có thuộc đồ thị hàm số không ?

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $f\left(-2\right)=\frac{3}{2}.\left(-2\right)^2=\frac{3}{2}.4=6$; $f\left(3\right)=\frac{3}{2}.3^2=\frac{3}{2}.9=\frac{27}{2}$;

$f\left(\sqrt{5}\right)=\frac{3}{2}.\left(\sqrt{5}\right)^2=\frac{3}{2}.5=\frac{15}{2}$; $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{3}{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{3}{2}.\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

2) +) Thay toạ độ điểm $A\left(2;6\right)$ vào công thức hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

Ta có $6=\frac{3}{2}.2^2 \Leftrightarrow 6=6$ (thỏa mãn)

Vậy điểm $A\left(2;6\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

+) Thay toạ độ điểm $C\left(-4;-24\right)$ vào công thức hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

Ta có $24=\frac{3}{2}.\left(-4\right)^2 \Leftrightarrow -24=24$ (vô lí)

Vậy điểm $C\left(-4;-24\right)$ không thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

+) Thay toạ độ điểm $B\left(-\sqrt{2};3\right)$ vào công thức xác định hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

Ta có $3=\frac{3}{2}.\left(-\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}.2$ (thỏa mãn)

Vậy điểm $B\left(-\sqrt{2};3\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

+) Thay toạ độ điểm $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{4}\right)$ vào công thức xác định hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

Ta có $\frac{3}{4}=\frac{3}{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy điểm $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{4}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2$

Bài 2: Trong hệ toạ độ Oxy, cho hàm số $y = f(x) = (m+2)x^2$ $(*)$

1) Tìm m để đồ thị hàm số $(*)$ đi qua các điểm :

a) $A(-1;3)$ b) $B(\sqrt{2};-1)$

2) Thay m = 0. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $(*)$ với đồ thị hàm số $y = x+1$

Hướng dẫn giải

1) a) Để đồ thị hàm hàm số $y = f(x) = (m+2)x^2$ $(*)$ đi qua điểm $A(-1;3)$

Ta có: $3 = (m+2).(-1)^2 \Leftrightarrow 3 = m+2 \Leftrightarrow m = 1$

Vậy với m = 1 thì đồ thị hàm số $(*)$ đi qua điểm $A(-1;3)$

b) Để đồ thị hàm số $y = f(x) = (m+2)x^2$ $(*)$ đi qua điểm $B(\sqrt{2};-1)$

Ta có: $-1 = (m+2).(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow -1 = (m+2).2 \Leftrightarrow 2m+4 = -1 \Leftrightarrow 2m = -5 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$

Vậy với $m = -\frac{5}{2}$ thì đồ thị hàm số $(*)$ đi qua điểm $B(\sqrt{2};-1)$

2) +) Thay m = 0 vào công thức hàm số $y = f(x) = (m+2)x^2$ $(*)$ ta có: $y = f(x) = 2x^2$

- Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x^2$ với đồ thị hàm số $y = x+1$ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ 2x^2 = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 & (1) \\ 2x^2 - x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

- Giải phương trình (2) $2x^2 - x - 1 = 0$

Ta có: a + b + c = 2 + (-1) + (-1) = 0 nên phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$ (hoặc giáo viên cho HS phân tích vế trái thành dạng tích và giải phương trình tích)

+) Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2.1^2 = 2 \Rightarrow M(1;2)$

+) Với $x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = 2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2.\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow N\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Vậy với m = 0 thì đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đồ thị hàm số $y = x+1$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $M(1;2)$ và $N\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 3: a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ (P) và đường thẳng $y = -x+2$ (d) trên cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy.

b) Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

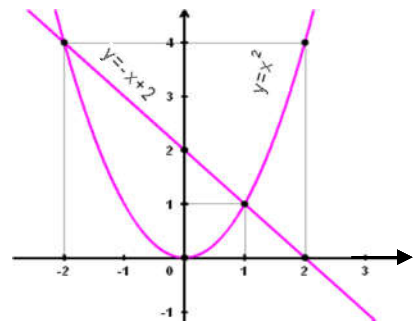
Hướng dẫn giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2$ (P)

Lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Đồ thị hàm số $y=x^2$ (P) là một Parabol có bề lõm quay xuống phía dưới và đi qua các điểm có toạ độ $O(0;0)$; $A(1;1)$; $A'(-1;1)$; $B(2;4)$; $B'(-2;4)$; $C(3;9)$;$C'(-3;9)$



+) Đường thẳng $y=-x+2$ (d)

Cho x = 0 $\Rightarrow$ y = 2 $\Rightarrow$ $D(0;2)\in Oy$

y = 0 $\Rightarrow$ x = 2 $\Rightarrow$ $E(2;0)\in Ox$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=2x+2$ (d)

đi qua 2 điểm D (0; 2) và E (2; 0)

b) Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2$ (P) và đường thẳng $y=-x+2$ (d) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x^2=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 & (1) \\ x^2+x-2=0 & (2) \end{cases}$

- Giải phương trình: $x^2+x-2=0$ (2)

Ta có a + b + c = 1 + 1 + (- 2) = 0 nên phương trình (2) có hai nghiệm $x_1=1$; $x_2=-2$

(hoặc giáo viên cho HS phân tích vế trái thành dạng tích và giải phương trình tích)

+) Với $x_1=1 \Rightarrow y_1=1^2=1 \Rightarrow M(1;\ 1)$

+) Với $x_2=-2 \Rightarrow y_2=(-2)^2=4 \Rightarrow N(-\ 2;4)$

- Vậy đồ thị hàm số $y=x^2$ (P) và đường thẳng $y=-x+2$ (d) cắt nhau tại 2 điểm $M(1;\ 1)$ và $N(-\ 2;4)$.

Sự tương giao giữa đường thẳng và đồ thị hàm số bậc hai.

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ , cho parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

a) Vẽ đồ thị của (P)

b) Gọi $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ lần lượt là các giao điểm của $P)$ với (d). Tính giá trị biểu thức $T=\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$.

Hướng dẫn giải

a) HS tự vẽ.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $P)$ và (d): $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2;2) \\ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{8} \Rightarrow B\left(\frac{-3}{2};\frac{9}{8}\right) \end{array}\right.$. Vậy $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{2 + \left(\frac{-3}{2}\right)}{2 + \frac{9}{8}} = \frac{4}{25}$

Bài 5: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (2m-1)x - m + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng d luôn cắt $P)$ tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m để đường thẳng d luôn cắt $P)$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$ thỏa $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = (2m-1)x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (2m-1)x + m - 2 = 0(*)$

Ta có $\Delta = (2m-1)^2 - 4.1\cdot(m-2) = 4m^2 - 8m + 9 = 4(m-1)^2 + 5 \ge 5 > 0$

Vậy Parabol luông cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt.

b) Vì là nghiệm của phương trình nên theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$.

Mặt khác $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$.

Ta có $x_1y_1 + x_2y_2 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m - 1 = 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ 4m^2 - 7m + 7 = 0 \ (vn) \end{array}\right.$

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Bài 6: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2ax - 4a$ (với a là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và $P)$ khi $a = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt $P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ (d) và $P)$ là $x^2+2ax+4a=0$

Khi $a=-\frac{1}{2}$ thì phương trình trở thành $x^2-x-2=0$

Có $a-b+c=0$ nên phương trình có 2 nghiệm là $x=-1$; $x=2$.

b) Phương trình hoành độ (d) và $P)$ là $x^2+2ax+4a=0$ (*)

để đường thẳng (d) cắt $P)$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=a(a-4)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>4 \end{array}\right.$

Với $\left[\begin{array}{l} a<0 \\ a>4 \end{array}\right.$ theo Viét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2a \\ x_1x_2=4a \end{cases}$

Vì $|x_1|+|x_2|=3 \Leftrightarrow \left(|x_1|+|x_2|\right)^2=9 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=9 \Rightarrow 4a^2-8a+|8a|=9$

Với $a<0$: $4a^2-8a+|8a|=9 \Leftrightarrow 4a^2-16a-9=0 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$

Với $a>4$: $4a^2-8a+|8a|=9 \Leftrightarrow 4a^2=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{3}{2} \notin dk \\ a=\frac{-3}{2} \notin dk \end{array}\right.$

Vậy $a=-\frac{1}{2}$.

Bài 7: Cho hai hàm số $y=x^2$ và $y=mx+4$, với m là tham số.

a) Khi $m=3$, tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị m, đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1\left(x_1;y_1\right)$ và $A_2\left(x_2;y_2\right)$ Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $\left(y_1\right)^2+\left(y_2\right)^2=7^2$.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2$ và $y=mx+4$ là $x^2-mx-4=0$ (1)

Thay $m=3$ vào phương trình (1) ta có: $x^2-3x-4=0$

Ta có: $a-b+c=1-(-3)+(-4)=0$

Vậy phương trình $x^2-3x-4=0$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Với $x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow A(-1;1)$

Với $x=4\Rightarrow y=16\Rightarrow B(4;16)$

Vậy với $m=3$ thì hai đồ thị hàm số giao nhau tại 2 điểm $A(-1;1)$ và $B(4;16)$.

b) Ta có số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là số nghiệm của phương trình (1)

Phương trình (1) có: $\Delta=m^2-4\cdot(-4)=m^2+16>0\forall m\in\mathbb{R}$

Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Vậy đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1;y_1)$ và $A_2(x_2;y_2)$ với mọi m

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1\cdot x_2=-4\end{cases}$

Ta lại có: $\begin{cases}y_1=x_1^2\\y_2=x_2^2\end{cases}$

Theo đề, ta có: $y_1^2+y_2^2=7^2$

$\Rightarrow\left(x_1^2\right)^2+\left(x_2^2\right)^2=49\Leftrightarrow\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2=49\Leftrightarrow\left[m^2-2.(-4)\right]^2-2\left(-4\right)^2=49$

$\Leftrightarrow(m^2+8)^2=81\Leftrightarrow m^2+8=9\Leftrightarrow m=\pm1$ (trường hợp $m^2+8=-9$ vô nghiệm vì $m^2\ge0$)

Vậy với $m=1;m=-1$ thì $\left(y_1\right)^2+\left(y_2\right)^2=7^2$.

Bài 8: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Cho đường thẳng $y=mx+n$ (Δ). Tìm m,n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y=-2x+5$ (d) và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P).

Hướng dẫn giải

a) HS tự vẽ đồ thị hàm số.

b) Δ song song với $y=-2x+5$ suy ra $\begin{cases}m=-2\\n\ne5\end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (P): $-\dfrac{1}{2}x^2=-2x+n$

$\Leftrightarrow x^2-4x+2n=0$ (*)

Để Δ và (P) có một điểm chung duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất thì $\Delta'=0\Leftrightarrow4-2n=0\Leftrightarrow n=2$ (thỏa mãn)

Vậy $m=-2; n=2$.

Bài 9: Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=x+2$ và parabol (P) có phương trình $y=x^2$

a) Vẽ đường thẳng (d) và parabol (P) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

b) Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm A và B (với A có hoành độ âm, B có hoành độ dương). Bằng tính toán hãy tìm tọa độ các điểm A và B.

Hướng dẫn giải

a) HS tự vẽ đồ thị hàm số (d) và (P)

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=-1$

Với $x=2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow B(2;4)$ (vì B có hoành độ dương)

Với $x=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(-1;1)$ (vì A có hoành độ âm)

Vậy $A(-1;1)$; $B(2;4)$

Bài 10: Cho hai hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ và đồ thị hàm số (P) và $y=x+4$ có đồ thị (d)

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Gọi A,B là các giao điểm của hai đồ thị (P) và (d) Biết rằng đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét, tìm tất cả các điểm M trên tia Ox sao cho diện tích tam giác MAB bằng $30\,\text{cm}^2$.

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đồ thị: HS tự vẽ

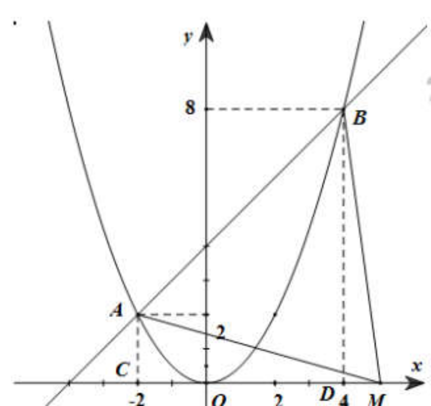
b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$\frac{1}{2}x^2=x+4 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$\Delta'=(-1)^2-(-8)=9>0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x=4; x=-2$

Với $x=-2$ ta có $y=2 \Rightarrow A(-2;2)$



Với $x=4$ ta có $y=8 \Rightarrow B(4;8)$

Gọi $M(m;0)$ thuộc tia $Ox(m>0)$ Gọi $C(-2;0), D(4;0)$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: M thuộc đoạn OD: Ta có $S_{AMB}=S_{ABDC}-S_{ACM}-S_{BDM}$

Có $ABDC$ là hình thang, $AC=2cm, BD=8cm, CD=6cm$

$\Rightarrow S_{ABDC}=\dfrac{(2+8)\cdot 6}{2}=30\left(\text{cm}^2\right)$

Suy ra $S_{AMB}<30$ cm^2 (loại)

Trường hợp 2: M thuộc tia Dx $(M \neq D) \Rightarrow m>4$

Ta có : $S_{AMB}=S_{ABDC}-S_{ACM}+S_{BDM}$

Có $S_{ABCD}=30cm^2, MC=m+2(cm), MD=m-4(cm)$

Suy ra

$S_{ACM}=\dfrac{1}{2}AC.CM=\dfrac{1}{2}.2.(m+2)=m+2(cm^2)$

$S_{BDM}=\dfrac{1}{2}BD.DM=\dfrac{1}{2}.8.(\text{m}-4)=4(\text{m}-4)(cm^2)$

$\Rightarrow \text{S}_{AMB}=30cm^2 \Leftrightarrow S_{ACM}=S_{BDM} \Leftrightarrow m+2=4(m-4) \Leftrightarrow m=6$

m = 6 (thỏa mãn). Vậy $M(6;0)$ là điểm cần tìm.

Bài 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=3x+m-1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi *m*.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=1$

Hướng dẫn giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$x^2=3x+m^2-1 \Leftrightarrow x^2-3x-m^2+1=0(*)$

$\Delta=9+m^2-1=8+m^2>0 \forall m$

Suy ra phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Ta có: $(x_1+1)(x_2+1)=1 \Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_1)=0$ (**)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho (*): $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=-m^2+1 \end{cases}$

(**) $\Leftrightarrow -m^2+1+3=0 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Vậy $m=\pm 2$.

Bài 12: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y=-x^2$

a) Vẽ parabol (P)

b) Xác định toạ độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y=-x-2$ và (P) Tìm toạ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M.

Hướng dẫn giải

a) HS tự vẽ đồ thị hàm số.

b) Viết phương trình đường trung trực (d') của AB, tìm giao điểm của (d') và (P) ta tìm được giao điểm M.

Hoành độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y=-x-2$ và (P) là nghiệm của phương trình: $-x^2=-x-2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=2$

+ Với $x=-1$, thay vào (P) ta có: $y=-(-1)^2=-1$, ta có: $A(-1;-1)$

+ Với $x=2$, thay vào (P) ta có: $y=-(2)^2=-4$, ta có: $B(2;-4)$

Suy ra trung điểm của AB là: $I\left(\frac{1}{2};\frac{-5}{2}\right)$

Đường thẳng (d') vuông góc với (d) có dạng: $y=x+b$

Vì (d') đi qua I nên: $\frac{-5}{2}=\frac{1}{2}+b \Leftrightarrow b=-3$

Vậy $(d'): y=x-3$.

Phương trình hoành độ của (d') và (P) là: $x^2+x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

+ Với $x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\frac{-7-\sqrt{13}}{2}$

+ Với $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-7+\sqrt{13}}{2}$

Vậy có hai điểm M cần tìm là: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2};\dfrac{-7-\sqrt{13}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2};\dfrac{-7+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Bài 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=x+m-1$ và parabol $(P): y=x^2$

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $A(0;1)$

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 x_2 thỏa mãn: $4\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)-x_1x_2+3=0$.

Hướng dẫn giải

a) Thay $x=0; y=1$ vào phương trình đường thẳng (d) ta được: $m=2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2-x-(m-1)=0(*)$

Để (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta=4m-3>0\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{4}$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=-(m-1)\end{cases}$

Theo đề bài: $4\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)-x_1x_2+3=0\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{x_1+x_2}{x_1.x_2}\right)-x_1x_2+3=0\Leftrightarrow \dfrac{4}{-m+1}+m+2=0$

$\Leftrightarrow m^2+m-6=0$ (Điều kiện: $m\neq 1$)

$\Leftrightarrow m=-3$ (loại) hoặc $m=2$ (thỏa mãn).

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

Bài 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $(d): y=3mx-3$ (với m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;3)$

b) Xác định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho tổng 2 tung độ của hai giao điểm đó bằng -10

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng (d) đi qua $A(1;3)$ nên $3=3m\cdot 1-3\Leftrightarrow m=2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là:

$-x^2 = 3mx - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3mx - 3 = 0 (*)$

Ta có $\Delta = 9m^2 + 12 > 0$, với mọi m nên phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

Do đó, đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -3m; x_1 \cdot x_2 = -3$

Theo bài ra ta có:

$y_1 + y_2 = -10 \Leftrightarrow -x_1^2 - x_2^2 = -10$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$

$\Leftrightarrow 9m^2 + 6 = 10$

$\Leftrightarrow m = \pm\dfrac{2}{3}$

Vậy $m = \pm\dfrac{2}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 15: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình:

$y = 2(m+1)x - 3m + 2$

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) với $m = 3$.

b) Chứng minh (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B với mọi m.

c) Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của A và B. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Hướng dẫn giải

a) Thay $m = 3$ ta được $(d): y = 8x - 7$

Phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) khi $m = 3$ là

$x^2 = 8x - 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$

Giải phương trình ta được $x_1 = 1; x_2 = 7$. Với $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$; $x_2 = 7 \Rightarrow y_2 = 49$

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;1); (7;49)$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$x^2 - 2(m+1)x + 3m - 2 = 0$ (1)

$$\Delta' = m^2 + 2m + 1 - 3m + 2 = m^2 - m + 3 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \forall m$$

Nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ suy ra (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B với mọi m.

c) Ta có: $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình (1) vì $\Delta' > 0\ \forall m$. Theo Vi-et ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ x_1x_2 = 3m-2 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 20 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow (2m+2)^2 - 2(3m-2) = 20$

$\Leftrightarrow 2m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(2m+3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$

Vậy $m = 2$ hoặc $m = \dfrac{-3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 16: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số).

a) Với $m = -5$, tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d)

b) Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.

c) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m

Hướng dẫn giải

a) Với $m = -5$ (d) có phương trình $y = -4x + 12$

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$x^2 = -4x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$+x = -6 \Rightarrow y = 36$

$+x = 2 \Rightarrow y = 4$

Vậy với $m = -5$ thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $(-6;36),(2;4)$

b) Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm phương trình:

$x^2 = 2(m+3)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x - 2m - 2 = 0(1)$

$\Delta' = (m+3)^2 - (2m-2) = m^2 + 4m + 11 = (m+2)^2 + 6 > 0 \forall m$

Do đó (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m suy ra (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), áp dụng định lý Viet ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) \\ x_1x_2 = 2m-2 \end{cases}$

Hai giao điểm đó có hoành độ dương khi và chỉ khi

$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+3) > 0 \\ 2m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

Vậy với $m>1$ thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt với hoành độ dương.

c) Gọi điểm cố định mà đường thẳng (d) đi qua với mọi m là $\left(x_0;y_0\right)$ ta có:

$y_0=2(m+3)x_0-2m+2\ \forall m$

$\Leftrightarrow m\left(2x_0-2\right)+6x_0-y_0+2=0\ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x_0-2=0\\6x_0-y_0+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=1\\y_0=8\end{cases}$

Vậy với mọi m thì đường thẳng (d) luôn đi qua $(1;8)$

Bài 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=mx-3$ tham số m và Parabol $(P): y=x^2$

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$

b) Tìm m m để đường thẳng (d) $\left(d\right)$ cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2$ thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|=2$.

Hướng dẫn giải

a) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;0)$ nên có $0=m\cdot 1-3\Leftrightarrow m=3$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (d) và (P): $x^2-mx+3=0$

Có $\Delta=m^2-12$

(d) cắt $P)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1,x_2 khi

$\Delta=m^2-12>0\Leftrightarrow m^2>12\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>2\sqrt{3}\\m>-2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Áp dụng hệ thức Vi – Ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1x_2=3\end{cases}$

Theo bài ra ta có

$\left|x_1-x_2\right|=2\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)^2=4\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=4$

$\Leftrightarrow m^2-4.3=4\Leftrightarrow m^2=16\Leftrightarrow m=\pm4$

Vậy $m=\pm4$ là giá trị cần tìm.

Bài 18: Cho hàm số $y=ax^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y=mx+m-3$

a) Tìm a để đồ thị $P)$ đi qua điểm $B(2;-2)$.

Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m

b) Gọi x_C và x_D lần lượt là hoành độ của hai điểm C và D. Tìm các giá trị của m sao cho $x_C^2 + x_D^2 - 2x_C x_D - 20 = 0$

Hướng dẫn giải

a) (P) đi qua điểm $B(2;-2)$ nên ta có: $-2 = a.2^2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}$

Vậy (P): $y = \frac{-1}{2}x^2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$\frac{-1}{2}x^2 = mx + m - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m - 6 = 0$ (*)

$\Delta' = m^2 - (2m-6) = m^2 - 2m + 6 = (m-1)^2 + 5 > 0\ \forall m$

Do đó, đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt C và D với mọi giá trị của m.

b) Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_C + x_D = -2m \\ x_C x_D = 2m - 6 \end{cases}$

Theo giả thiết

$x_C^2 + x_D^2 - 2x_C x_D - 20 = 0 \Leftrightarrow \left(x_C + x_D\right)^2 - 4x_C x_D - 20 = 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(2m-6) - 20 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy với $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

. PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài F.01. Cho hàm số $y = ax^2\ (a \neq 0)$ có đồ thị parabol (P)

a) Xác định a để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{2};-4)$.

b) Với giá trị a vừa tìm được ở trên hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ;

ii) Tìm các điểm trên (P) có tung độ bằng -2;

iii) Tìm các điểm trên (P) cách đều hai trục tọa độ.

Bài F.02. Cho hàm số $y = (m-1)x^2\ (m \neq 1)$ có đồ thị là (P).

a) Xác định m để (P) đi qua điểm $A(-\sqrt{3};1)$;

b) Với giá trị của m vừa tìm được ở trên, hãy:

i) Vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ;

ii) Tìm các điểm trên (P) có hoành độ bằng 1;

iii) Tìm các điểm trên (P) có tung độ gấp đôi hoành độ.

Bài F.03. Cho hàm số $y = ax^2\left(a \neq 0\right)$ có đồ thị parabol (P)

a) Tìm hệ số a biết rằng (P) đi qua điểm $\mathrm{M}(-2;\ 4)$.

b) Viết phương trình đường thẳng d đi qua gốc tạ độ và điểm N(2;4).

c) Vẽ (P) và d tìm được ở các câu a) và b) trên cùng một hệ trục tọa độ.

d) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và d ở các câu a) và b).

Bài F.04. Cho $(P): y = x^2$ và $d: y = \frac{1}{2}x$.

a) Vẽ (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ;

b) Xác định tọa độ giao điểm của (P) và d ;

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình $x^2 > \frac{1}{2}x$

Bài F.05. Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 4x + 9$.

a) Vẽ đồ thị (P)

b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) biết (d_1) song song với đường thẳng (d) và (d_1) tiếp xúc (P)

Bài F.06. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $d: y = x + 1$

a) Vẽ parabol $P)$ và đường thẳng (d) trên cùng một trục tọa độ.

b) Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d và đi qua $A(-1;2)$

Bài F.07. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

a) Vẽ đồ thị của (P)

b) Gọi $A\left(x_1; y_1\right)$ và $B\left(x_2; y_2\right)$ lần lượt là các giao điểm của $\left(P\right)$ với $\left(d\right)$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$.

Bài F.08. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = -2ax - 4a$ (với a là tham số)

a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $a = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2$ thỏa mãn $|x_1|+|x_2|=3$.

Bài F.09. Cho hai hàm số $y=x^2$ và $y=mx+4$, với *m* là tham số.

a) Khi $m=3$, tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị hàm số trên.

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị *m*, đồ thị của hai hàm số đã cho luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A_1(x_1;y_1)$ và $A_2(x_2;y_2)$ Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(y_1)^2+(y_2)^2=7^2$.

Bài F.10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) (P) có hoành độ lần lượt là $x_A=-1,x_B=2$

a) Tìm tọa độ của hai điểm A,B.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A,B.

c) Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d).

Bài F.11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y=\frac{1}{2}x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) (P) có hoành độ lần lượt là $x_A=-1,x_B=2$

a) Tìm tọa độ của hai điểm A,B.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A,B.

c) Tính khoảng cách từ điểm O (gốc tọa độ) tới đường thẳng (d).

Bài F.12: Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y=-x+2$ có đồ thị là (d)

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy

b) Bằng phép tính, tìm tọa độ các giao điểm A,B của (P) và (d) ; (hoành độ của A nhỏ hơn hoành độ của B). Gọi C và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành, tính diện tích của tứ giác ABC

Bài F.13: Cho hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P).

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Cho đường thẳng $y=mx+n(\Delta)$. Tìm m,n để đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $y=-2x+5(d)$ và có duy nhất một điểm chung với đồ thị (P).

Bài F.14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P):y=-x^2$

a) Vẽ parabol (P)

b) Xác định toạ độ các giao điểm A,B của đường thẳng $(d):y=-x-2$ và (P) Tìm toạ điểm M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M.

Bài F.15: Cho parabol (P): $y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(a): y=-2x+1$

a) Vẽ (P) và (a) trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Xác định đường thẳng (d) biết đường thẳng (d) song song với đường thẳng (a) và cắt parabol (P) tại điểm có hoành độ bằng -2.

Chủ đề 7 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN HỆ THỨC VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

G. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN. HỆ THỨC VI-ET VÀ ỨNG DỤNG

Dạng 1: Giải phương trình và phương trình quy về phương trình bậc hai

1.1 Giải phương trình bậc hai cơ bản.

Đối với đề toán là ***giải phương trình*** với *phương trình là phương trình bậc hai đơn giản (có dạng tổng quát* $\mathrm{ax}^2+bx+c=0$*)*, học sinh có thể sử dụng phương pháp đưa về giải phương trình tích, hoặc sử dụng công thức nghiệm (hoặc công thức nghiệm thu gọn) và sử dụng cách nhẩm nghiệm để giải bài toán.

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$*, trong đó x là* *ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và* $a \neq 0$.

2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ *và biệt thức* $\Delta = b^2 - 4ac$*:*

• *Nếu* $\Delta > 0$ *thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt* $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

• *Nếu* $\Delta = 0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

• *Nếu* $\Delta < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

Chú ý: *Nếu phương trình có a và c trái dấu thì* $\Delta > 0$. *Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.*

3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ *và* $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$*:*

• *Nếu* $\Delta' > 0$ *thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt* $x_1 = \dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$

• *Nếu* $\Delta' = 0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.

• *Nếu* $\Delta' < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

Bài 1: ***Giải phương trình:***

a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ b) $5x^2 - 6x + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

a) ***Cách 1****:* Đưa về giải phương trình tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) - (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-2; \dfrac{1}{3}\right\}$

Cách 2: Sử dụng công thức nghiệm để giải phương trình bậc hai.

Ta có $a=3$; b = 5; c = -2 ; $\Delta=b^2-4ac=5^2-4.3.(-2)=25+24=49>0$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2.3}=\frac{-5+7}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2.3}=\frac{-5-7}{6}=\frac{-12}{6}=-2$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;\frac{1}{3}\right\}$

b) *Phương pháp 1:* Đưa về giải phương trình tích bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

$$5x^2-6x+1=0\Leftrightarrow 5x^2-5x-x+1=0\Leftrightarrow 5x(x-1)-(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)(x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x-1=0\\ x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{5}\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;\frac{1}{5}\right\}$

Phương pháp 2: Sử dụng công thức nghiệm thu gọn (*hoặc công thức nghiệm tổng quát*) để giải:

Ta có $a=5$; b = $-6\Rightarrow$ b' = $\frac{b}{2}=\frac{-6}{2}$ = -3; c = 1

$$\Delta'=b'^2-ac=(-3)^2-5.1=9-5=4>0$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)+\sqrt{4}}{5}=\frac{3+2}{5}=1;\qquad x_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)-\sqrt{4}}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

Phương pháp 3: Giải bằng cách nhẩm nghiệm.

Ta có $a=5$; b = -6; c = 1 và $a+b+c=5+(-6)+1=0$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là $x_1=1$ và $x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}$.

1.2. Giải phương trình quy về phương trình bậc hai

1.2.1. Phương trình trùng phương

Cho phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$ (1)

Phương pháp 1: Đặt ẩn phụ:

Đặt $t = x^2$ (t $\geq$0) Ta được phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Nếu phương trình (2) (phương trình trung gian) có 2 nghiệm dương thì phương trình trùng phương có 4 nghiệm.

Nếu phương trình trung gian có một nghiệm dương, một nghiệm âm hoặc có nghiệm kép dương thì phương trình trùng phương có 2 nghiệm

Nếu phương trình trung gian có 2 nghiệm âm hoặc vô nghiệm thì phương trình trùng phương vô nghiệm.

Cụ thể:

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$phương trình (2) có một một nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \\ a.c < 0 \end{array} \right.$

Phương trình (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$phương trình (2) có một nghiệm kép bằng 0 hoặc có một nghiệm bằng không và nghiệm còn lại âm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ S = 0 \\ P = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có vô nghiệm $\Leftrightarrow$phương trình (2) vô nghiệm hoặc có hai nghiệm âm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Nếu phương trình có 4 nghiệm thì tổng các nghiệm luôn bằng 0 và tích các nghiệm luôn bằng $\frac{c}{a}$.

Phương pháp 2: Giải trực tiếp phương trình trùng phương bằng cách đưa về giải phương trình tích:

Biến đổi đưa về dạng phương trình tích : $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

Bài 1: Giải phương trình: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (1)

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $t = x^2$ (điều kiện: $t \ge 0$) phương trình (1) có dạng :

$t^2 - 13t + 36 = 0$. Ta có $a = 1; b = -13; c = 36$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4.1.36 = 25 > 0$.$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-13) + 5}{2} = 9$ (thỏa mãn điều kiện $t \ge 0$)

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-13) - 5}{2} = 4$ (thỏa mãn điều kiện $t \ge 0$)

Với $t_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$

Với $t_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm : $x_1 = -2\ ; x_2 = -3; x_3 = 2; x_4 = 3$.

Cách 2: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x^4 - 12x^2 + 36) - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6)^2 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6 - x)(x^2 - 6 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6 - x = 0 \\ x^2 - 6 + x = 0 \end{array}\right.$$

Giải phương trình: $x^2 - x - 6 = 0$ ta được 2 nghiệm: $x_1 = -2;\ x_2 = 3$.

Giải phương trình: $x^2 + x - 6 = 0$ ta được 2 nghiệm: $x_3 = 2;\ x_4 = -3$.

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm: $x_1 = -3;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2;\ x_4 = 3$

Bài 2: Giải phương trình: $5x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ (1)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2$ (điều kiện: $t \geq 0$) phương trình (1) có dạng :

$5t^2 + 3t - 2 = 0$. Ta có $a = 5; b = 3; c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4.5.(-2) = 49 > 0 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 7}{2.5} = \dfrac{2}{5}$ (thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$)

$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 7}{2.5} = -1$ (không thỏa mãn điều kiện $t \geq 0$)

Với $t_1 = \dfrac{2}{5} \Rightarrow x^2 = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Với $t_2 = -1$ (loại)

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm : $x_1 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}\ ; x_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ (1)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2$ (điều kiện: $t \geq 0$) phương trình (1) có dạng :

$t^2+5t+6=0$. Ta có $a=1;b=5;c=6$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4.1.6=1>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=1$

$\Rightarrow t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+1}{2.1}=-2$ (loại vì không thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$)

$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-1}{2.1}=-3$ (loại vì không thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$)

Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

1.2.2. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Cách giải: *Thực hiện các bước sau:*

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 1: Giải phương trình:

a. $\dfrac{14}{x^2-9}=1-\dfrac{1}{3-x}$ b. $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

Hướng dẫn giải

a. $\dfrac{14}{x^2-9}=1-\dfrac{1}{3-x}$

ĐKXĐ : $x\ne\pm3$

$\Leftrightarrow \dfrac{14}{(x-3)(x+3)}=1+\dfrac{1}{x-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{14}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{(x-3)(x+3)+(x+3)}{(x-3)(x+3)}$

$\Rightarrow 14=(x-3)(x+3)+(x+3)$

$\Leftrightarrow x^2-9+x+3-14=0$

$\Leftrightarrow x^2+x-20=0$

Ta có: $a=1; b=1; c=-20$

$\Delta=b^2-4ac \ =1^2-4.1.(-20)=81>0 \ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

$\Rightarrow$Phương trình có 2 nghiệm có 2 nghiệm phân biệt :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+9}{2.1}=4$ (thỏa mãn điều kiện)

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}=\dfrac{-1-9}{2.1}=-5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x_1=4$; $x_2=-5$

b. $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

ĐKXĐ: $x\neq -1$ và $x\neq 4$

$\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x(x-4)}{(x+1)(x-4)}=\dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x-4)}$

$\Rightarrow 2x(x-4)=x^2-x+8$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x-x^2+x-8=0$

$\Leftrightarrow x^2-7x-8=0$

Ta có: $a=1; b=-7; c=-8$

$a-b+c=1-(-7)+(-8)=0$

$\Rightarrow$Phương trình có 2 nghiệm :

$x_1=-1$ (loại vì không thỏa mãn ĐKXĐ)

$x_2=\dfrac{-c}{a}=\ 8$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm: $x=8$

1.2.3. Giải phương trình đưa về phương trình tích.

Phương pháp: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng phương trình tích sau đó giải các phương trình

Tổng quát: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$.

Bài 1: Giải phương trình

a) $(x-3)(x^2+3x-1)=0$

b) $x^3+3x^2-2x-6=0$

c) $\left(2x^2+3\right)^2-10x^3-15x=0$

d) $x^4-13x^2+36=0$

Hướng dẫn giải

a) $(x-3)(x^2+3x-4)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ hoặc $x^2+3x-4=0$

+) $x-3=0 \Leftrightarrow x_1=3$

+) $x^2+3x-4=0\,(1)$

Ta có $a=1; b=3, c=-4$. và $a+b+c=1+3+(-4)=0$. Phương trình (1) có hai nghiệm:

$x_2=1;\ x_3=\dfrac{c}{a}=-4$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $x_1=3; x_2=1; x_3=-4$

b) $x^3+3x^2-2x-6=0$

$\Leftrightarrow x^2(x+3)-2(x+3)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x^2-2)=0$

$\Leftrightarrow x+3=0$ hoặc $x^2-2=0$

+) $x+3=0 \Leftrightarrow x_1=-3$

+) $x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x_2=\sqrt{2}$ hoặc $x_3=-\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x_1=-3$; $x_2=\sqrt{2}; x_3=-\sqrt{2}$

c. $\left(2x^2+3\right)^2-10x^3-15x=0$

$\Leftrightarrow \left(2x^2+3\right)^2-5x\left(2x^2+3\right)=0$

$\left(2x^2+3\right)\left(2x^2+3-5x\right)=0$

$2x^2+3=0$ hoặc $2x^2-5x+3=0$

+) $2x^2+3=0 \Leftrightarrow 2x^2=-3 \Rightarrow x^2=-1,5$ (vô nghiệm)

+) $2x^2-5x+3=0$. Có $a=2;b=-5;c=3$ và $a+b+c=2-5+3=0$

Phương trình có 2 nghiệm:

$x_1=1$; $x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm:

$x_1=1$; $x_2=\dfrac{3}{2}$

d) $x^4-13x^2+36=0$ (1)

$\Leftrightarrow (x^4-12x^2+36)-x^2=0 \Leftrightarrow (x^2-6)^2-x^2=0 \Leftrightarrow (x^2-6-x)(x^2-6+x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-6=0 \\ x^2+x-6=0 \end{array}\right.$

Giải phương trình: $x^2-x-6=0$ ta được 2 nghiệm: $x_1=-2;\ x_2=3$.

Giải phương trình: $x^2+x-6=0$ ta được 2 nghiệm: $x_3=2;\ x_4=-3$.

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm: $x_1=-3;\ x_2=-2;\ x_3=2;\ x_4=3$

1.2.4. Giải phương trình chứa căn bậc hai.

a) Phương trình chứa căn bậc hai đơn giản (quy được về phương trình bậc hai)

Phương pháp: Đặt ẩn phụ và biến đổi phương trình ban đầu trở thành phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$

Bài 1: Giải phương trình:

a) $4x-29\sqrt{x}+52=0$ b) $x-\sqrt{x+1}-8=0$

Hướng dẫn giải

a) $4x+29\sqrt{x}+52=0$. Điều kiện $x\ge 0$

Đặt $\sqrt{x}=t$ (điều kiện: $t\ge 0$), Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$4t^2-29t+52=0$ (1)

có $a=4;b=-29;c=52$ và $\Delta=b^2-4ac=\left(-29\right)^2-4.4.52=9>0$; $\sqrt{\Delta}=3$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{29+3}{2.4}=4$ (thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$);

$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{29-3}{2.4}=\dfrac{13}{4}$ (thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$);

Với $t_1=4\Rightarrow\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=16$ (t/m)

Với $t_2=\dfrac{13}{4}\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{13}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{169}{16}$ (t/m)

KL: Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x_1=16$; $x_2=\dfrac{169}{16}$

b) $x-2\sqrt{x+1}-7=0$. Điều kiện: $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$

$x-2\sqrt{x+1}-7=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)-2\sqrt{x+1}-8=0$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$, điều kiện: $t\ge 0$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t-8=0$ (1) có $a=1;b=-2;c=-8$;
$\Delta'=b'^2-ac=1+9=9>0$; $\sqrt{\Delta'}=3$. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

(thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$)

$t_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta}}{a}=\dfrac{1-3}{1}=-2$ (loại vì không thỏa mãn điều kiện $t\ge 0$)

Với $t=4\Rightarrow\sqrt{x+1}=4\Leftrightarrow x+1=16\Leftrightarrow x=15$ (t/m)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=15$.

b) Phương trình vô tỉ.

Phương pháp chung là bình phương hai vế để khử dấu căn. Cần thử lại để loại trừ nghiệm ngoại lai. (ngoài ra có thể dùng cách đặt ẩn phụ đưa về phương trình không có dấu căn giống phần a – dạng ý b bài toán 1)

Đặc biệt phương trình: $\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = \left[B(x)\right]^2 \end{cases}$

Ta chỉ có thể đem bình phương hai vế để giải bài toán tương đương khi cả hai vế cùng dương.

Bài 1: Giải phương trình:

a) $x - \sqrt{2x+3} = 0$

b) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$

c) $\sqrt{25-x^2} = x-1$

d) $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$

Hướng dẫn giải

a) $x - \sqrt{2x+3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$

b) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4+2x-x^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 0 \text{ hoặc } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

c) $\sqrt{25-x^2} = x-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 25-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 4 \text{ hoặc } x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$

d) $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x+4 = 1-x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}+1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x \ge -\dfrac{1}{2} \\ (1-x)(1-2x) = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \\ x = 0 \vee x = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

1.2.5. Giải phương trình chứa dấu GTTĐ

- Ta thường xét dấu các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối trên mỗi khoảng. Giải phương trình trên mỗi khoảng đó.

- Có thể đặt ẩn phụ

Bài 1: Giải phương trình

a) $x^2 + |x-1| = 1$ b) $|x-6| = |x^2 - 5x + 9|$

Hướng dẫn giải

a) $x^2 + |x-1| = 1$

$\Leftrightarrow |x-1| = 1 - x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x - 1 = \pm(1 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 - x^2 \\ x - 1 = -1 + x^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \\ x = 1 \text{ hoặc } x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1;\ x_2 = 0$

b) $|x-6| = |x^2 - 5x + 9|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 6 = x^2 - 5x + 9 \\ x - 6 = -x^2 + 5x - 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 15 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = 1;\ x_2 = 3$

Dạng 2: Hệ thức Vi-et và ứng dụng

a) Nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0\,(a \ne 0)$ thì $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ và

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$

b) Muốn tìm hai số u và v, biết $u+v=S;\ uv=P$, ta giải phương trình: $x^2-Sx+P=0$

(Điều kiện để có u và v là $S^2-4P\ge 0$)

c) Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm $x_1=1;x_2=\dfrac{c}{a}$

Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm $x_1=-1;x_2=\dfrac{-c}{a}$

Sử dụng hệ thức Vi-et, biến đổi biểu thức đã cho suất hiện tổng và tích các nghiệm từ đó tính được giá trị biểu thức.

Các hệ thức thường gặp:

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1^2+2x_1.x_2+x_2^2\right)-2x_1.x_2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1.x_2=S^2-2P$.

$x_1-x_2=\pm\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\pm\sqrt{S^2-4P}$.

$x_2-x_1=\pm\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\pm\sqrt{S^2-4P}$.

$x_1^2-x_2^2=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)=\pm\left(x_1+x_2\right)\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\pm S.\sqrt{S^2-4P}$.

$x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^2-x_1.x_2+x_2^2\right)=\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1.x_2\right]=S.\left(S^2-3P\right)$.

$x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2\right)^2+\left(x_2^2\right)^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2.x_2^2=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$.

$=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2$.

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{P}$.

$\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\pm\dfrac{\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2}=\pm\dfrac{\sqrt{S^2-4P}}{P}$.

$\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)}{x_1x_2}=\pm\dfrac{\left(x_1+x_2\right)\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2}=\pm\dfrac{S.\sqrt{S^2-4P}}{P}$

$x_1^3-x_2^3=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^2+x_1.x_2+x_2^2\right)=\left(x_1-x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-x_1.x_2\right]$.

$=\left(\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right)\left[(x_1+x_2)^2-x_1.x_2\right]=\pm\left(\sqrt{S^2-4P}\right)\left[S^2-P\right]$

$x_1^4-x_2^4=\left(x_1^2\right)^2-\left(x_2^2\right)^2=\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2-x_2^2\right)=\pm\left(S^2-2P\right)\left(S.\sqrt{S^2-4P}\right)$

….

Bài 1: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2+x-2+\sqrt{2}=0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; $B=x_1^2+x_2^2$; $C=\left|x_1-x_2\right|$; $D=x_1^3+x_2^3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a=1;c=-\left(2-\sqrt{2}\right)$. Và $a.c<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-et có: $\begin{cases}S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=-1\\P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=-2+\sqrt{2}\end{cases}$

$A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{-1}{-2+\sqrt{2}}$.

$B=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=1-\left(-2+\sqrt{2}\right)=3-\sqrt{2}$.

$C=\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1-4\left(-2+\sqrt{2}\right)}=\sqrt{9-4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}=2\sqrt{2}-1$.

$D=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-1+3\left(-2+\sqrt{2}\right)=-7+3\sqrt{2}$.

Bài 2: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-3x-7=0$. Không giải phương trình

a) Tính các giá trị của các biểu thức sau:

$A=\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$. $B=x_1^2+x_2^2$.

$C=\left|x_1-x_2\right|$. $D=x_1^3+x_2^3$.

$E = x_1^4 + x_2^4$. $\qquad$ $F = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1)$.

b) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1 - 1}$ và $\dfrac{1}{x_2 - 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a = 1; c = -7.$ Và $a.c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 3 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -7 \end{cases}$

$$A = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{x_2 + x_1 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x)_2 + 1} = \frac{1}{-9}.$$

$$B = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 23.$$

$$C = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{37}.$$

$$D = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 72.$$

$$E = x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = 527$$

$$F = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1) = 10x_1x_2 + 3(x_1^2 + x_2^2) = -1.$$

b) Ta có: $\begin{cases} S = \dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1} = \dfrac{x_2 + x_1 - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x)_2 + 1} = \dfrac{1}{-9} \\ P = \dfrac{1}{x_1 - 1}.\dfrac{1}{x_2 - 1} = \dfrac{1}{-9} \end{cases}$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\dfrac{1}{x_1 - 1}$ và $\dfrac{1}{x_2 - 1}$ là: $X^2 + \dfrac{1}{9}X - \dfrac{1}{9} = 0$

Bài 3: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình, tính các giá trị của các biểu thức sau:

$A = (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1)$. $\qquad$ $B = \dfrac{x_2}{x_1 - 1} + \dfrac{x_1}{x_2 - 1}$.

$C = |x_1 - x_2|$ $\qquad\qquad$ $D = \dfrac{x_1 + 2}{x_1} + \dfrac{x_2 + 2}{x_2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a = 3; c = -6$. Và $a.c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-et có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-5}{3} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -2 \end{cases}$

$$A = (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1) = 13x_1x_2 - 6\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 13P - 6\left(S^2 - 2P\right) = \frac{-200}{3}$$

$$B = \frac{x_2}{x_1 - 1} + \frac{x_1}{x_2 - 1} = \frac{(x_2 + x_1)^2 - 2x_1x_2 - (x_2 + x_1) - 2}{x_1x_2 - (x_1 + x)_2 + 1} = \frac{38}{3}.$$

$$C = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{\sqrt{97}}{3}.$$

$$D = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2} = \frac{2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{11}{3}.$$

Bài 4: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1; y_2 thỏa mãn: $y_1 = 2x_1 - x_2$ và $y_2 = 2x_2 - x_1$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ có $a.c = 3.(-6) < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-5}{3} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} S = y_1 + y_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_2 - x_1 = x_1 + x_2 = \dfrac{-5}{3} \\ P = y_1y_2 = (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) = 5x_1x_2 - 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = -\dfrac{212}{9} \end{cases}$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1; y_2 là : $Y^2 + \dfrac{5}{3}Y - \dfrac{212}{9} = 0$.

Bài 5. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Không giải phương trình hãy lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1 ; y_2 thỏa mãn:

a) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2 \\ y_2 = x_2 + 2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1^2}{x_2} \\ y_2 = \dfrac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có $a.c = 3.(-6) < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt. Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{3}{2} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

a) Ta có: $\begin{cases} S = y_1 + y_2 = \dfrac{11}{2} \\ P = y_1 y_2 = \dfrac{13}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1 ; y_2 là : $Y^2 - \dfrac{11}{2}Y + \dfrac{13}{2} = 0$.

b) Ta có: $\begin{cases} S = y_1 + y_2 = \dfrac{9}{8} \\ P = y_1 y_2 = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm y_1 ; y_2 là : $Y^2 - \dfrac{9}{8}Y - \dfrac{1}{2} = 0$.

Dạng 3: Phương trình chứa tham số

Các điều kiện để phương trình có nghiệm thỏa mãn đặc điểm cho trước:

a) Tìm điều kiện tổng quát để phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \left(a \neq 0\right)$ **có:**

1. Có nghiệm (có hai nghiệm) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

2. Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$

3. Nghiệm duy nhất (*nghiệm kép, hai nghiệm bằng nhau*) $\Leftrightarrow \Delta = 0$ (Nếu $a = 0$ thì $b \neq 0$)

4. Có hai nghiệm phân biệt (*khác nhau*) $\Leftrightarrow \Delta > 0$

5. Hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P > 0$

6. Hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \Delta > 0$ và $P < 0$ (hoặc $a.c < 0$)

7. Hai nghiệm dương (lớn hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S > 0$ và $P > 0$

8. Hai nghiệm âm (nhỏ hơn 0) $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$; $S < 0$ và $P > 0$

9. Hai nghiệm đối nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $S = 0$

10. Hai nghiệm nghịch đảo của nhau $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ và $P = 1$

11. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow$ $a.c < 0$ và $S < 0$

12. Hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn $\Leftrightarrow a.c < 0$ và $S > 0$

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt sao cho $x_1 = px_2\,(3)$ (với p là một số thực)

1- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt .

2- Áp dụng định lý Vi – ét tìm: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ (1) và $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$ (2)

3- Kết hợp (1) và (3) giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 = px_2 \end{cases} \Rightarrow x_1; x_2$

4- Thay x_1 và x_2 vào (2) $\Rightarrow$ Tìm giá trị tham số.

c) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện: $|x_1 - x_2| = k\,(k \in R)$

- Bình phương trình hai vế: $(x_1 - x_2)^2 = k^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = k^2$

- Áp dụng định lý Vi-ét tính $x_1 + x_2$ và $x_1.x_2$ thay vào biểu thức $\Rightarrow$ kết luận.

d) Hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m;

- Tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- Áp dụng định lý Vi-ét tìm $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ (1) và $x_1.x_2=\frac{c}{a}$ (2)

- Biến đổi kết quả không chứa tham số nữa.

4) So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số bất kỳ:

Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm ($\Delta \ge 0$)

Bước 2: Áp dụng Vi-ét tính x_1+x_2 và $x_1.x_2$ (*)

+/ Với bài toán: Tìm m để phương trình có hai nghiệm $>\alpha$

$\Rightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)>0\\(x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0\end{cases}$ Thay biểu thức Vi-ét vào hệ để tìm m

+/ Với bài toán: Tìm m để phương trình có hai nghiệm $<\alpha$

$\Rightarrow \begin{cases}(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)<0\\(x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0\end{cases}$ Thay biểu thức Vi-ét vào hệ để tìm m

+/ Với bài toán: Tìm m để phương trình có hai nghiệm, trong đó có 1 nghiệm $x_1>\alpha$, nghiệm kia $x_2<\alpha$ $\Rightarrow (x_1-\alpha).(x_2-\alpha)>0$ Thay biểu thức Vi-ét vào hệ để tìm m

Bài 1: Cho phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-1=0$ (x là ẩn số)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình đã cho thỏa mãn: $(x_1-x_2)^2=x_1-3x_2$.

Hướng dẫn giải

a) $\Delta=(2m-1)^2-4.(m^2-1)=5-4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta>0 \Leftrightarrow 5-4m>0 \Leftrightarrow m<\frac{5}{4}$

b) Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow m\le\frac{5}{4}$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-1 & (*)\\x_1x_2=m^2-1\end{cases}$

Theo đề bài: $(x_1-x_2)^2=x_1-3x_2$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1 - 3x_2$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2-1) = x_1 - 3x_2$

$\Leftrightarrow x_1 - 3x_2 = 5-4m$ **(**)**

Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-1 \\ x_1-3x_2=5-4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{m+1}{2} \\ x_2=\dfrac{3(m-1)}{2} \end{cases}$

Mặt khác ta có: $x_1x_2 = m^2-1$

$\Rightarrow \dfrac{m+1}{2}\cdot\dfrac{3(m-1)}{2} = m^2-1$

$\Leftrightarrow 3(m^2-1) = 4(m^2-1)$

$\Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm1$

Kết hợp với điều kiện $m<\dfrac{5}{4} \Rightarrow m=\pm1$ (thỏa mãn) là các giá trị cần tìm.

Vậy với $m=1$ hoặc $m=-1$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $(x_1-x_2)^2 = x_1-3x_2$.

Phân tích: Đối với yêu cầu đề toán, sau khi ta thế từ hệ thức Vi-et ta được một phương trình liên hệ giữa x_1, x_2 thì ta sẽ lập được một hệ phương trình từ đó giải hệ phương trình với ẩn $x_1; x_2$ ta sẽ tìm được ra $x_{1;}$ và x_2. Thay vào phương trình $x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$ ta sẽ giải được ra tham số cần tìm.

Bài 2: Tìm m để phương trình $x^2+5x+3m-1=0$ (x là ẩn số, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$

Hướng dẫn giải

$\Delta = 5^2 - 4.1.(3m-1) = 29-12m$

Để phương trình có hai nghiệm $\Rightarrow \Delta \ge 0 \Rightarrow 29-12m \Leftrightarrow m \le \dfrac{29}{12}$

Áp dụng hệ thức Vi-ét $\begin{cases} x_1+x_2=-5 \\ x_1x_2=3m-1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^3-x_2^3+3x_1x_2=75$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)+3x_1x_2=75$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)(25-x_1x_2)+3x_1x_2=75$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)=\dfrac{75-3x_1x_2}{(25-x_1x_2)}$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)=\dfrac{75-3(3m-1)}{[25-(3m-1)]} \Leftrightarrow (x_1-x_2)=\dfrac{78-9m}{26-3m}$

$\Leftrightarrow (x_1-x_2)=\dfrac{3(26-3m)}{26-3m} \Leftrightarrow x_1-x_2=3$

Kết hợp $x_1+x_2=-5$ suy ra $x_1=-1; x_2=-4$ Thay vào $x_1x_2=3m-1$ suy ra $m=\dfrac{5}{3}$ (thỏa mãn $m\le\dfrac{29}{12}$)

Vậy $m=\dfrac{5}{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3: Cho phương trình $x^2-10mx+9m=0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm ***phân biệt*** x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1-9x_2=0$

Hướng dẫn giải

a) Với $m=1$ phương trình đã cho trở thành $x^2-10x+9=0$

Ta có $a+b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

b) $\Delta'=(-5m)^2-1.9m=25m^2-9m$

Điều kiện phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $\Delta'>0 \Leftrightarrow 25m^2-9m>0$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \ (*) \\ x_1x_2 = 9m \quad\quad (**) \end{cases}$$

từ (*) và giả thiết $x_1 - 9x_2 = 0$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10m \\ x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_2 = 10m \\ x_1 = 9x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = m \\ x_1 = 9m \end{cases}$

Thay vào phương trình (**) ta có: $x_1x_2 = 9m\ 9m^2 = 9m \Leftrightarrow 9m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Với $m = 0$ ta có $\Delta' = 25m^2 - 9m = 0$ không thỏa mãn điều kiện phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Với $m = 1$ ta có $\Delta' = 25m^2 - 9m = 16 > 0$ thỏa mãn điều kiện để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Vậy với $m = 1$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 - 9x_2 = 0$.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$

Hướng dẫn giải

a) Với $m = 0$, phương trình đã cho trở thành: $x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta' = 2$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Vậy với $m = 0$ thì nghiệm của phương trình đã cho là $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

b) $\Delta' = m + 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$

Do đó:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=4\Leftrightarrow\frac{2(m+1)}{m^2+m-1}=4$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-1\neq 0\\ m+1=2(m^2+m-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-1\neq 0\\ 2m^2+m-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 5: Cho phương trình $\frac{1}{2}x^2-mx+\frac{1}{2}m^2+4m-1=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình đã cho với $m=-1$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=x_1+x_2$

Hướng dẫn giải

a) Với $m=-1$ phương trình trở thành $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow x^2+2x-9=0$

$\Delta'=10>0$. Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1=-1-\sqrt{10};x_2=-1+\sqrt{10}$

b) Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta>0$

$$\Leftrightarrow(-m)^2-4.\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}m^2+4m-1\right)>0\Leftrightarrow-8m+2>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{4}$$

Để phương trình có nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow\frac{1}{2}m^2+4m-1\neq 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}m_1\neq-4-3\sqrt{2}\\ m_2\neq-4+3\sqrt{2}\end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1.x_2=m^2+8m-2\end{cases}$

Theo bài ra có $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=x_1+x_2\Leftrightarrow(x_1+x_2)(x_1x_2-1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1x_2-1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m=0\\ m^2+8m-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\ m=-4-\sqrt{19}\\ m=-4+\sqrt{19}\end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m<\dfrac{1}{4}; m_1\neq -4-3\sqrt{2}; m_2\neq -4+3\sqrt{2}$ ta được $m=0; m=-4-\sqrt{19}$

Vậy $m=0; m=-4-\sqrt{19}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 6: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm sao cho nghiệm này bằng ba lần nghiệm kia.

Hướng dẫn giải

a) Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta^{'}\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[-(m-1)\right]^2-1.\left(m^2-3\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow -2m+4\geq 0$

$\Leftrightarrow m\leq 2$

Vậy $m\leq 2$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

b) Với $m<2$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Gọi một nghiệm của phương trình đã cho là a thì nghiệm kia là $3a$. Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} a+3a=2m-2 & (1)\\ a.3a=m^2-3 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (1)$\Rightarrow a=\dfrac{m-1}{2}$ thế vào phương trình (2) ta có $3\left(\dfrac{m-1}{2}\right)^2=m^2-3$

$\Leftrightarrow m^2+6m-15=0$ có $\Delta'=24>0$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$m_2=-3+2\sqrt{6};\ m_2=-3-2\sqrt{6}$ (thỏa mãn điều kiện $m\leq 2$)

Vậy $m=-3\pm 2\sqrt{6}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 7: Cho phương trình $x^2+2x-m^2-1=0$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo m .

c) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm thỏa: $x_1=-3x_2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta' = 1^2 - 1.\left(-m^2 - 1\right) = 1 + m^2 + 1 = m^2 + 2 > 0$, với mọi m

Vì $\Delta' > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-2}{1} = -2 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-m^2 - 1}{1} = -m^2 - 1 \end{cases}$$

c) Ta có $x_1 + x_2 = -2$ (do trên) và $x_1 = -3x_2$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ -x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Thay $(*)$ vào biểu thức $x_1x_2 = -m^2 - 1$ ta được:

$$(-3).1 = -m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình đã cho mà không phụ thuộc vào m.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x_1^2 + x_2^2$ (với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho)

Hướng dẫn giải

a) $\Delta' = \left[-(m-1)\right]^2 - 1.(m-3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} > 0$, $\forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ 2x_1x_2 = 2m - 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1+x_2-2x_1x_2-4=0$ không phụ thuộc vào m.

c) $P=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m-1)^2-2(m-3)=4m^2-8m+4-2m+6$

$=4m^2-10m+10=\left(2m-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}\geq\dfrac{15}{4},\ \forall m$

Do đó $P_{\min}=\dfrac{15}{4}$ và dấu "=" xảy ra khi $2m-\dfrac{5}{2}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{4}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{15}{4}$ với $m=\dfrac{5}{4}$.

Bài 9: Cho phương trình $x^2-(2m+2)x+2m=0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leq\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Phương trình $x^2-(2m+2)x+2m=0\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+2m=0$

Điều kiện PT có 2 nghiệm không âm x_1, x_2 là

$$\begin{cases}\Delta'\geq 0\\ x_1+x_2\geq 0\\ x_1x_2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+1\geq 0\\ 2(m+1)\geq 0\\ 2m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 0$$

Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\ x_1x_2=2m\end{cases}$

Ta có $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\leq 2$

$\Leftrightarrow 2m+2+2\sqrt{2m}\leq 2\Leftrightarrow m=0$ (thoả mãn)

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 10: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<1<x_2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta = \left[-2(m-1)\right]^2 - 4.1.(2m-5) = 4m^2 - 12m + 22$

$= (2m)^2 - 2.2m.3 + 9 + 13 = (2m+3)^2 + 13 > 0$, $\forall m$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-2 \\ x_1x_2 = 2m-5 \end{cases}$ (I)

Theo giả thiết $x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1) < 0 \Rightarrow x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 < 0$ (II)

Thay (I) vào (II) ta có: $(2m-5) - (2m-2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 0.m - 2 < 0$, đúng với mọi m.

Vậy với mọi m thì phương trình trên có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1):

Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \dfrac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a.c = 1.(-1) = -1 < 0$, với $\forall m$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Ta có $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1) nên ta có: $x_1^2 - mx_1 - 1 = 0$ và $x_2^2 - mx_2 - 1 = 0$

hay $\begin{cases} x_1^2 = mx_1 + 1 \\ x_2^2 = mx_2 + 1 \end{cases}$

Do đó $P = \dfrac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1} - \dfrac{x_2^2 + x_2 - 1}{x_2} = \dfrac{mx_1 + 1 + x_1 - 1}{x_1} - \dfrac{mx_2 + 1 + x_2 - 1}{x_2}$

$= \dfrac{x_1(m+1)}{x_1} - \dfrac{x_2(m+1)}{x_2} = (m+1) - (m+1) = 0$ vì x_1, $x_2 \neq 0$.

Vậy $P = 0$.

Bài 12: Xác định giá trị m trong phương trình $x^2-8x+m=0$ để $4+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình. Với m vừa tìm được, phương trình đã cho còn một nghiệm nữa. Tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn giải

Do $4+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình nên thỏa mãn phương trình:

$$\left(4+\sqrt{3}\right)^2-8\left(4+\sqrt{3}\right)+m=0$$

$$\Leftrightarrow m-13=0 \Leftrightarrow m=13$$

Thay $m=13$ vào phương trình ta được phương trình: $x^2-8x+13=0$ $(*)$

$$\Delta^{'}=(-4)^2-1.13=3$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x_1=4+\sqrt{3} \\ x_2=4-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy $x=4-\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm.

Bài 13: Cho phương trình $x^2-2x+m+3=0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=-1$. Tính nghiệm còn lại.

b) Tìm m để hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3+x_2^3=8$

Hướng dẫn giải

a) Vì phương trình $x^2-2x+m+3=0$ có nghiệm $x=-1$ nên ta có:

$$(-1)^2-2.(-1)+m+3=0 \Leftrightarrow m+6=0 \Leftrightarrow m=-6.$$

Ta có phương trình: $x^2-2x+(-6)+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

Ta có $a-b+c=0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1=-1$; $x_2=\dfrac{-c}{a}=3$

Vậy $m=6$ và nghiệm còn lại là $x=3$.

b) $\Delta'=1^2-1.(m+3)=-m-2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta^{'}>0 \Leftrightarrow m<-2$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=m+3 \end{cases}$

Ta có $x_1^3+x_2^3=8$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=8$

$\Leftrightarrow 2^3-3.(m+3).2=8$

$\Leftrightarrow 6(m+3)=0$

$\Leftrightarrow m+3=0$

$\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m=-3$ là giá trị cần tìm.

Bài 14: Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-\frac{1}{2}=0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

b) Tìm m để hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

c) Tìm m để hai nghiệm đó là số đo của 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3.

Hướng dẫn giải

a) $\Delta' =(-m)^2-1.\left(m^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$, $\forall m$.

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m.

b) Hai nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x_1=m-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2=m+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Theo đề bài ta có $\left|m-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\left|m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \Leftrightarrow m^2-\sqrt{2}m+\frac{1}{2}=m^2+\sqrt{2}m+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}m=0 \Leftrightarrow m=0$

c) Giả sử phương trình có hai nghiệm là $x_1;x_2$. Theo đề bài đó là số đo của 2 cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền bằng 3 nên ta có $x_1^2+x_2^2=3^2=9$

Vậy ta có:

$$\left(m-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(m+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=9 \Leftrightarrow 2m^2-8=0 \Leftrightarrow m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$ là các giá trị cần tìm.

Bài 15: Cho phương trình $x^2+2x-m^2-1=0$ (m là tham số)

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo m.

c) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm thỏa: $x_1=-3x_2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta'=1^2-1.\left(-m^2-1\right)=1+m^2+1=m^2+2>0$, với mọi m

Vì $\Delta'>0$, với mọi m nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Với mọi m, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-2}{1}=-2 \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-m^2-1}{1}=-m^2-1 \end{cases}$$

c) Ta có $x_1+x_2=-2$ (do trên) và $x_1=-3x_2$ nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1=-3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1+3x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ -x_1-3x_2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ -2x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+1=-2 \\ x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{cases} \quad (*)$$

Thay $(*)$ vào biểu thức $x_1x_2=-m^2-1$ ta được: $(-3).1=-m^2-1 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$

Vậy $m=\pm\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 16: Tìm tất cả các số tự nhiên m để phương trình $x^2-m^2x+m+1=0$ (m là tham số) có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn giải

$\Delta=\left(-m^2\right)^2-4.1.(m+1)=m^4-4m-4$

Phương trình có nghiệm nguyên khi $\Delta=m^4-4m-4$ là số chính phương

Nếu $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ thì $\Delta < 0$ (loại)

Nếu $m=2$ thì $\Delta = 4 = 2^2$ (nhận)

Nếu $m \geq 3$ thì $2m(m-2) > 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m - 5 > 0$

$\Leftrightarrow \Delta - (2m^2 - 4m - 5) < \Delta < \Delta + 4m + 4$

$\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + 1 < \Delta < m^4$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1)^2 < \Delta < (m^2)^2$

Δ không là số chính phương.

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm

Bài 17: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-4)x + m + 6 = 0$

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Tính theo m biểu thức $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ rồi tìm $m \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = [-(m-4)]^2 - (m-6)$

$\Delta' = (m-4)^2 - m + 6$

$\Delta' = m^2 - 8m + 16 - m + 6$

$\Delta' = m^2 - 9m + 22$

$\Delta' = \left(m - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{2} > 0, \forall m$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo câu a, $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -[-2(m-4)] = 2(m-4) = 2m - 8 \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 6 \end{cases}$$

Có: $A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\frac{2m-8}{m-6}=\frac{2(m-6)+12-8}{m-6}$

$=\frac{2(m-6)+4}{m-6}=\frac{2(m-6)}{m-6}+\frac{4}{m-6}=2+\frac{4}{m-6}$

Để $A\in\mathbb{Z}$ thì $\frac{4}{m-6}\in\mathbb{Z}$ suy ra $4\vdots(m-6)$ hay $m-6\in$ Ư(4)=$\{-4;-2;-1;1;2;4\}$

Lập bảng:

$m-6$	-4	-2	-1	1	2	4
m	2	4	5	7	8	10

Vậy $m\in\{2;4;5;7;8;10\}$ thì $A\in\mathbb{Z}$.

Bài 18: Cho phương trình: $x^2-2(m-2)x-2m=0\ \ (1)$ với x là ẩn số.

a) Chứng tỏ phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

b) Tìm giá trị của m để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức $x_2-x_1=x_1^2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta'=\left[-(m-2)\right]^2-(-2m)=(m-2)^2+2m=m^2-4m+4+2m$

$=m^2-2m+4=(m-1)^2+3>0,\forall m$

Do $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo câu a, $\Delta'>0,\forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=-\left[-2(m-2)\right]=2(m-2)=2m-4\\P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=-2m\end{cases}$$

Có x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có $x_1{}^2-2(m-2)x_1-2m=0\Leftrightarrow x_1{}^2=2(m-2)x_1+2m$

Theo đề toán: $x_2-x_1=x_1^2\Leftrightarrow x_2-x_1=2(m-2)x_1+2m$

$\Leftrightarrow 2m-4-x_1-x_1=2(m-2)x_1+2m$

$\Leftrightarrow -4-2x_1=(2m-4)x_1$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{4}{2-2m} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{2}{1-m}$

Thay $x_1 = \dfrac{2}{1-m}$ vào (1) ,ta được: $\left(\dfrac{2}{1-m}\right)^2 - 2(m-2)\left(\dfrac{2}{1-m}\right) - 2m = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{(1-m)^2} - \dfrac{4(m-2)(1-m)}{(1-m)^2} - \dfrac{2m(1-m)^2}{(1-m)^2} = 0$

$\Rightarrow 4 - 4(-m^2+3m-2) - 2m(1-2m+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4m^2 - 12m + 8 - 2m + 4m^2 - 2m^3 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^3 - 8m^2 + 14m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + 7m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (m-2)(m^2-2m+3) = 0$

$\Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $\mathrm{m} = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 19: Cho phương trình: $x^2 - 2x - 2m^2 = 0$ (1) với x là ẩn số.

a) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

b) Tìm giá trị của m để hai nghiệm của phương trình thỏa hệ thức $x_1^2 = 4x_2^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - (-2m^2) = 1 + 2m^2 > 0, \forall \mathrm{m}$

Do $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Theo câu a, $\Delta' > 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -(-2) = 2 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -2m^2 \quad (3) \end{cases}$$

Có: $x_1^2 = 4x_2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{array}\right.$

TH1: $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3} \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ thay vào (3) .Ta được: $\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = -2m^2$ (vô lý)

TH2: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ thay vào (3). Ta được: $4(-2) = -2m^2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm .

Bài 20: Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (1) (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi $m = 6$.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 3$.

Hướng dẫn giải

a) Với $m = 6$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 5x + 6 = 0$ $(*)$

$\Delta = 25 - 4.6 = 1 > 0$. Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3;\ x_2 = 2$.

b) Ta có: $\Delta = 25 - 4m$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1,\ x_2$ thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{25}{4}$.

Kết hợp với hệ thức Vi-ét, ta có :

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 & (1) \\ x_1x_2 = m & (2) \\ |x_1 - x_2| = 3 & (3) \end{cases}$. Giải hệ (1), (3) : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ |x_1 - x_2| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: $m = 4$. Thử lại thì thoả mãn. Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Bài 21: Cho phương trình $x^4 - (m^2 + 4m)x^2 + 7m - 1 = 0$. Định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt và tổng bình phương tất cả các nghiệm bằng 10

Hướng dẫn giải

Đặt $X = x^2\,(X \ge 0)$

Phương trình trở thành $X^4 - (m^2 + 4m)X^2 + 7m - 1 = 0$ (1)

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2+4m)^2 - 4(7m-1) > 0 \\ m^2+4m > 0 \\ 7m-1 > 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Với điều kiện (I), (1) có 2 nghiệm phân biệt dương X_1, X_2.

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 4 nghiệm

$x_{1,2} = \pm\sqrt{X_1}$;

$x_{3,4} = \pm\sqrt{X_2}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(X_1 + X_2) = 2(m^2+4m)$

Vậy ta có $2(m^2+4m) = 10 \Rightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -5 \end{array}\right.$

Với $m = 1$, (I) thỏa mãn

Với $m = -5$, (I) không thỏa mãn.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 22: Cho phương trình: $x^2 - (2m+1) + m^2 + m - 6 = 0 \quad (*)$

a) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm âm.

c) Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 50$.

Hướng dẫn giải

a) $\Delta = (2m+1)^2 - 4\left(m^2+m-6\right) = 25 > 0 \Leftrightarrow 25 > 0$ với mọi giá trị của m.

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1x_2 = m^2+m-6 \\ x_1 + x_2 = 2m+1 \end{cases}$

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm âm thì: $\begin{cases} x_1.x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \text{ hoặc } m > 2 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Vậy với $m < -3$ thì phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm âm.

c) Với $\Delta = 25$ suy ra $x_1 = m-2; x_2 = m+3$

Theo giả thiết, ta có: $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 50 \Leftrightarrow \left|(m-2)^3 - (m+3)^3\right| = 50 \Leftrightarrow \left|5\left(3m^2 + 3m + 7\right)\right| = 50$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Bài 23: Cho phương trình: $2x^2 + (2m-1)x + m - 1 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$

c) Tìm đẳng thức liên hệ giữa $x_1; x_2$ không phụ thuộc vào m.

d) Với giá trị nào của m thì $x_1; x_2$ cùng dương.

Hướng dẫn giải

a) Với $m = 2$ phương trình trở thành

$2x^2 + 3x + 1 = 0$. Ta có $a - b + c = 2 - 3 + 1 = 0$. Vậy phương trình có 2 nghiệm

$$x_1 = -1;\ x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{2}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-1; -\dfrac{1}{2}\right\}$

b) Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (2m-1)^2 - 4.2.(m-1)$

$= 4m^2 - 12m + 9 = (2m-3)^2$

Vì $(2m-3)^2 \geq 0$ với mọi m nên $\Delta \geq 0$ với mọi m

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi m

Theo hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1-2m}{2} & (1) \\ x_1x_2=\dfrac{m-1}{2} & (2) \end{cases}$$

Kết hợp $3x_1-4x_2=11$ và (1) ta có hệ

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1-2m}{2} \\ 3x_1-4x_2=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1+4x_2=2(1-2m) \\ 3x_1-4x_2=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{13-4m}{7} \\ x_1+x_2=\dfrac{1-2m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{13-4m}{7} \\ x_2=\dfrac{-19-6m}{14} \end{cases}$$

Thay $x_1;x_2$ vào pt (2) ta có

$$x_1.x_2=\frac{m-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{13-4m}{7}.\frac{-19-6m}{14}=\frac{m-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 24m^2-51m-198=0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2-17m-66=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=\dfrac{33}{8} \end{array}\right.(TM)$$. Vậy $m\in\left\{-2;\dfrac{33}{8}\right\}$

c) Theo Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{1-2m}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1+x_2)=1-2m \\ 2x_1x_2=m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1+x_2)=1-2m \\ 4x_1x_2=2m-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(x_1+x_2)+4x_1x_2=-1$$

Vậy hệ thức liên hệ $2(x_1+x_2)+4x_1x_2=-1$ có giá trị không phụ thuộc vào m.

d) Theo câu b phương trình luôn có nghiệm với mọi m

Để phương trình có hai nghiệm cùng dương thì

$$\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2m}{2}>0 \\ \dfrac{m-1}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m>0 \\ m-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{2} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\varnothing$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình có hai nghiệm dương.

Bài 24: Cho phương trình bậc hai: $x^2+2(m-1)x-(m+1)=0\ (1)$

a) Tìm giá trị m để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1.

b) Tìm giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm đều nhỏ hơn 2.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta'=(m-1)^2+m+1=(m-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{7}{4}>0, \forall m.$ Nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi- ét ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2(m-1) \\ x_1.x_2=-(m+1) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 1, một nghiệm nhỏ hơn 1 thì $(x_1-1)(x_2-1)<0$

$\Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$

$\Leftrightarrow -(m+1)+2(m-1)+1<0$

$\Leftrightarrow m<2$

Cách 2: Đặt $y=x-1 \Rightarrow x=y+1$ thì phương trình (1) trở thành:

$(y+1)^2+2(m-1)(y+1)-(m+1)=0$

$\Leftrightarrow y^2+2m.y+m-2=0\ (2)$

Để phương trình (1) có một nghiệm x_1 lớn hơn 1, một nghiệm x_2 nhỏ hơn 1 thì phương trình (2) có hai nghiệm $y_1;y_2$ trái dấu $\Leftrightarrow m-2<0 \Leftrightarrow m<2$

b) Để phương trình có hai nghiệm đều nhỏ hơn 2 thì

$$\begin{cases} (x_1-2)(x_2-2)>0 \\ x_1-2+x_2-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0 \\ x_1+x_2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{3} \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$$

Bài 25: Cho phương trình $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại.

c) Xác định m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $-3<x_1<x_2<6$

d) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta=(2m+3)^2-4.1.(m^2+3m+2)$

$$=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8$$

$$=1>0$$

Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Vì phương trình có một nghiệm bằng 2 nên ta thay $x=2$ vào phương trình có:

$$2^2-(2m+3)2+m^2+3m+2=0$$

$$\Leftrightarrow 4-4m-6+m^2+3m+2=0$$

$$\Leftrightarrow m^2-m=0$$

$$\Leftrightarrow m(m-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$$

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+3 \\ x_1.x_2=m^2+3m+2 \end{cases}$ thay $x_1=2$: $\begin{cases} 2+x_2=2m+3 \\ 2.x_2=m^2+3m+2 \end{cases}$

•Với $m=0$ thay vào ta có: $\begin{cases} 2+x_2=3 \\ 2.x_2=2 \end{cases} \Rightarrow x_2=1$

•Với $m=1$ thay vào ta có: $\begin{cases} 2+x_2=5 \\ 2.x_2=6 \end{cases} \Rightarrow x_2=3$

c) Theo trên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+3 \\ x_1.x_2=m^2+3m+2 \end{cases}$

Vì $-3<x_1<x_2<6$ nên $\begin{cases} -3<x_1<x_2 \\ x_1<x_2<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x_1+3<x_2+3 \\ x_1-6<x_2-6<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x_1+3)+(x_2+3)>0\\(x_1+3)(x_2+3)>0\\(x_1-6)+(x_2-6)<0\\(x_1-6)(x_2-6)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2+6>0\\x_1.x_2+3.(x_1+x_2)+9>0\\x_1+x_2-12<0\\x_1.x_2-6(x_1+x_2)+36>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2m+3+6>0\\m^2+3m+2+3(2m+3)+9>0\\2m+3-12<0\\m^2+3m+2-6(2m+3)+36>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m+9>0\\m^2+9m+20>0\\2m-9<0\\m^2-9m+20>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{-9}{2}\\(m+4)(m+5)>0\\m<\dfrac{9}{2}\\(m-4)(m-5)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{-9}{2}\\\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>-4\end{array}\right.\\m<\dfrac{9}{2}\\\left[\begin{array}{l}m<4\\m>5\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -4<m<4$$

Vậy $-4<m<4$

Cách 2: Ta tính $\Delta=1>0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt :

$$x_2=\frac{2m+3+1}{2}=m+2$$
$$x_1=\frac{2m+3-1}{2}=m+1$$

Vì $-3<x_1<x_2<6$ nên $-3<m+1<m+2<6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m+1>-3\\m+2<6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-4\\m<4\end{cases} \Leftrightarrow -4<m<4$$

d) Phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia :

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt : $x_1=\dfrac{2m+3-1}{2}=m+1$; $x_2=\dfrac{2m+3+1}{2}=m+2$

Theo yêu cầu đề toán : nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia :

Trường hợp 1: $x_2 = x_1^2$

$\Leftrightarrow m+2=(m+1)^2$

$\Leftrightarrow m+2=m^2+2m+1$

$\Leftrightarrow m^2+m-1=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2 : $x_1 = x_2^2$

$(m+1)=(m+2)^2$ (*)

$\Leftrightarrow m^2+4m+4-m-1=0$

$\Leftrightarrow m^2+3m+3=0$

$\Delta<0 \Rightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm.

Kết luận: $m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm

Bài 26: Cho phương trình $mx^2+2(m-2)x+m-3=0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m .

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x_1^2+x_2^2$

Hướng dẫn giải

a) Để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì $m\neq 0$ và $a.c<0$

$\Leftrightarrow m(m-3)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<0\\ m-3>0\end{cases}\\ \begin{cases}m>0\\ m-3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<0\\ m>3\end{cases}\\ \begin{cases}m>0\\ m<3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<3$$

b) Để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4(m-2)^2 - 4m(m-3) > 0 \\ \dfrac{-2(m-2)}{m} < 0 \\ \dfrac{m-3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 4 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \\ 0 < m < 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2 < m < 3$

c) Để phương trình đã cho có nghiệm x_1, x_2 thì $m \neq 0$ và $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ *và* $m \leq 4$

Khi đó theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2(m-2)}{m} = -2 + \dfrac{4}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{m} = 1 - \dfrac{3}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = -6 + \dfrac{12}{m} \\ 4x_1.x_2 = 4 - \dfrac{12}{m} \end{cases}$

$\Rightarrow 3(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 = -2$.

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m .

d) Với $m \neq 0$ và $m \leq 4$ thì phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2(m-2)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{m} \end{cases}$$

Ta có: $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= \left[\dfrac{-2(m-2)}{m}\right]^2 - 2.\dfrac{m-3}{m}$

$= \dfrac{4(m^2 - 4m + 4)}{m^2} - \dfrac{2m-6}{m}$

$= \dfrac{4m^2 - 16m + 16 - 2m^2 + 6m}{m^2}$

$= \dfrac{2m^2 - 10m + 16}{m^2}$

$= 2 - \dfrac{10}{m} + \dfrac{16}{m^2} = \left(\dfrac{4}{m}\right)^2 - 2.\dfrac{4}{m}.\dfrac{5}{4} + \dfrac{25}{16} + \dfrac{7}{16}$

$=\left(\frac{4}{m}-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\geq\frac{7}{16}$

$A_{\min}=\frac{7}{16}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{4}{m}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow m=\frac{16}{5}$ (tm)

Vậy GTNN của $x_1^2+x_2^2$ là $\frac{7}{16}$ xảy ra khi $m=\frac{16}{5}$

Bài 27: Cho phương trình bậc hai $mx^2-(5m-2)x+6m-5=0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm nghịch đảo nhau.

Hướng dẫn giải

a) Xét phương trình $mx^2-(5m-2)x+6m-5=0$

Để để phương trình có hai nghiệm đối nhau thì:

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\\ x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ (5m-2)^2-4.\text{m}.(6m-5)>0\\ \frac{5m-2}{m}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m^2+4>0\,(\text{luôn đúng với mọi } m)\\ 5m-2=0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{2}{5}\ \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy $m=\frac{2}{5}$ thì phương trình có hai nghiệm đối nhau.

b) Xét phương trình $mx^2-(5m-2)x+6m-5=0$

Để để phương trình có hai nghiệm nghịch đảo nhau thì:

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\\ x_1.x_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ (5m-2)^2-4.\text{m}.(6m-5)>0\\ \frac{6m-5}{m}=1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2+4>0 \text{ (luôn đúng với } \forall m\text{)} \\ 6m-5=m \end{cases} \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn)

Vậy $m=1$ thì phương trình có hai nghiệm nghịch đảo nhau.

Bài 28: Tỉm giá trị m để phương trình:

a) $2x^2+mx+m-3=0$ có 2 nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

b) $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ có 2 nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

Hướng dẫn giải

a) Xét phương trình $2x^2+mx+m-3=0$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì: $a.c<0 \Leftrightarrow 2.(m-3)<0 \Leftrightarrow m<3$. (1)

Với $m<3$, áp dụng hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-m}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-3}{2} \end{cases}$$

Có nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương suy ra :

$|x_1|>|x_2|$ trong đó $x_1<0$; $x_2>0$ nên $-x_1>x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2<0 \Leftrightarrow \dfrac{-m}{2}<0 \Leftrightarrow m>0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $0<m<3$.

Vậy $0<m<3$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Chú ý: *Đề bài có nghĩa tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm âm.*

b) $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ ***có hai nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.***

Xét phương trình: $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ **(2)** có:

$(a=1; b=-2(m-1); c=m+3)$

PT **(2)** có 2 nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ P < 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a.c < 0 \\ \dfrac{-b}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1.(m-3) < 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ m-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với m = 1 thì pt đã cho có hai nghiệm trái dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

Bài 29: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ (1)

a) Giải phương trình khi $m = -1$.

b) Tìm m để pt (1) có nghiệm.

c) Tìm m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$

Hướng dẫn giải

a) Thay $m = -1$ vào (1) ta có: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy với $m = -1$ thì phương trình có nghiệm $x = -2$.

b) Ta có: $\Delta' = m + 1$

Để pt (1) có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Vậy với $m \geq -1$ thì pt (1) có nghiệm.

c) Áp dụng hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1x_2 = m^2 - 3m$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 2 + m^2 - 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \quad (2)$$

Ta có: $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$

Phương trình (2) có hai nghiệm $m_1 = -1; m_2 = 2$

Vậy với $m \in \{-1; 2\}$ thì pt (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$.

Bài 30: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$

a) Xác đinh m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó

b) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 4 . Tính nghiệm còn lại.

c) Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu (trái dấu)

d) Với điều kiện nào cửa m thì phương trình có hai nghiệm cùng dương (cùng âm)

e) Định m để phương trình có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

f) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $2x_1-x_2=-2$

g) Định m để PT có hai nghiệm $x_1;x_2$ sao cho $A=2x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}-x_1x_2$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a) $\Delta'=(m+1)^2-1.4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$

Để PT có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

b) $x=4$ là một nghiệm của phương trình nên ta có

$\Rightarrow 4^2-2(m+1).4+4m=0$

$\Leftrightarrow -4m+8=0 \Leftrightarrow m=2$

Với $m=2$ phương trình trở thành

$x^2-6x+8=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm còn lại của phương trình là $x=4$

c) $\Delta'=(m-1)^2\ge 0\ \forall m$

Phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$. Áp dụng đinh lý Vi-et:

$x_1+x_2=2m+2$
$x_1.x_2=4m$

- Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow 4m>0 \Leftrightarrow m>0$

- Để phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 4m<0 \Leftrightarrow m<0$

d) với $m>0$ PT có hai nghiệm cùng dấu .

TH1: $x_1;x_2$ cùng dấu dương

$\Leftrightarrow 2m+2>0 \Leftrightarrow m>-1$

Kết hợp $m>-1$ với điều kiện $m>0$ $\Rightarrow m>0$

TH2: $x_1;x_2$ cùng dấu âm

$\Leftrightarrow 2m+2<0 \Leftrightarrow m<-1$

$m<-1$ với điều kiện $m>0$

Vậy không có giá trị m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu âm

e) Áp dụng đinh lý Vi-et:

$x_1+x_2=2m+2$ (*)

$x_1.x_2=4m$ (**)

Không mất tính tổng quát ta giả sử: $x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_1-2x_2=0$

Kết hợp với (*) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1-2x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{2m+2}{3} \\ x_1=2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{2m+2}{3} \\ x_1=\dfrac{4m+4}{3} \end{cases}$

Thay vào phương trình (**) ta có

$x_1.x_2=4m \Leftrightarrow \dfrac{2(m+1).4(\text{m}+1)}{9}=4m$

$\Leftrightarrow 2(m+1)^2=9m$

$\Leftrightarrow 2m^2-5m+2=0$

$m_1=2;m_2=\dfrac{1}{2}$. Thỏa mãn.

Vậy với $m_1=2;m_2=\dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia.

f) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $2x_1-x_2=-2$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=-2 & (1) \\ x_1+x_2=2m+2 & (2) \\ x_1x_2=4m & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3x_1 = 2m\\ x_2 = 2x_1 + 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = \dfrac{2m}{3}\\ x_2 = \dfrac{4m+6}{3}\end{cases}$$

Thay vào phương trình (3) ta có: $\dfrac{2m}{3}.\dfrac{4m+6}{3} = 4m$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow m(m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 0\\ m = 3\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy với m = 0 hoặc $m = 3$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $2x_1 - x_2 = -2$

g) $A = 2x_1{}^2 + 2x_2{}^2 - x_1x_2$

$= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - x_1x_2$

$= 2\left(x_1 + x_2\right)^2 - 5x_1x_2$

$= 2\left(2m+2\right)^2 - 5.4m$

$= 8m^2 - 4m + 8$

$= 8\left(m - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{15}{2} \geq \dfrac{15}{2}\,\forall m$

$\Rightarrow A_{\min} = \dfrac{15}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$ (tm)

Vậy $m = \dfrac{1}{4}$ để A đạt giá trị nhỏ nhất.

🗁. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $\left(x^2 + x - 1\right)\left(x^2 + x + 2\right) = 40$;

b) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 6 = 0$.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 + (m-5)x - 3(m-2) = 0$. (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 3$ với mọi giá trị của m;

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm kép;

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Bài 3: Không giải phương trình, hãy tính tổng các bình phương và hiệu các bình phương các nghiệm của phương trình:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

b) $7x^2 - x + 2 = 0$.

Bài 4: Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình sau:

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)x^2 + 7x + 1 - \sqrt{2} = 0$;

b) $5x^2 + 8x + 1 = 0$;

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$.

Bài 5: Cho phương trình $(m+4)x^2 - 2(m-3)x - 2 = 0.$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m;

b) Tìm m để phương trình có một nghiệm là 1. Khi đó tìm nghiệm thứ hai của phương trình.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m = 0.$ (1)

a) Chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m;

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc vào m, từ đó hãy biểu thị x_2 theo x_1;

c) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

Bài 7: Cho phương trình $mx^2 + (2m-5)x + m - 2 = 0.$ (1)

a) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm;

b) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $(6x_1 - 1)(6x_2 - 1) = -2$.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - 10x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho:

a) $x_1 = 4x_2$;

b) $x_1^3 + x_2^3 = 370$.

Bài 9: Cho phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$.

Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 3x_2 = 14$

Bài 10: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2+4m+13=0.\quad (1)$

a) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm;

b) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm âm.

Chủ đề 8 BẤT ĐẲNG THỨC

Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán bất đẳng thức.

H. BẤT ĐẲNG THỨC

. KIẾN THỨC LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa bất đẳng thức

Ta gọi hệ thức dạng $a<b$ (hay $a>b;a\le b;a\ge b$) là bất đẳng thức.

Tính chất của bất đẳng thức

1. $a<b\Leftrightarrow b>a.$	3. $a<b\Leftrightarrow a+c<b+c.$
2. $a<b;b<c\Rightarrow a<c.$	4. $a<b\Leftrightarrow a.c<b.c\,(c>0).$ $a<b\Leftrightarrow a.c>b.c\,(c<0)$

✧ 5. Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.

✧ 6. Trừ từng vế của hai bất đẳng thức khác chiều được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.

✧ 7. Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm, ta được một bất đẳng thức cùng chiều. Đặc biệt:

$a>b>0\Rightarrow a^2>b^2;|a|>|b|\Rightarrow a^{2n}>b^{2n}$.

$a>b\Rightarrow a^{2n+1}>b^{2n+1}$.

✧ 8.Nếu $a>b>0$ thì $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. *Một số hằng bất đẳng thức hay dùng.*

✧ 1. Nếu a và b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ (dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b$).

✧ 2. Nếu $a,b>0$ thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b$).

✧ 3. $|a+b| \le |a|+|b|$ (dấu = xảy ra khi $a.b \ge 0$).

✧ 4. $|a-b| \ge |a|-|b|$ (dấu = xảy ra khi $a \ge b \ge 0$ hoặc $a \le b \le 0$)

✧ 5. Bất đẳng thức Cô-si

Với $a,b \ge 0$ thì $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ hay $a+b \ge 2\sqrt{ab}$. (dấu = xảy ra khi $a=b$).

Vài dạng khác của bất đẳng thức Cô-si.

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \ge \frac{2}{a+b} \quad (a,b>0)).$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab; (a+b)^2 \ge 4ab; a^2+b^2 \ge 2ab.$$

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

3. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1. Phương pháp dùng định nghĩa của bất đẳng thức:

Muốn chứng minh $a<b$, ta chứng minh $a-b<0$.

Muốn chứng minh $a>b$, ta chứng minh $a-b>0$.

2. Phương pháp biến đổi tương đương: $A<B \Leftrightarrow A_1<B_2 \Leftrightarrow A_2<B_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow C<D.$

Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu đúng.

3. Phương pháp vận dụng tính chất của bất đẳng thức và vận dụng những hằng bất đẳng thức quen thuộc:

Từ các bất đẳng thức đã biết ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Phương pháp phản chứng:

Muốn chứng minh $A<B$, ta giả sử $A \ge B$ rồi suy ra một điều vô lí (mâu thuẫn với điều đã cho hoặc đã biết), từ đó suy ra điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

. BÀI TẬP

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac} = 8abc$ (đpcm)

Bài 2: Cho 4 số thực dương a, b, c, d. Chứng minh rằng: $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{(a+b)(c+d)}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{\sqrt{(a+b)(c+d)}}=\sqrt{\frac{a}{(a+b)}\cdot\frac{c}{(c+d)}}+\sqrt{\frac{b}{(a+b)}\cdot\frac{d}{(c+d)}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{d}{c+d}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{c+d}{c+d}\right)=1$$

$\Rightarrow\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{(a+b)(c+d)}$ (đpcm)

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases}a>c\\b>c\end{cases}$.

Chứng minh rằng $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{(a-c)}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{(b-c)}{b}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+1-\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+1-\frac{c}{b}\right)=1$$

$\Rightarrow\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$ (đpcm)

Bài 4: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $\begin{cases}a\ge 1\\b\ge 1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: $a\sqrt{b-1}=\sqrt{a}\sqrt{ab-a}\le\frac{1}{2}(a+ab-a)=\frac{ab}{2}$ **(1)**

Tương tự: $b\sqrt{a-1}\le\frac{ab}{2}$ **(2)**

Cộng theo vế **(1)** và **(2)**, ta được: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$ (đpcm)

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2\le(a+b)^4$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$16ab(a-b)^2 = 4.(4ab)(a-b)^2 \le 4.\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2 = 4.\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4 \text{ (đpcm)}$$

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b. Chứng minh rằng: $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge a+b+1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\left(\frac{ab}{2}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{ab}{2}+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}\right) \ge 2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{ab}{2}.\frac{b}{2a}}+2\sqrt{\frac{a}{2b}.\frac{b}{2a}}=a+b+1$$

(đpcm)

Bài 7: Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\ ,\forall a,b>0$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b>0$ nên $\frac{a}{b}>0,\ \frac{b}{a}>0$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 8: Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{a-1}\ge 3\ ,\forall a>1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1\ge 2\sqrt{(a-1)\frac{1}{a-1}}+1=2+1=3 \text{ (đpcm)}$$

Bài 9: Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\ ,\forall a\in \boldsymbol{R}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\sqrt{\sqrt{a^2+1}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}=2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 10: Chứng minh rằng: $\dfrac{3a^2}{1+9a^4}\le\dfrac{1}{2}, \forall a\ne 0$

Hướng dẫn giải

Với $\forall a\ne 0$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{3a^2}{1+9a^4}=\frac{1}{\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{9a^4}{3a^2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{3a^2}+3a^2}\le\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{3a^2}.3a^2}}=\frac{1}{2}\text{ (đpcm)}$$

Bài 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=(a+1)^2+\left(\dfrac{a^2}{a+1}+2\right)^2, \forall a\ne -1$

Hướng dẫn giải

$$A=(a+1)^2+\left(\frac{a^2+2a+2}{a+1}\right)^2$$

$$=(a+1)^2+\left[\frac{(a+1)^2+1}{a+1}\right]^2$$

$$=(a+1)^2+\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$=2(a+1)^2+\frac{1}{(a+1)^2}+2\overset{Cauchy}{\ge}2\sqrt{2(a+1)^2\frac{1}{(a+1)^2}}+2=2\sqrt{2}+2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2(a+1)^2=\dfrac{1}{(a+1)^2}$ hay $a=\dfrac{-2\pm\sqrt[4]{8}}{2}$

Vậy GTNN của $A=2\sqrt{2}+2$

Bài 12: Chứng minh rằng: $a+\dfrac{1}{b(a-b)}\ge 3, \forall a>b>0$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a+\frac{1}{b(a-b)}=b+(a-b)+\frac{1}{b(a-b)}\ge 3\sqrt[3]{b.(a-b).\frac{1}{b(a-b)}}=3$$

Bài 13: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$$

$$\geq\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=a+b+c$$

Bài 14: Cho ba số thực $abc\neq 0$. CMR: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\geq\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2}{c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{c^2}.\frac{c^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}.\frac{a^2}{b^2}}=\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+\left|\frac{a}{c}\right|\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

Bài 15: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. CMR

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Hướng dẫn giải

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}=2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\sqrt{\frac{ca}{b}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ca}{b}}\sqrt{\frac{ab}{c}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{ab}{c}}\sqrt{\frac{bc}{a}}}$$

$$=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Vậy $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

Bài 16: Cho ba số thực dương a, b, c. CMR: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 6$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)-3$$

$$=\frac{a+b+c}{a}+\frac{b+c+a}{b}+\frac{c+a+b}{c}-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3\ge 9-3=6$$

✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên.

Xét các bài toán sau:

Bài 1: Cho số thực $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $A=a+\frac{1}{a}$

Sai lầm thường gặp là: $A=a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{a.\frac{1}{a}}=2$. Vậy GTNN của A là 2.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 2 $\Leftrightarrow a=\frac{1}{a}\Leftrightarrow a=1$ vô lý vì theo giả thuyết thì $a\ge 2$.

Lời giải đúng: $A=a+\frac{1}{a}=\frac{a}{4}+\frac{1}{a}+\frac{3a}{4}\ge 2\sqrt{\frac{a}{4}.\frac{1}{a}}+\frac{3a}{4}\ge 1+\frac{3.2}{4}=\frac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{4}=\frac{1}{a}$ hay $a=2$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$.

Vì sao chúng ta lại biết phân tích được như lời giải trên. Đây chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.

Quay lại bài toán trên, dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a=2$. Khi đó ta nói A đạt GTNN tại "**Điểm rơi** $a=2$". Ta không thể áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số a và $\frac{1}{a}$ vì không thỏa quy tắc dấu "=". Vì vậy ta phải tách a hoặc $\frac{1}{a}$ để khi áp dụng bất đẳng thức AM - GM thì thỏa quy tắc dấu "=". Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức AM - GM cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha},\frac{1}{a}\right)$ sao cho tại "**Điểm rơi** $a=2$" thì $\frac{a}{\alpha}=\frac{1}{a}$, ta có sơ đồ sau: $a=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=4$

Khi đó: $A=a+\frac{1}{a}=\frac{a}{4}+\frac{3a}{4}+\frac{1}{a}$ và ta có lời giải như trên.

<u>**Lưu ý:**</u> *Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số* $\left(\frac{a}{\alpha},\frac{1}{a}\right)$ *ta có thể chọn các các cặp số sau:* $\left(\alpha a,\frac{1}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a,\frac{\alpha}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a,\frac{1}{\alpha a}\right)$.

Bài 2: Cho số thực $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a+\frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\\ \frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{1}{4}\Rightarrow\alpha=8$$

Sai lầm thường gặp là: $A=\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}+\frac{7a}{8}\ge 2\sqrt{\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\sqrt{\frac{1}{2a}}+\frac{7a}{8}\ge\sqrt{\frac{1}{2.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{9}{4}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=2$.

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù GTNN của A là $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: " $a \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2a}} \geq \sqrt{\frac{1}{2.2}}$ là sai".

Lời giải đúng: $A = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{6a}{8} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}} + \frac{6a}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6.2}{8} = \frac{9}{4}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$

Vậy GTNN của A là $\frac{9}{4}$

Bài 1: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a + b \leq 1$. Tìm GTNN của $A = ab + \frac{1}{ab}$

Phân tích:

Ta có: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

Sơ đồ điểm rơi: $ab = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ab}{\alpha} = \frac{1}{4\alpha} \\ \frac{1}{ab} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4\alpha} = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{16}$

Giải:

Ta có:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow -ab \geq -\frac{1}{4}$$

$$A = 16ab + \frac{1}{ab} - 15ab \geq 2\sqrt{16ab\frac{1}{ab}} - 15ab \geq 8 - 15.\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{17}{4}$

Bài 2: Cho số thực $a\ge 6$. Tìm GTNN của $A=a^2+\frac{18}{a}$

Phân tích:

Ta có : $A=a^2+\frac{18}{a}=a^2+\frac{9}{a}+\frac{9}{a}$

Dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt GTNN khi $a=6$. Ta có sơ đồ

điểm rơi: $a=6\Rightarrow\begin{cases}\frac{a^2}{\alpha}=\frac{36}{\alpha}\\ \frac{9}{a}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{36}{\alpha}=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha=24$

Giải:

Ta có: $A=\frac{a^2}{24}+\frac{9}{a}+\frac{9}{a}+\frac{23a^2}{24}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{24}.\frac{9}{a}.\frac{9}{a}}+\frac{23a^2}{24}\ge\frac{9}{2}+\frac{23.36}{24}=39$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a^2}{24}=\frac{9}{a}\Leftrightarrow a=6$

Vậy GTNN của A là 39

Bài 3: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c\ge 20$.

Tìm GTNN của $A=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$

Phân tích:

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $a+2b+3c=20$,tại điểm rơi $a=2,b=3,c=4$.

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha}\\ \dfrac{3}{a}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{\alpha}=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{4}{3}$$

$$b=3\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{\beta}=\dfrac{3}{\beta}\\ \dfrac{9}{2b}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{\beta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\beta=2$$

$$c=4\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{c}{\gamma}=\dfrac{4}{\gamma}\\ \dfrac{4}{c}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{4}{\gamma}=1\Rightarrow\gamma=4$$

<u>Giải:</u>

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}\\&\ge 2\sqrt{\frac{3a}{4}.\frac{3}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{2}.\frac{9}{2b}}+2\sqrt{\frac{c}{4}.\frac{4}{c}}+\frac{a+2b+3c}{4}\\&\ge 3+3+2+5=13\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=2,b=3,c=4$

Vậy GTNN của A là 13

Bài 4: Cho3 số thực dương a, b, c thỏa $\begin{cases}ab\ge 12\\ bc\ge 8\end{cases}$.

Chứng minh rằng: $(a+b+c)+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)+\dfrac{8}{abc}\ge\dfrac{121}{12}$

<u>Phân tích:</u>

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $\begin{cases}ab=12\\ bc=8\end{cases}$, tại điểm rơi $a=3,b=4,c=2$.

<u>Giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{a}{18}+\frac{b}{24}+\frac{2}{ab}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{18}.\frac{b}{24}.\frac{2}{ab}}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{2}{ca}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{2}{ca}}=1$$

$$\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{2}{bc}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{16}.\frac{c}{8}.\frac{2}{bc}}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{b}{12}+\frac{8}{abc}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{9}.\frac{c}{6}.\frac{b}{12}.\frac{8}{abc}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\ge 2\sqrt{\frac{13a}{18}.\frac{13b}{24}}\ge 2\sqrt{\frac{13}{18}.\frac{13}{24}.12}=\frac{13}{3}$$
$$\frac{13b}{48}+\frac{13c}{24}\ge 2\sqrt{\frac{13b}{48}.\frac{13c}{24}}\ge 2\sqrt{\frac{13}{48}.\frac{13}{24}.8}=\frac{13}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(a+b+c\right)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}\qquad \text{(đpcm)}$$

✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\le 1$.. Tìm GTNN của $A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Sai lầm thường gặp là: $A=a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 4\sqrt[4]{a.b.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}=4$. Vậy GTNN của A là 4.

Nguyên nhân sai lầm: GTNN của A là 4 $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}\Leftrightarrow$ a $=b=1$. Khi đó $a+b=2\ge 1$

trái giả thuyết .

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$

Lời giải đúng: $A = \left(4a + 4b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 3a - 3b \geq 4\sqrt[4]{4a..4b.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}} - 3(a+b) \geq 8 - 3 = 5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$. Vậy GTNN của A là 5

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c \leq \frac{3}{2}$.

Tìm GTNN của $A = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$a = b = c = \frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$

Giải:

$$A=\left(4a+4b+4c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3a-3b-3c$$
$$\geq 6\sqrt[6]{4a.4b.4c.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}-3(a+b+c)$$
$$\geq 12-\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy GTNN của A là $\frac{13}{2}$

Bài 2: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c\leq\frac{3}{2}$.

Tìm GTNN của $A=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại

$a=b=c=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{\alpha a}=\frac{1}{\alpha b}=\frac{1}{\alpha c}=\frac{2}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=8$

Giải:

$$A=\left(a^2+b^2+c^2+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8c}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8c}\right)+\frac{3}{4a}+\frac{3}{4b}+\frac{3}{4c}$$
$$\geq 9\sqrt[9]{a^2.b^2.c^2.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8c}.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\geq\frac{9}{4}+9.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq\frac{9}{4}+\frac{9}{4}.\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\geq\frac{9}{4}+\frac{9}{4}.2=\frac{27}{4}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{27}{4}$

Bài 3: Cho 2 số thực dương a, b. Tìm GTNN của $A = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a = b$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{2a}{\alpha a} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4$$

Giải:

$$A = \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3.2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Vậy GTNN của A là $\frac{5}{2}$

Bài 4: Cho 3 số thực dương a, b, c.

Tìm GTNN của $A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a = b = c$

Sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b+c}{\alpha a}=\dfrac{c+a}{\alpha b}=\dfrac{a+b}{\alpha c}=\dfrac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha=4$$

<u>Giải:</u>

$$A=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{4a}+\frac{c+a}{4b}+\frac{a+b}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$

$$\geq 6\sqrt[6]{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}.\frac{b+c}{4a}.\frac{c+a}{4b}.\frac{a+b}{4c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$\geq 3+\frac{3}{4}.6.\sqrt[6]{\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{b}{c}}=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy GTNN của A là $\dfrac{15}{2}$

Bài 5: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$.

Tìm GTNN của : $A=\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}$

<u>Phân tích:</u>

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\dfrac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2+b^2}=2 \\ \dfrac{\alpha}{2ab}=2\alpha \end{cases} \Rightarrow 2\alpha=2 \Rightarrow \alpha=1$

<u>Giải:</u>

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\left(a^2+b^2\right)2ab}}\geq 2.\frac{1}{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}=\frac{4}{(a+b)^2}\geq 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 4

Bài 6: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$. Tìm GTNN của $A=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+a^2+b^2}=\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2\alpha ab}=\frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{\alpha}\Rightarrow \alpha=3$

Giải:

$$\begin{aligned} A&=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{\left(1+a^2+b^2\right)6ab}}+\frac{1}{3ab} \\ &\geq 2.\frac{1}{\frac{1+a^2+b^2+6ab}{2}}+\frac{1}{3ab}=\frac{4}{(a+b)^2+1+4ab}+\frac{1}{3ab} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{4}{(a+b)^2+1+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \qquad \left(\text{Do } ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$\geq \frac{4}{2(a+b)^2+1}+\frac{4}{3(a+b)^2}$$

$\geq \frac{4}{2.1+1}+\frac{4}{3.1}=\frac{8}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=6ab \\ a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là $\frac{8}{3}$

Bài 7: Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a+b\leq 1$. Tìm GTNN của $A=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$

Phân tích:

Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán GTNN của A đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2+b^2}=2 \\ \frac{1}{\alpha ab}=\frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow 2=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow \alpha=2$

$a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} 4ab=1 \\ \frac{1}{\beta ab}=\frac{4}{\beta} \end{cases} \Rightarrow 1=\frac{4}{\beta}\Rightarrow \beta=4$

Giải:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+4ab+\frac{1}{4ab}+\frac{1}{4ab} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)2ab}}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{4ab}}+\frac{1}{4ab} \\ &\geq 2.\frac{1}{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}+2+\frac{1}{4ab}=\frac{4}{(a+b)^2}+2+\frac{1}{4ab} \end{aligned}$$

$\geq \frac{4}{(a+b)^2}+2+\frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$ $\left(\text{Do } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$

$\geq \frac{5}{(a+b)^2}+2$

$\geq \frac{5}{1}+2=7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab \\ 4ab=\frac{1}{4ab} \\ a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Vậy GTNN của A là 7

🗁. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho $x\geq 0$, chứng minh rằng:

a) $\sqrt{x}\geq \sqrt{x+1}-1$; b) $\frac{x+5}{\sqrt{x+4}}>2$.

Bài 2: Cho $a,b,c\geq 0$, chứng minh rằng:

a) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$;

b) $\frac{a}{2b+3c}+\frac{2b+3c}{4a}\geq 1$.

Bài 3: Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{1}}{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+...+\frac{\sqrt{200}}{200}>10+5\sqrt{2}$

Bài 4: Chứng minh rằng: $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+...+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}>4$

Bài 5: Cho $a\geq 1$, $b\geq 1$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$

Bài 6: Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn điều kiện $a>c$; $b>c$.

Chứng minh rằng $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq \sqrt{ab}$

HẾT