Hướng dẫn giải Bài tập Hoán vị - Chỉnh hợp – Tổ hợp

1. BÀI TẬP HOÁN VỊ

1.1. Có 6 con tem khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách dán 6 con tem lên 6 bì thư đã cho, biết 1 bì thư chỉ dán đúng 1 tem ?

Giải

Để dán 6 con tem khác nhau, ta chọn 6 phong bì từ 6 phong bì đã cho rồi sắp chúng theo một thứ tự nhất định. Vậy có $P_6 = 6! = 720$ *cách*

1.2. Cần sắp xếp 5 học sinh *A, B, C, D, E* thành một dãy hàng ngang.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai học sinh *A* và *B* luôn đứng ở hai đầu hàng ?

Giải

a) Để xếp 5 học sinh theo một dãy hàng ngang, ta chọn 5 học sinh từ 5 học sinh đã cho rồi sắp theo một thứ tự. Vậy có $P_5 = 5! = 120$ *cách.*

b) Do 2 bạn A, B đứng đầu hàng nên có 2! = 2 cách xếp 2 bạn đứng đầu. (có thể A hoặc B đứng đầu).

3 vị trí còn lại ta chọn 3 học sinh còn lại và xếp theo một thứ tự nên có 3! = 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có: 2!.3!=2.6=12 cách.

1.3. Từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ ? Bao nhiêu số không chia hết cho 5 ?

Giải

Để có số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau ta chọn 5 chữ số từ 5 chữ số đã cho. Nên có $P_5 = 5! = 120$ số.

Gọi $x = \overline{abcde}$ là số có 5 chữ số khác nhau.

- Nếu *x* là số lẻ thì $e \in \{1;3;5\}$ nên có 3 cách chọn

Bốn số còn lại abcd là hoán vị của 4 chữ số còn lại (vì đã loại đi số *e*). Nên có 4! cách chọn.

Vậy theo qui tắc nhân ta có 3.4!=3.24=72 số lẻ

- Nếu $x \vdots 5$ thì e=5 nên có 1 cách chọn.

Bốn số *abcd* còn lại là hoán vị của 4 chữ số còn lại (vì loại đi 5). Nên có 4! cách sắp xếp.

Theo qui tắc nhân ta có 1.4!=24 số chia hết cho 5.

1.4. Cần sắp xếp 3 học sinh nữ và 5 học sinh nam thành một hàng dọc.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu 3 học sinh nữ luôn đứng liền nhau ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu học sinh đứng đầu hàng là học sinh nữ và học sinh cuối hàng là học sinh nam ?

Giải

a) Trước tiên ta chọn 5 bạn nam xếp hàng vào 5 vị trí nên có 5! cách xếp.

Giữa 2 bạn nam có 1 khoảng trống, nên 5 bạn nam sẽ có 4 khoảng trống, cộng thêm vị trí đầu hàng và cuối hàng nên có tổng cộng 6 khoảng trống.

Để cho 3 bạn nữ luôn đứng liền nhau, ta chọn 1 trong 6 khoảng trống đó để xếp 3 bạn nữ vào, nên có 6 cách.

Khi đã chọn được 1 khoảng trống, để xếp 3 bạn nữ đứng liền nhau ta có 3! cách.

Theo qui tắc nhân ta có: 5!.6.3!=4320 cách.

b) Chọn 1 học sinh nữ trong 3 học sinh nữ để đứng đầu hàng ta có 3 cách chọn.

Chọn 1 học sinh nam trong 5 học sinh nam để đứng cuối hàng ta có 5 cách chọn.

Còn lại 6 vị trí đứng giữa ta chọn 6 bạn học sinh còn lại và xếp vào, nên có 6! cách.

Theo qui tắc nhân ta có: 3.5.6! = 10800 cách.

1.5.Có 4 nữ sinh tên là *Huệ, Hồng, Lan, Hương* và 4 nam sinh là *An, Bình, Hạnh, Phúc* cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp nếu nam và nữ ngồi xen kẽ nhau nhưng hai bạn *Hồng* và *An* không chịu ngồi cạnh nhau ?

Giải

a) Trước tiên, ta để ý rằng khi đã xếp 8 bạn nam, nữ trên ngồi xen kẽ với nhau quanh bàn tròn, sau đó tất cả cùng đứng lên và đổi vị trí theo một chiều nhất định thì vị trí xung quanh bàn tròn vẫn không đổi.

Do đó, ta chọn một bạn nam xếp vào trước làm mốc. Rồi xếp 3 bạn nam còn lại vào 3 vị trí xung quanh bàn tròn nên có 3! cách.

Khi xếp 4 bạn nam vào bàn tròn, giữa 2 bạn nam có một khoảng trống, vậy có tổng cộng 4 khoảng trống. Chọn 4 bạn nữ, xếp vào 4 khoảng trống có 4! cách.

Theo qui tắc nhân ta có 3!.4! = 144 cách

www.gvhieu.com

b) Trước tiên ta xếp 2 bạn Hồng và An ngồi cạnh nhau, có 2 cách xếp.

Chọn 3 bạn nam còn lại xếp vào 3 vị trí có 3!cách.

Chọn 3 bạn nữ xếp vào 3 vị trí xen kẽ có 3!cách.

Theo qui tắc nhân ta có 2.3!.3!=72 cách.

Vậy nếu xếp Hồng và An ngồi cạnh nhau thì có 72 cách. Nên số cách xếp Hồng và An không ngồi cạnh nhau là:

Số cách xếp xen kẽ - số cách xếp ngồi cạnh nhau = 144 – 72 =72 cách sắp xếp.

2. CHỈNH HỢP

2.1. Không dùng máy tính bỏ túi, hãy tính:

a) $A_{10}^1 + A_8^3$ *b)* $\dfrac{A_9^2 + A_8^3}{A_6^4 + 2A_4^4}$ *c)* $\dfrac{A_6^4 + 3A_6^3 + A_5^3}{3A_5^2 - A_7^4}$

Giải

a) 346 b) 1 c) -1

2.2. Một nhà hàng có 5 món ăn chủ lực, cần chọn 2 món ăn khác nhau cho mỗi ngày, một món buổi trưa và một món buổi chiều. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Để có 2 món ăn, một món cho buổi trưa và một món cho buổi chiều ta chọn 2 món từ 5 món ăn chủ lực rồi xếp chúng theo một thứ tự. Vậy có $A_5^2 = 20$ *cách.*

2.3. Ở trường phổ thông có các môn học là Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Sử, Địa, Tiếng Anh, Công nghệ, Tin học, Giáo dục công dân, Giáo dục quốc phòng và Thể dục. Cần sắp lịch cho một ngày học có 5 tiết thuộc 5 môn khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

Giải

Ta thấy có tổng cộng 13 môn học khác nhau.

Để sắp thời khóa biểu cho một ngày có 5 tiết học, ta chọn 5 môn từ 13 môn học rồi xếp chúng theo một thứ tự, nên có $A_{13}^5 = 154440$

2.4. Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để làm quà tặng cho 3 học sinh, mỗi em một cuốn sách và một cây bút máy. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Chọn 3 từ 10 cuốn sách khác nhau có A_{10}^3

Chọn 3 từ 7 cây bút máy khác nhau có A_7^3

Theo qui tắc nhân ta có: $A_{10}^3.A_7^3 = 151200$

2.5. Một lớp có 15 học sinh nam và 20 nữ. Trong buổi tập trung lớp đầu năm, giáo viên chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp: 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thủ quỹ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu lớp trưởng là nam.

c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 bạn được chọn phải có ít nhất 1 nữ.

Giải

a) Để có 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 thủ quỹ ta chọn 3 học sinh từ 35 học sinh rồi sắp theo 1 thứ tự. Đây chính là chỉnh hợp chập 3 của 35: $A_{35}^3 = 39270$

b) Lớp trưởng là nam có 15 cách chọn.

Hai bạn còn lại được chọn từ 34 bạn còn lại rồi xếp theo một thứ tự nên có A_{34}^2

Theo qui tắc nhân ta có: $15.A_{34}^2 = 16830$ *cách chọn.*

c) Giả sử 3 bạn được chọn đều là nam. Khi đó có $A_{15}^3 = 2730$.

Vậy số cách chọn sao cho có ít nhất 1 nữ bằng Tổng số cách – số cách chọn cả 3 đề là nam =39270 – 2730 = 36540.

2.6. Trong một cuộc đua ngựa gồm 10 con. Hỏi có mấy cách để 10 con ngựa này về đích nhất, nhì, ba.

Giải

Để nhận giải nhất, nhì, ba ta chọn 3 con ngựa từ 10 con ngựa rồi xếp theo một thứ tự, nên có $A_{10}^3 = 720$

2.7. Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong 10 bài hát và 3 tiết mục múa trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu các bài hát được xếp kế nhau và các tiết mục múa được xếp kế nhau ?

Giải

Chọn 7 bài hát từ 10 bài rồi xếp thứ tự, có A_{10}^7

Chọn 3 mục múa từ 5 rồi xếp thứ tự nên có A_5^3

Trường hợp 1 : hát trước, múa sau có: $A_{10}^7.A_5^3$

Trường hợp 2 : múa trước, hát sau có: $A_5^3.A_{10}^7$

Theo qui tắc cộng có: $A_{10}^7.A_5^3 + A_5^3.A_{10}^7 = 72,576,000$

2.8. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

a) Có 5 chữ số khác nhau ?

b) Có 6 chữ số khác nhau và số đó phải là số lẻ ?

www.gvhieu.com

c) Có 3 chữ số khác nhau và số đó chia hết cho 3 ?

Giải

a) Để có số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau ta chọn 5 chữ số từ 9 chữ số đã cho rồi xếp thứ tự, nên có:

$A_9^5 = 15120$ *số*

b) Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ *là số có 6 chữ số khác nhau.*

Để x là số lẻ thì $a_6 \in \{1;3;5;7;9\}$ *nên có 5 cách chọn.*

Từ 9 chữ số đã cho, a_6 *đã chọn 1 chữ số nên còn lại 8.*

Để có 5 chữ số còn lại $a_1a_2a_3a_4a_5$ *ta chọn 5 chữ số từ 8 chữ số còn lại rồi xếp thứ tự nên có:* A_8^5

Theo qui tắc nhân ta có: $5.A_8^5 = 33600$ *số.*

c) Gọi $x = \overline{abc}$ *là số có 3 chữ số khác nhau.*

Để x chia hết cho 3 thì $a+b+c \vdots 3$

Do $a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *nên để* $a+b+c \vdots 3$ *thì tổng* $a+b+c$ *chỉ có thể bằng 6,9,12,15,18,21,24*

- *Nếu* $a+b+c=6$ *thì:*

$a,b,c \in \{1,2,3\}$ *nên có* $3!$ *số*

- *Nếu* $a+b+c=9$ *thì*

$a,b,c \in \{1,2,6\};\{1,3,5\};\{2,3,4\}$ *có:* $3.3!$ *số.*

- *Nếu* $a+b+c=12$ *thì:*

$a,b,c \in \{1,2,9\};\{1,3,8\};\{1,4,7\}$
$\{1,5,6\};\{2,3,7\};\{2,4,6\};\{3,4,5\}$ *có* $7.3!$ *số.*

- *Nếu* $a+b+c=15$ *thì:*

$a,b,c \in \{1,5,9\};\{1,6,8\};\{2,4,9\}$
$\{2,5,8\};\{2,6,7\};\{3,4,8\};\{3,5,7\};\{4,5,6\}$ *có* $8.3!$ *số.*

- *Nếu* $a+b+c=18$ *thì:*

$a,b,c \in \{1,8,9\};\{2,7,9\};\{3,6,9\}$
$\{3,7,8\};\{4,5,9\};\{4,6,8\};\{5,6,7\}$ *có* $7.3!$ *số*

- *Nếu* $a+b+c=21$ *thì:*

$a,b,c \in \{4,8,9\};\{5,7,9\};\{6,7,8\}$ *có* $3.3!$ *số*

- *Nếu* $a+b+c=24$ *thì* $a,b,c \in \{7,8,9\}$ *có* $3!$ *số.*

Theo qui tắc cộng ta có: $30.3!$ *số thỏa yêu cầu.*

2.9. Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Trong các số đó có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ, bao nhiêu số chia hết cho 5 ?

Giải:

Gọi $x = \overline{abcde}$ *là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.*

Vì $a \neq 0$ *nên* $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$*, có 9 cách chọn.*

Các chữ số bcde có được do chọn 4 chữ số từ 9 chữ còn lại rồi xếp thứ tự nên có A_9^4 *cách chọn.*

Theo qui tắc nhân ta có $9.A_9^4 = 27126$ *số.*

<u>Số các chữ số chẵn:</u>

Để x là số chẵn thì $e \in \{0,2,4,6,8\}$

TH1: $e=0$ *thì abcd là chỉnh hợp chập 4 của 9 chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nên có:* A_9^4 *cách chọn.*

TH2: $e \in \{2,4,6,8\}$ *thì e có 4 cách chọn.*

Khi đó $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{e\}$ *nên chữ số a có 8 cách chọn.*

Các chữ số còn lại bcd có được do chọn 3 chữ số từ 8 chữ số trong $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{a,e\}$ *nên có* A_8^3

Theo qui tắc nhân ta có: $4.8.A_8^3$

Theo qui tắc cộng ta có $A_8^4 + 4.8.A_8^3 = 12432$

<u>Số các chữ số lẻ:</u>

= Các số có 5 chữ số - các số chẵn có 5 chữ số

= 27126 – 12432 = 14694

<u>Các số chia hết cho 5:</u>

Số x chia hết cho 5 khi e = 0 hoặc e = 5

TH1: $e=0$ *số cách chọn abcd là* A_9^4

TH2: $e=5$

Số cách chọn của a là 8 (vì loại 5 và 0)

Số cách chọn bcd là A_8^3

Vậy có : $A_9^4 + 8.A_8^3 = 5712$ *số chia hết cho 5*

2.10. Có bao nhiêu số tự nhiên có các chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

Giải

Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được các loại số tự nhiên có các chữ số khác nhau là: loại 1 chữ số; loại 2 chữ số; loại 3 chữ số; loại 4 chữ số; loại 5 chữ số; loại 6 chữ số Do đó ta có:

$6 + A_6^2 + A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 + A_6^6 = 1956$ *số.*

2.11. Từ X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Giải:

Gọi $x = \overline{abcde}$ *là số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập thành từ tập X.*

www.gvhieu.com

Chữ số $a \in X \setminus \{0\}$ *có 6 cách chọn.*

Các chữ $b,c,d,e \in X \setminus \{a\}$ *có* A_6^4 *cách chọn.*

Theo qui tắc nhân ta có: $6.A_6^4 = 2160$ *số có 5 chữ số.*

Giả sử rằng x là số có 5 chữ số và không có chứa chữ số 5. Khi đó x được chọn từ {0,1,2,3,4,6}

Chữ số a có 5 cách chọn

Các chữ bcde có A_5^4 *cách chọn*

Theo qui tắc nhân ta có $5.A_5^4 = 600$

Vậy số có chứa ít nhất 1 chữ số 5 sẽ bằng:

Các số có 5 chữ số - số 5 chữ số không chứa số 5

= 2160 – 600 = 1560

2.12. Giải phương trình: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$

Giải

Điều kiện: $n \ge 6$, $n \in \mathbb{N}$

$$A_n^5 = 30A_{n-2}^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = 30\frac{(n-2)!}{(n-2-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-5)(n-6)!} = 30\frac{(n-2)!}{(n-6)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{(n-5)} = 30 \Leftrightarrow n^2 - n = 30n - 150$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 31n + 150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 25 \\ n = 6 \end{array}\right.$$

2.13. Giải phương trình $P_x.A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$

Giải

Điều kiện: $x \ge 2$, $x \in \mathbb{N}$

$$P_x.A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$$

$$\Leftrightarrow x!\frac{x!}{(x-2)!} + 72 = 6\left(\frac{x!}{(x-2)!} + 2x!\right)$$

$$\Leftrightarrow x!x(x-1) + 72 = 6(x(x-1) + 2x!)$$

$$\Leftrightarrow x!x(x-1) - 12x! = 6x(x-1) - 72$$

$$\Leftrightarrow x!(x^2 - x - 12) = 6(x^2 - 6x - 12)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 12)(x! - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 12 = 0 \\ x! - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3\ (loai) \\ x = 3 \end{array}\right.$$

2.14. Giải bất phương trình $A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x$

Giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}; x \ge 3$

$$A_x^3 + 5A_x^2 \le 21x \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-3)!} + 5\frac{x!}{(x-2)!} \le 21x$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + 5x(x-1) \le 21x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + 5(x-1) \le 21 \qquad (do\ x \ge 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + 5x - 5 - 21 \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -6 \le x \le 4$$

Vậy $x = 3 \vee x = 4$

3. TỔ HỢP

3.1. Không dùng máy tính, hãy tính:

a) $C_{21}^2 + C_5^2$ b) $C_{10}^1.C_{11}^3 + 2C_{10}^{10}$

Giải

a) 220 *b) 1652*

3.2. Một tổ có 8 học sinh, cần chọn ra 2 bạn trực lớp (bạn nào cũng được). Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

Chọn 2 bạn từ 8 bạn để trực nhật lớp có $C_8^2 = 28$

3.3. Một bác nông dân có 6 con bò, 4 con heo. Một nông dân khác đến hỏi mua 2 con bò và 3 con heo. Hỏi có mấy cách chọn mua ?

Giải

Mua 2 con bò từ 6 con bò có C_6^2 *cách chọn*

Mua 3 con heo từ 4 con heo có C_4^3 *cách chọn*

Theo qui tắc nhân ta có $C_6^2.C_4^3 = 60$ *cách chọn.*

3.4. Một lớp có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 6 học sinh tham gia trồng cây. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Không phân biệt nam, nữ ?

b) Có 4 nam và 2 nữ ?

c) Có ít nhất là 3 học sinh nam ?

Giải

Nhóm tham gia trồng cây gồm 6 học sinh, không phân biệt thứ tự.

a) Để có nhóm 6 học sinh ta chọn 6 học sinh từ 40 học sinh của lớp, nên có $C_{40}^6 = 3,838,380$

b) Nhóm có 6 người

Chọn 4 nam từ 25 nam có C_{25}^4 *cách chọn*

Chọn 2 nữ từ 15 nữ có C_{15}^2 *cách chọn.*

www.gvhieu.com

Theo qui tắc nhân ta có $C_{25}^4.C_{15}^2 = 1,328,250$ *cách.*

c) Nhóm 6 người có ít nhất 3 nam có thể xảy ra:

TH1: Có 3 nam 3 nữ, ta có $C_{15}^3.C_{25}^3$ *cách chọn.*

TH2: Có 4 nam 2 nữ, ta có $C_{25}^4.C_{15}^2$ *cách chọn.*

TH3: Có 5 nam 1 nữ, ta có $C_{25}^5.C_{15}^1$ *cách chọn.*

TH4: Có 6 nam, ta có C_{25}^6 *cách chọn.*

Theo qui tắc cộng ta có:

$C_{15}^3.C_{25}^3 + C_{25}^4.C_{15}^2 + C_{25}^5.C_{15}^1 + C_{25}^6$

3.5. Một chi đoàn có 25 đoàn viên trong đó 10 nữ. Muốn chọn 1 tổ công tác có 7 người. Có bao nhiêu cách chọn nếu:

a) Trong tổ có đúng 3 nữ ?

b) Trong tổ có ít nhất 2 nữ ?

Giải

a) Một tổ công tác 7 người, có đúng 3 nữ thì có 4 nam. Chọn 3 nữ từ 10 nữ có C_{10}^3 *cách chọn.*

Chọn 4 nam từ 15 nam ta có C_{15}^4 *cách chọn.*

Theo qui tắc nhân ta có $C_{10}^3.C_{15}^4 = 163,800$

b) Chọn 1 tổ 7 người có ít nhất 2 nữ thì:

TH1: 2 nữ 5 nam, ta có $C_{10}^2.C_{15}^5$ *cách chọn*

TH2: 3 nữ 4 nam, ta có $C_{10}^3.C_{15}^4$

...

Làm tương tự, cuối cùng theo qui tắc cộng ta có:

$C_{10}^2.C_{15}^5 + C_{10}^3.C_{15}^4 + C_{10}^4.C_{15}^3 + C_{10}^5.C_{15}^2 + C_{10}^6.C_{15}^1 + C_{10}^7$

3.6. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập 1 tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư là tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Giải

Chọn 1 kỹ sư trong 3 kỹ sư có C_3^1 *cách chọn.*

Chọn 1 công nhân làm tổ phó tư 10 công nhân có C_{10}^1

Chọn 3 công nhân làm tổ viên từ 9 công nhân còn lại ta có C_9^3 *cách chọn.*

Theo qui tắc nhân ta có: $C_3^1.C_{10}^1.C_9^3 = 2520$ *cách chọn.*

3.7. Một đội văn nghệ gồm 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cô giáo muốn chọn ra 1 tốp ca gồm 5 em trong đó có ít nhất là 2 em nam và 2 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải

Chọn 1 tốp ca có 5 học sinh trong đó có ít nhất 2 nam, 2 nữ thì có các trường hợp:

TH1: 3 nam, 2 nữ, ta có $C_{10}^3.C_{10}^2$ *cách chọn.*

TH2: 2 nam, 3 nữ, ta có $C_{10}^2.C_{10}^3$ *cách chọn.*

Theo qui tắc cộng ta có $C_{10}^3.C_{10}^2 + C_{10}^2.C_{10}^3$

3.8. Một đội cảnh sát gồm có 9 người. Trong ngày cần 3 người làm nhiệm vụ tại địa điểm A, 2 người làm tại B còn lại 4 người trực đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ?

Giải

Chọn 3 người từ 9 người để làm nhiệm vụ tại điểm A ta có C_9^3 *cách chọn.*

Chọn 2 người từ 6 người còn lại làm nhiệm vụ tại điểm B có C_6^2 *cách chọn.*

4 người còn lại trực đồn có 1 cách chọn.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $C_9^3.C_6^2.1 = 1260$

3.9. Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lí nam. Muốn lập 1 đoàn công tác có 3 người gồm cả nam lẫn nữ, cần có cả nhà toán học lẫn vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải

Lập 1 đoàn công tác gồm 3 người có cả nam, nữ và có cả toán lẫn vật lí. Ta có các trường hợp sau:

TH1: 1 nhà toán học nam, 1 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý nam, ta có $C_5^1.C_3^1.C_4^1$ *cách chọn.*

TH2: 2 nhà toán học nữ, 1 nhà vật lý nam, có $C_3^2.C_4^1$

TH3: 1 nhà toán học nữ, 2 nhà vật lý nam, có $C_3^1.C_4^2$

Theo qui tắc cộng ta có:

$C_5^1.C_3^1.C_4^1 + C_3^2.C_4^1 + C_3^1.C_4^2 = 90$ *cách chọn.*

3.10.*** Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2 ?

Giải

Đề kiểm tra có 5 câu, phải có 3 loại câu khó, trung bình, dễ và phải có ít nhất 2 câu dễ, có thể xảy ra các trường hợp sau đây:

www.gvhieu.com

TH1: 2 câu dễ, 3 câu còn lại có cả khó, lẫn trung bình.

Chọn 2 câu dễ từ 15 câu có C_{15}^2 *cách chọn*

Nếu chỉ chọn 3 câu khó từ 5 câu khó ta có C_5^3 *cách.*

Nếu chỉ chọn 3 câu trung bình từ 10 câu ta có C_{10}^3

Nếu chọn 3 câu từ 15 câu (khó+trung bình) có C_{15}^3

Vậy chọn 3 câu có cả khó lẫn trung bình từ 15 câu ta có: C_{15}^3 - C_{10}^3 - C_5^3 = *325 cách chọn.*

Theo qui tắc nhân ta có: $C_{15}^2.325$ *cách chọn.*

TH2: 3 câu dễ, 1 câu khó, 1 câu trung bình ta có:

$C_{15}^3.C_5^1.C_{10}^1 = 22750$ *cách chọn.*

Cuối cùng, áp dụng quy tắc cộng ta có:

$C_{15}^2.325 + 22750 = 56875$ *cách chọn.*

3.11. Cho 15 điểm khác nhau nằm trên mặt phẳng. Không có bất cứ 3 điểm nào trong số đó thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác, tứ giác có đỉnh là một trong các điểm đã cho.

Giải

Để lập 1 tam giác, ta chọn 3 điểm từ 15 điểm đã cho nên có $C_{15}^3 = 455$ *(tam giác)*

Để lập 1 tứ giác, ta chọn 4 điểm từ 15 điểm đã cho nên có $C_{15}^4 = 1365$ *(tứ giác)*

3.12. Có 6 đường thẳng song song và 12 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành ?

Giải

Để có 1 hình bình hành, ta cần chọn ra 2 đường thẳng song song, rồi chọn tiếp 2 đường thẳng song song và cắt 2 đường đã chọn trước đó.

Vậy ta có $C_6^2.C_{12}^2 = 990$ *hình bình hành.*

3.13. Cho hai đường thẳng song song *a* và *b*. Trên *a* có 10 điểm phân biệt và trên b có 13 điểm phân biệt.

a) Có bao nhiêu hình thang được tạo thành từ các điểm nằm trên hai đường thẳng đã cho.

b) Có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm nằm trên hai đường thẳng đã cho.

Giải

a) Để có được 1 hình thang ta chọn từ đường thẳng a hai điểm, chọn từ đường thẳng b hai điểm.

Vậy có $C_{10}^2.C_{13}^2 = 3510$ *cách chọn.*

b) TH1: tam giác có 2 đỉnh nằm trên a, một đỉnh nằm trên b, ta có $C_{10}^2.C_{13}^1 = 585$ *tam giác.*

TH2: tam giá có 1 đỉnh thuộc a, 2 đỉnh thuộc b, ta có : $C_{10}^1.C_{13}^2 = 780$.

Theo qui tắc cộng ta có: 585 + 780 = 1365

3.14.* Một đoàn tàu có 3 toa chở khách; toa I, II, III. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa đều còn 4 chỗ trống. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên tàu.

b) Có bao nhiêu cách sắp 4 hành khách lên tàu để có 1 toa trong đó có 3 trong 4 vị khách.

Giải

a) Để 4 vị khách lên tàu, ta cần chọn ra 4 chỗ trống trong 12 chỗ trống trên tàu. Vì chỉ cần lên tàu, không quan tâm thứ tự nên có $C_{12}^4 = 495$ *cách sắp xếp.*

b) Chọn 1 nhóm 3 vị khách từ 4 vị khách ta có C_4^3 *cách chọn.*

Nhóm 3 vị khách này khi lên tàu có thể chọn 1 trong 3 toa tàu, nên có 3 cách chọn.

Vị khách còn lại khi lên tàu có thể chọn 1 toa trong 2 toa tàu (không chở nhóm 3 vị kia) nên có 2 cách chọn.

Theo qui tắc nhân ta có: $C_4^3.3.2 = 24$ *cách sắp xếp.*

3.15. Giải phương trình $A_{n-2}^3 = C_{n-1}^2$

Giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$A_{n-2}^3 = C_{n-1}^2 \Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{(n-5)!} = \frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-3)(n-4) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n-2=0 \\ (n-3)(n-4) = \frac{1}{2}(n-1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ 2n^2-15n+25=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=5 \\ n=\frac{5}{2}\ (loai) \end{array}\right.$$

Vậy n = 2 hoặc n = 5

3.16. Giải bất phương trình $A_n^3 \leq 2C_{n-1}^3 + P_2$

Giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

www.gvhieu.com

$$A_n^3 \le 2C_{n-1}^3 + P_2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} \le 2\frac{(n-1)!}{(n-4)!3!} + 2!$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) \le \frac{2}{6}(n-1)(n-2)(n-3) + 2$$

$$\Leftrightarrow 6n(n-1)(n-2) \le 2(n-1)(n-2)(n-3) + 12$$

$$\Leftrightarrow 6n^3 - 18n^2 + 12n \le 2n^3 - 12n^2 + 22n - 12 + 12$$

$$\Leftrightarrow 4n^3 - 6n^2 - 10n \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 5 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \le n \le \frac{5}{2}$$

Do $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$ *nên n = 1 hoặc n = 2*

3.17. Giải các hệ *a)* $\begin{cases} C_n^m = C_n^{m+2} \\ C_n^2 = 153 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} C_y^x = C_y^{x+1} \\ A_y^2 = 20 \end{cases}$

Giải:

a) Điều kiện: $m, n \in \mathbb{N}, m \ge 0, n \ge 1, n \ge m$

$$\begin{cases} C_n^m = C_n^{m+2} \\ C_n^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!m!} = \dfrac{n!}{(n-m-2)!(m+2)!} \\ \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 153 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(n-m)(n-m-1)} = \dfrac{1}{(m+2)(m+1)} \\ n(n-1) = 306 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(18-m)(17-m)} = \dfrac{1}{(m+2)(m+1)} \\ n = 18 \vee n = -17(loai) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 38m = 304 \\ n = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = 18 \end{cases}$$

b) Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}, x \ge 0; y \ge 1; x \le y$

$$\begin{cases} C_y^x = C_y^{x+1} \\ A_y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!}{(y-x)!x!} = \dfrac{y!}{(y-x-1)!(x+1)!} \\ \dfrac{y!}{(y-2)!} = 20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y-x} = \dfrac{1}{x+1} \\ y(y-1) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5-x} = \dfrac{1}{x+1} \\ y = 5 \vee y = -4(loai) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

4. BÀI TẬP TỔNG HỢP

4.1. Đội văn nghệ của đoàn trường có 7 nam và 9 nữ. Cần chọn ra 5 nam và 5 nữ để ghép thành 5 cặp nam nữ trình diễn tiết mục thời trang. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Giải

Chọn 5 nam từ 7 nam có C_7^5 *cách chọn.*

Chọn 5 nữ từ 9 nữ có C_9^5.

Ghép 5 nam với 5 nữ có 5! cách chọn.

Theo qui tắc nhân ta có: $C_7^5 . C_9^5 .5! = 317\,520$

4.2. Cần chia 18 học sinh của một lớp thành 3 nhóm sinh hoạt (không cần đặt tên cho nhóm, không quy định thứ tự), mỗi nhóm có 6 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia.

Giải

Giả sử ta đặt tên cho 3 nhóm đó là I, II, III.

Nhóm I có được do chọn 6 học sinh từ 18 học sinh của lớp. Nên có C_{18}^6 *cách chọn.*

Nhóm II có được do chọn 6 học sinh từ 12 học sinh còn lại, nên có C_{12}^6 *cách chọn.*

Nhóm III là 6 học sinh còn lại, nên có 1 cách chọn.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $C_{18}^6 . C_{12}^6$ *cách chọn.*

Nhưng đề bài cho 3 nhóm này không đặt tên, không qui định thứ tự, nên khi hoán đổi vị trí 3 nhóm này thì kết quả vẫn không thay đổi. Hoán đổi 3 nhóm có 3! trường hợp lặp lại. Vì thế số cách chia thành 3 nhóm thỏa yêu cầu bài toán là $\dfrac{C_{18}^6 . C_{12}^6}{3!} = 2,858,856$.

4.3. Cần chia 18 học sinh của một lớp thành ba tổ 1,2,3 khác nhau, mỗi tổ có 6 học sinh để tham gia làm vệ sinh trường ở 3 địa điểm khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia ?

Giải

Nhóm 1, chọn 6 học sinh từ 18, có C_{18}^6 *cách chọn.*

Nhóm 2, chọn 6 học sinh từ 12, có C_{12}^6 *cách chọn.*

Nhóm 3, là 6 học sinh còn lại, có 1 cách chọn.

Theo qui tắc nhân ta có $C_{18}^6 . C_{12}^6 .1$ *cách chọn*

4.4. Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng 6 chữ số trong đó số 9 xuất hiện đúng 2 lần, các số khác xuất hiện đúng 1 lần.

Giải

www.gvhieu.com

Gọi số có 6 chữ số $x = \overline{abcdef}$

Để số 9 xuất hiện đúng 2 lần thì

***TH1**: x có 5 dạng sau:*

$\overline{99cdef}; \overline{9b9def}; \overline{9bc9ef}; \overline{9bcd9f}; \overline{9bcde9}$

4 chữ số còn lại trong biểu thức trên được chọn từ 9 chữ số (vì bỏ đi 9) nên có A_9^4 *cách chọn.*

Vậy có 5. A_9^4

***TH2**: x có 10 dạng sau:*

$\overline{a99def}; \overline{a9c9ef}; \overline{a9cd9f}; \overline{a9cde9};$

$\overline{ab99ef}; \overline{ab9d9f}; \overline{ab9de9}$

$\overline{abc99f}; \overline{abc9e9}$

$\overline{abcd99}$

Khi đó a có 8 cách chọn (vì bỏ 0 và 9).

3 chữ còn lại được chọn từ 8 chữ số (vì đã bỏ đi số 9, số a) nên có A_8^3 *cách chọn.*

Theo qui tắc nhân ta có: 8. A_8^3 *cách chọn*

Do có 10 trường hợp, nên ta có 10. 8. A_8^3 *số.*

Theo qui tắc cộng ta có: 5. A_9^4 *+10. 8.* A_8^3 *=42 000*

4.5. Có 5 bưu thiếp khác nhau, 6 bì thư khác nhau. Cần chọn 3 bưu thiếp, bỏ vào 3 bì thư, mỗi bì một bưu thiếp và gửi cho 3 người bạn mỗi bạn một bưu thiếp. Hỏi có mấy cách ?

Giải

Cách 1:

Chọn 3 bưu thiếp từ 5 ta có C_5^3 *cách chọn.*

Chọn 3 bì thư từ 6 bì thư ta có C_6^3 *cách chọn.*

Ghép 3 bưu thiếp với 3 bì thư ta có 3! cách.

Trao 3 bì thư (có cả bưu thiếp bên trong) cho 3 người ta có 3! cách.

Theo qui tắc nhân ta có: $C_5^3.C_6^3.3!.3! = 7200$ *cách.*

Cách 2:

Chọn 3 bưu thiếp khác nhau từ 5 ta có A_5^3.

Chọn 3 bì thư khác nhau từ 6 ta có A_6^3.

Theo qui tắc nhân ta có $A_5^3.A_6^3$ *=7200 cách.*

4.6. Có 16 nhà Toán học, trong đó có 4 người Việt, 4 người Nhật, 4 người Mỹ và 4 người Pháp. Cần chọn 6 người đi dự hội nghị Toán học quốc tế. Hỏi có mấy cách chọn sao cho :

a) Mỗi nước đều có đại biểu ?

b) Không có nước nào có hơn hai đại biểu ?

Giải:

a) Trường hợp 1:*

Một nước có 3 đại biểu và các nước kia mỗi nước có một đại biểu.

Trong 4 nước, chọn 1 nước được cử 3 đại biểu : có 4 cách.

Trong 4 người của nước đó, chọn ra 3 người, có $C_4^3 = 4$ *cách.*

Ba nước còn lại mỗi nước chọn 1 trong 4 người có 4^3 *cách.*

Vậy có : $4.C_4^3.4^3 = 4^5$ *cách chọn.*

** Trường hợp 2:*

Có hai nước mỗi nước có 2 đại biểu và hai nước kia mỗi nước có 1 đại biểu.

Trong 4 nước, chọn 2 nước để mỗi nước đó được chọn 2 đại biểu, có $C_4^2 = 6$ *cách. Chọn 2 trong 4 người của mỗi nước đó, có* $C_4^2 = 6$ *cách. Suy ra hai nước đó có* 6^2 *cách chọn đại biểu.*

Hai nước còn lại, chọn 1 trong 4 người, có 4 cách. Suy ra hai nước còn lại có 4^2 *cách chọn đại biểu.*

Vậy có : $6^3 4^2$ *cách.*

Tóm lại, số cách chọn thỏa yêu cầu đe

$4^5 + 6^3 4^2 = 4480$ *cách.*

b) TH1: Có 3 nước, mỗi nước có 2 đại biểu.

Chọn 3 trong 4 nước để mỗi nước đó có đúng 2 đại biểu có $C_4^3 = 4$ *cách chọn.*

Chọn 2 trong 4 người của mỗi nước đó có $C_4^2 = 6$. *Do đó 3 nước sẽ có* 6^3 *cách chọn.*

Vậy có 4. 6^3 *cách chọn.*

TH2: Có 2 nước mỗi nước có 2 đại biểu và 2 nước còn lại, mỗi nước có đúng 1 đại biểu.

Theo trường hợp 2 ở câu a ta có $6^3 4^2$ *cách chọn.*

Vậy cách chọn thỏa yêu cầu là 4. $6^3 + 6^3 4^2 = 4320$

Mỗi khó khăn chỉ là một thử thách
Mỗi thử thách là một cơ hội ”

www.gvhieu.com