# BÀI TẬP HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP -TỔ HỢP

*(Có hướng dẫn)*

**Bài 1.** Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách.

**Bài 2.** Xét đa giác đều có n cạnh, biết số đường chéo gấp đôi số cạnh. Tính số cạnh của đa giác đều đó.

**Bài 3.** Tính số các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

**Bài 4.** Tính số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho trong mỗi số đó đều có mặt ít nhất chữ số 1 hoặc 2.

**Bài 5.** Hai nhóm người cần mua nền nhà, nhóm thứ nhất có 2 người và họ muốn mua 2 nền kề nhau, nhóm thứ hai có 3 người và họ muốn mua 3 nền kề nhau. Họ tìm được một lô đất chia thành 7 nền đang rao bán (các nền như nhau và chưa có người mua). Tính số cách chọn nền của mỗi người thỏa yêu cầu trên.

**Bài 6.** Từ 4 chữ số 0, 1, 2, 3 lập thành các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt. Tính tổng các số được thành lập.

**Bài 7.** Tính số hình chữ nhật được tạo thành từ 4 trong 20 đỉnh của đa giác đều có 20 cạnh nội tiếp đường tròn tâm O.

**Bài 8.** Cho đa giác đều có 2n cạnh nội tiếp đường tròn tâm O. Biết số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n đỉnh của đa giác nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n đỉnh của đa giác. Tính số hình chữ nhật.

**Bài 9.** Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Tính số cách chọn 6 em trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn.

**Bài 10.** Cho tập hợp X gồm 10 phần tử khác nhau. Tính số tập hợp con khác rỗng chứa một số chẵn các phần tử của X.

**Bài 11.** Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

**Bài 12.** Giải vô địch bóng đá Quốc gia có 14 đội tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt, biết rằng trong 1 trận đấu: đội thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm và có 23 trận hòa. Tính số điểm trung bình của 1 trận trong toàn giải.

**Bài 13.** Tính số các số tự nhiên gồm 7 chữ số được chọn từ 1, 2, 3, 4, 5 sao cho chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

**Bài 14.** Tính số các số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt và một trong 3 chữ số đầu tiên là 1 được thành lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

**Bài 15.** Từ một nhóm 30 học sinh gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B và 5 học sinh khối C chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và có đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn.

**Bài 16.** Từ một nhóm 12 học sinh gồm 4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B và 4 học sinh khối C chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

**Bài 17.** Tính số tập hợp con của X = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6} chứa 1 mà không chứa 0.

**Bài 18.** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Tính số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên.

**Bài 19.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập thành số tự nhiên chẵn có 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 25000. Tính số các số lập được.

**Bài 20.** Tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập hợp con chứa 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con chứa 2 phần tử của A, tìm số $k \in \ 1;\ 2;\ \ldots;\ n\ $ sao cho số tập hợp con chứa k phần tử của A là lớn nhất.

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1.** Xét 3 loại ghế gồm 1 ghế có 3 chỗ, 1 ghế có 2 chỗ và 2 ghế có 1 chỗ ngồi.
+ Bước 1: do 2 ghế có 1 chỗ không phân biệt nên chọn 2 trong 4 vị trí để sắp ghế 2 và 3 chỗ ngồi có $A_4^2 = 12$ cách.
+ Bước 2: sắp 3 nam vào ghế 3 chỗ có 3! = 6 cách.
+ Bước 3: sắp 2 nữ vào ghế 2 chỗ có 2! = 2 cách.
Vậy có 12.6.2 = 144 cách sắp.

**Bài 2.** Chọn 2 trong n đỉnh của đa giác ta lập được 1 cạnh hoặc đường chéo.
Số cạnh và đường chéo là $C_n^2$. Suy ra số đường chéo là $C_n^2 - n$.

Ta có: $C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} - n = 2n$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 6n \Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy có 7 cạnh.

**Bài 3.** Xét số có 5 chữ số gồm 0, 1, 2, 5 và chữ số "kép" là (3, 4).
+ Loại 1: chữ số hàng trăm ngàn có thể là 0.
- Bước 1: sắp 5 chữ số vào 5 vị trí có 5! = 120 cách.
- Bước 2: với mỗi cách sắp chữ số kép có 2 hoán vị chữ số 3 và 4.
Suy ra có 120.2 = 240 số.
+ Loại 2: chữ số hàng trăm ngàn là 0.
- Bước 1: sắp 4 chữ số vào 4 vị trí còn lại có 4! = 24 cách.
- Bước 2: với mỗi cách sắp chữ số kép có 2 hoán vị chữ số 3 và 4.
Suy ra có 24.2 = 48 số.
Vậy có 240 – 48 = 192 số.

**Bài 4.**
+ Loại 1: chữ số $a_1$ có thể là 0.

Sắp 4 trong 6 chữ số vào 4 vị trí có $A_6^4 = 360$ cách. Sắp 4 chữ số 0, 3, 4, 5 vào 4 vị trí có 4! = 24 cách. Suy ra có 360 – 24 = 336 số.
+ Loại 2: chữ số $a_1$ là 0 (vị trí $a_1$ đã có chữ số 0).
Sắp 3 trong 5 chữ số vào 3 vị trí có $A_5^3 = 60$ cách. Sắp 3 chữ số 3, 4, 5 vào 3 vị trí có 3! = 6 cách. Suy ra có 60 – 6 = 54 số.
Vậy có 336 – 54 = 282 số.

***Cách khác:***
+ Loại 1: Số tự nhiên có 4 chữ số tùy ý.
- Bước 1: Chọn 1 trong 5 chữ số khác 0 sắp vào $a_1$ có 5 cách.
- Bước 2: Chọn 3 trong 5 chữ số khác $a_1$ sắp vào 3 vị trí còn lại có $A_5^3 = 60$ cách.
Suy ra có 5.60 = 300 số.
+ Loại 2: Số tự nhiên có 4 chữ số gồm 0, 3, 4, 5 (không có 1 và 2).
- Bước 1: Chọn 1 trong 3 chữ số khác 0 sắp vào $a_1$ có 3 cách.
- Bước 2: Sắp 3 chữ số còn lại vào 3 vị trí 3! = 6 cách.
Suy ra có 3.6 = 18 số.
Vậy có 300 – 18 = 282 số.

**Bài 5.**
Xem lô đất có 4 vị trí gồm 2 vị trí 1 nền, 1 vị trí 2 nền và 1 vị trí 3 nền.
+ Bước 1: nhóm thứ nhất chọn 1 vị trí cho 2 nền có 4 cách và mỗi cách có 2! = 2 cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có 4.2 = 8 cách chọn nền.
+ Bước 2: nhóm thứ hai chọn 1 trong 3 vị trí còn lại cho 3 nền có 3 cách và mỗi cách có 3! = 6 cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có 3.6 = 18 cách chọn nền.
Vậy có 8.18 = 144 cách chọn nền cho mỗi người.

**Bài 6.**
+ Xét số A có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm có thể là 0.
Từ $A_4^3 = 24$ số A ta lập được 12 cặp số có tổng là 333. Ví dụ 012 + 321 = 333.
Suy ra tổng các số A là 12.333 = 3996.
+ Xét số B có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm là 0.
Từ $A_3^2 = 6$ số B ta lập được 3 cặp số có tổng là 44. Ví dụ 032 + 012 = 44.
Suy ra tổng các số B là 3.44 = 132.
Vậy tổng các số thỏa yêu cầu là 3996 – 132 = 3864.

***Cách khác:***
+ Xét số A có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm có thể là 0.
- Số các số A là $A_4^3 = 24$ số. Số lần các chữ số có mặt ở hàng trăm, hàng chục và đơn vị là như nhau và bằng 24 : 4 = 6 lần.
- Tổng các chữ số hàng trăm (hàng chục, đơn vị) của 24 số là:

$$6.(0 + 1 + 2 + 3) = 36.$$

Suy ra tổng các số A là 36.(100 + 10 + 1) = 3996.
+ Xét số B có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm là 0.
- Số các số B là $A_3^2 = 6$ số. Số lần các chữ số 1, 2, 3 có mặt ở hàng chục và đơn vị là như nhau và bằng 6 : 3 = 2 lần.
- Tổng các chữ số hàng chục (đơn vị) của 6 số là 2.(1 + 2 + 3) = 12.
Suy ra tổng các số B là 12.(10 + 1) = 132.
Vậy tổng các số thỏa yêu cầu là 3996 – 132 = 3864.

**Bài 7.**

Nhận thấy các hình chữ nhật được tạo thành có 2 đường chéo là đường kính của đường tròn. Vẽ đường thẳng d qua tâm O và không qua đỉnh của đa giác đều thì d chia đa giác thành 2 phần, mỗi phần có 10 đỉnh. Suy ra số đường chéo của đa giác đi qua tâm O là 10. Chọn 2 trong 10 đường chéo thì lập được 1 hình chữ nhật.

Vậy có $C_{10}^2 = 45$ hình chữ nhật.

**Bài 8.**

+ Lý luận tương tự câu 65 ta có $C_n^2$ hình chữ nhật.

+ Số tam giác tạo thành từ 3 trong 2n đỉnh của đa giác là $C_{2n}^3$.

+ Từ giả thiết ta có: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!\,(2n-3)!} = 20\dfrac{n!}{2!\,(n-2)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8.$$

Vậy có $C_8^2 = 28$ hình chữ nhật.

**Bài 9.**

***Cách giải sai:***

+ Chọn tùy ý 6 em trong đội có $C_{18}^6 = 18564$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 11 có $C_{13}^6 = 1716$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 10 có $C_{12}^6 = 924$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 11 hoặc khối 10 có $C_{11}^6 = 462$ cách.

Vậy có 18564 – 1716 – 924 – 462 = 15462 cách chọn!

Sai ở chỗ lớp 12 và lớp 11 ta đã tính lặp lại.

***Cách giải đúng:***

+ Chọn tùy ý 6 em trong đội có $C_{18}^6 = 18564$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 11 có $C_{13}^6 = 1716$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 và khối 10 có $C_{12}^6 - C_7^6 = 917$ cách.

+ Chọn 6 em trong đội thuộc khối 11 và khối 10 có $C_{11}^6 - C_6^6 = 461$ cách.

Vậy có 18564 – 1716 – 917 – 461 = 15454 cách chọn.

**Bài 10.**

+ Số tập hợp con chứa 2 phần tử của X là $C_{10}^2 = 45$.

+ Số tập hợp con chứa 4 phần tử của X là $C_{10}^4 = 210$.

+ Số tập hợp con chứa 6 phần tử của X là $C_{10}^6 = 210$.

+ Số tập hợp con chứa 8 phần tử của X là $C_{10}^8 = 45$.

+ Số tập hợp con chứa 10 phần tử của X là 1.

Vậy có 45 + 210 + 210 + 45 + 1 = 511 tập hợp.

**Bài 11.**

+ Trường hợp 1: chọn 4 bi đỏ hoặc trắng có $C_9^4 = 126$ cách.

+ Trường hợp 2: chọn 4 bi đỏ và vàng hoặc 4 bi vàng có $C_{10}^4 - C_4^4 = 209$ cách.

+ Trường hợp 3: chọn 4 bi trắng và vàng có $C_{11}^4 - \ C_5^4 + C_6^4 \ = 310$ cách.

Vậy có 126 + 209 + 310 = 645 cách.

***Cách khác:***

+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 15 viên bi có $C_{15}^4 = 1365$ cách.
+ Loại 2: chọn đủ cả 3 màu có 720 cách gồm các trường hợp sau:
- Chọn 2 bi đỏ, 1 bi trắng và 1 bi vàng có 180 cách.
- Chọn 1 bi đỏ, 2 bi trắng và 1 bi vàng có 240 cách.
- Chọn 1 bi đỏ, 1 bi trắng và 2 bi vàng có 300 cách.

Vậy có 1365 – 720 = 645 cách.

**Bài 12.**

+ Do thi đấu vòng tròn 1 lượt nên 2 đội bất kỳ chỉ đấu với nhau đúng 1 trận.

Số trận đấu của giải là $C_{14}^2 = 91$.

+ Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận hòa là 2 nên tổng số điểm của 23 trận hòa là 2.23 = 46.
+ Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận không hòa là 3 nên tổng số điểm của 68 trận không hòa là 3.68 = 204.

Vậy số điểm trung bình của 1 trận là $\dfrac{46+204}{91} = \dfrac{250}{91}$ điểm.

**Bài 13.**

Xem số có 7 chữ số như 7 vị trí thẳng hàng.

+ Bước 1: chọn 2 trong 7 vị trí để sắp 2 chữ số 2 (không hoán vị) có $C_7^2 = 21$ cách.

+ Bước 2: chọn 3 trong 5 vị trí còn lại để sắp 3 chữ số 3 (không hoán vị) có $C_5^3 = 10$ cách.

+ Bước 3: chọn 2 trong 3 chữ số 1, 4, 5 để sắp vào 2 vị trí còn lại (có hoán vị) có $A_3^2 = 6$ cách.

Vậy có 21.10.6 = 1260 số.

**Bài 14.**

+ Loại 1: chữ số $a_1$ có thể là 0.
- Bước 1: chọn 1 trong 3 vị trí đầu để sắp chữ số 1 có 3 cách.
- Bước 2: chọn 4 trong 7 chữ số (trừ chữ số 1) để sắp vào các vị trí còn lại có $A_7^4 = 840$ cách. Suy ra có 3.840 = 2520 số.

+ Loại 2: chữ số $a_1$ là 0.
- Bước 1: chọn 1 trong 2 vị trí thứ 2 và 3 để sắp chữ số 1 có 2 cách.
- Bước 2: chọn 3 trong 6 chữ số (trừ 0 và 1) để sắp vào các vị trí còn lại có $A_6^3 = 120$ cách. Suy ra có 2.120 = 240 số.

Vậy có 2520 – 240 = 2280 số.

**Bài 15.**

+ Loại 1: Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh khối B hoặc khối A có $C_5^2 C_{25}^{13}$ cách.

+ Loại 2: Chọn 2 học sinh khối C, 13 học sinh khối B và khối A không thỏa yêu cầu.

- Trường hợp 1: Chọn 2 học sinh khối C, 10 học sinh khối B và 3 học sinh khối A có $C_5^2 C_{10}^{10} C_{15}^3$ cách.

- Trường hợp 2: Chọn 2 học sinh khối C, 9 học sinh khối B và 4 học sinh khối A có $C_5^2 C_{10}^9 C_{15}^4$ cách.

Vậy có $C_5^2 \ \ C_{25}^{13} - C_{10}^{10} C_{15}^3 - C_{10}^9 C_{15}^4 \ \ = 51861950$ cách.

**Bài 16.**

**+ Trường hợp 1**: 1 khối có 3 học sinh và 2 khối còn lại mỗi khối có 1 học sinh.
- Bước 1: chọn 1 khối có 3 học sinh có 3 cách.
- Bước 2: trong khối đã chọn ta chọn 3 học sinh có $C_4^3 = 4$ cách.
- Bước 3: 2 khối còn lại mỗi khối có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.4.4.4 = 192 cách.

**+ Trường hợp 2**: 2 khối có 2 học sinh và khối còn lại có 1 học sinh.
- Bước 1: chọn 2 khối có 2 học sinh có $C_3^2 = 3$ cách.
- Bước 2: trong 2 khối đã chọn ta chọn 2 học sinh có $C_4^2 = 6$ cách.
- Bước 3: khối còn lại có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.6.6.4 = 432 cách.
Vậy có 192 + 432 = 624 cách.

***Cách khác:***

+ Chọn 5 học sinh tùy ý có $C_{12}^5 = 792$ cách.

+ Chọn 5 học sinh khối A và B (tương tự khối A và C, B và C) có $C_8^5 = 56$ cách.

Vậy có 792 – 3.56 = 624 cách.

**Bài 17.**

+ Số tập hợp con không chứa phần tử nào của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^0$.

+ Số tập hợp con chứa 1 phần tử của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^1$.

+ Số tập hợp con chứa 2 phần tử của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^2$.

+ Số tập hợp con chứa 3 phần tử của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^3$.

+ Số tập hợp con chứa 4 phần tử của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^4$.

+ Số tập hợp con chứa 5 phần tử của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^5$.

Suy ra số tập hợp con của $X \setminus \{0;\ 1\}$ là $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32$. Ta hợp các tập hợp con này với {1} thì được 32 tập hợp thỏa bài toán.

**Bài 18.**

***Cách giải sai:***

+ Trường hợp 1: chọn 4 học sinh lớp A hoặc lớp B có $C_9^4$ cách.

+ Trường hợp 2: chọn 4 học sinh lớp A hoặc lớp C có $C_8^4$ cách.

+ Trường hợp 3: chọn 4 học sinh lớp B hoặc lớp C có $C_7^4$ cách.

Vậy có $C_9^4 + C_8^4 + C_7^4 = 231$ cách!

Sai do ta đã tính lặp lại trường hợp chỉ chọn 4 học sinh lớp A và trường hợp chỉ chọn 4 học sinh lớp B.

***Cách giải sai khác:***

+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh có $C_{12}^4 = 495$ cách.

+ Loại 2: chọn 4 học sinh có mặt cả 3 lớp.
- Bước 1: chọn 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có:

5.4.3 = 60 cách.
- Bước 2: chọn 1 học sinh trong 9 học sinh còn lại của 3 lớp có 9 cách.

Suy ra có 9.60 = 540 cách chọn loại 2 (lớn hơn số cách chọn loại 1!).

Sai là do khi thực hiện bước 1 và bước 2, vô tình ta đã tạo ra thứ tự trong cách chọn. Có nghĩa là từ tổ hợp chuyển sang chỉnh hợp!

***Cách giải đúng:***

+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh có $C_{12}^4 = 495$ cách.

+ Loại 2: chọn 4 học sinh có mặt cả 3 lớp, ta có 3 trường hợp sau:

- Chọn 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $C_5^2.4.3 = 120$ cách.

- Chọn 1 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $5.C_4^2.3 = 90$ cách.

- Chọn 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C có $5.4.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy có 495 – (120 + 90 + 60) = 225 cách.

**Bài 19.**

Gọi số cần lập là $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $1 \le a_1 \le 2$.

+ Trường hợp 1: $a_1 = 1$.

Có 4 cách chọn $a_5$ và $A_5^3$ cách chọn các chữ số còn lại nên có $4.A_5^3 = 240$ số.

+ Trường hợp 2: $a_1 = 2$, $a_2$ lẻ.

Có 2 cách chọn $a_2$, 3 cách chọn $a_5$ và $A_4^2$ cách chọn các chữ số còn lại nên có $2.3.A_4^2 = 72$ số.

+ Trường hợp 3: $a_1 = 2$, $a_2$ chẵn.

Có 2 cách chọn $a_2$, 2 cách chọn $a_5$ và $A_4^2$ cách chọn các chữ số còn lại nên có $2.2.A_4^2 = 48$ số.

Vậy có 240 + 72 + 48 = 360 số.

**Bài 20.**

Số tập hợp con chứa k phần tử của A là $C_n^k$. Ta có:

$$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 240 \Leftrightarrow n = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{18}^k \ge C_{18}^{k-1} \\ C_{18}^k \ge C_{18}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{18!}{k!(18-k)!} \ge \dfrac{18!}{(k-1)!(19-k)!} \\ \dfrac{18!}{k!(18-k)!} \ge \dfrac{18!}{(k+1)!(17-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19-k \ge k \\ k+1 \ge 18-k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{2} \le k \le \frac{19}{2}.$$

Vậy k = 9.