

# TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC, GTLN – GTNN NHỜ DỰ ĐOÁN DẤU BẰNG

Các em h/s và các bạn thân mến, trong các đề thi TSDH thường có một câu V là câu khó (để chọn các cao thủ võ lâm) câu này những năm gần đây thường cho dưới dạng các bài toán BĐT. Và thường thì các sĩ tử không biết bắt đầu từ đâu để giải quyết nó. Bài viết này tôi sẽ truyền đạt cho các bạn một “tuyệt chiêu” võ công độc đáo (chỉ cần một chiêu thôi). Sau khi học được “tuyệt chiêu” này các bạn sẽ thấy các vấn đề trở nên rất đơn giản.

Để lĩnh hội được “tuyệt chiêu” mà tôi tổng hợp từ vô số các chiêu thức của các môn phái khác thì trước tiên các bạn phải nắm được một số “chiêu thức” bản đã.

## 1. Bất Đẳng thức Côsi (các chiêu này xem trong “Đại số 10”)

a. Bất Đẳng thức Cauchy cho 2 số :

Cho 2 số  $a, b \geq 0$ . Khi đó:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ . Dấu ‘=’ xảy ra khi  $a = b$ .

b. Bất Đẳng thức Cauchy cho 3 số :

Cho 3 số  $a, b, c \geq 0$ . Khi đó ta có:  $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ . Dấu ‘=’ xảy ra khi  $a = b = c$ .

### Nhận dạng:

+ Tìm nhỏ nhất của tổng khi biết tích.

+ Tìm lớn nhất của tích khi biết tổng, tổng bình phương.

+ Chứng minh tổng lớn hơn tích, tích chia tổng (tổng bình phương, ...)

+ Dùng nhập các tổng, tổng nghịch đảo, ... thành một.

### Các BĐT cơ bản liên quan hay dùng :

1.  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

2.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ . Dấu ‘=’ khi  $a = b = c$ .

3.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq ab + ac + bc$ . Dấu ‘=’ xảy ra khi  $a = b = c$ .

4. Với  $a, b > 0$ . Ta có:  $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ . Dấu ‘=’ xảy ra khi  $a = b$  (hay:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ )

5. Với  $a, b, c > 0$ . Ta có:  $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ . Dấu ‘=’ xảy ra khi  $a = b = c$  (hay :

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ ).

Ý nghĩa của các bất đẳng thức 4, 5 là cho phép ta nhập các phân số thành một do đó rất thuận lợi cho việc xét hàm với một ẩn.

## 2. Bất Đẳng Thức Bunhiacopxki – BĐT Trị Tuyệt Đối :

Trong chương trình thi Đại Học chúng ta chỉ được áp dụng BĐT Cauchy cho 2 và 3 số không âm và bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 cặp số.

$$|a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$$

Dấu ‘=’ xảy ra khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  (Nếu bỏ dấu || thì cần thêm  $\geq 0$  nữa)

b. Nhận dạng:

+ Tổng các cặp số có tích không đổi.

+ Tổng bình phương bằng một số không đổi.

c. Ứng dụng

+ Nhập các tổng bình phương thành một.

### **3. Khảo sát hàm số**

Trên đây là các vấn đề mà Đại Hội Anh Hùng thường ra để chọn cao thủ. Hi vọng các sĩ tử nắm được các chiêu thức cơ bản này để lĩnh hội cho tốt.

Khi tìm GTNN, GTLN các em thường mắc phải sai lầm phổ biến trong việc tìm giá trị của biến tại các điểm đạt max, min đó là : thực hiện liên tiếp nhiều bước đánh giá nhưng dấu '=' tại mỗi bước là không như nhau do đó không có dấu '=' để xảy ra đẳng thức cuối. Xét bài toán:

Tìm GTLN của  $f(x) = \sin^5 x + \sqrt{3} \cos x$ , có bạn đã giải như sau:

Chỉ cần xét trong  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ . Ta có:  $\sin^5 x \leq \sin x$  suy ra :  $f(x) \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x$

Mặt khác :  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) \leq 2$ .

Vậy  $f(x)_{\max} = 2$ .

**Nhận xét:** bài giải trên sai (bài giải đúng xem ở dưới) do đã vướng sai lầm trong tìm dấu '='.  $f(x)$  không thể đạt giá trị bằng 2 được vì để tới BĐT cuối chúng ta đã thực hiện 2 phép biến đổi :

+ lần 1:  $\sin^5 x \leq \sin x$ ; dấu '=' khi  $x = 0, \pi/2$ .

+ lần 2:  $2\sin(x + \pi/6) \leq 2$ ; dấu '=' khi  $x = \pi/6$

Như vậy, khi thực hiện mỗi bước biến đổi ta thường tự đặt ra câu hỏi:

+ **Khi thực hiện các bước biến đổi như vậy thì liệu dấu '=' có đạt được ở bước cuối cùng không ?**

+ **Đánh giá như thế nào để có thể đưa về về còn lại được hay không ?**

Mặc dù bài toán có thể thực hiện liên tiếp nhiều bước biến đổi nhưng để dấu '=' đạt được thì ở mỗi bước dấu '=' cũng phải giống như dấu '=' ở đẳng thức cuối cùng. **Vậy thì tại sao ta không dự đoán trước dấu '=' của BĐT (hoặc giá trị mà tại đó biểu thức đạt max, min) rồi từ đó mới định hướng phương pháp đánh giá ?** Đây là một cách phân tích tìm lời giải mà tôi muốn giới thiệu. Để có hướng suy nghĩ đúng chúng ta thực hiện các bước phân tích sau:

#### **I. Phân tích – tìm lời giải:**

1. Dự đoán dấu '=' của BĐT hay các điểm mà tại đó đạt GTLN, GTNN.

2. Từ dự đoán dấu "=", kết hợp với các BĐT quen thuộc dự đoán phép đánh giá. Mỗi phép đánh giá phải đảm bảo nguyên tắc "dấu '=' xảy ra ở mỗi bước này phải giống như dấu '=' dự đoán ban đầu".

Để làm rõ, tôi xin phân tích cách suy nghĩ tìm lời giải trong một vài ví dụ sau:

#### **II. Các thí dụ:**

##### **Thí dụ 1:** (ĐH 2003-A)

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn :  $x + y + z \leq 1$ . Cmr:

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

##### **Phân tích:**

**B1.** Dự đoán dấu '=':  $x = y = z = 1/3$

**B2.** Để làm mất dấu căn, ta có thể suy nghĩ theo 2 hướng: mất dấu căn ở từng số hạng hoặc nhập dấu căn ở mỗi số hạng thành một.

1. Nếu suy nghĩ theo hướng mất dấu căn ở từng số hạng ta dùng BĐT Bunhiacopski:

+  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$  ở dạng tổng hai bình phương  $\rightarrow$  BĐT BCS  $\rightarrow$  ta cần tìm:  $\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})([?] + [?])} \geq \dots$

Dấu '=' của dự đoán ban đầu là  $x = \frac{1}{3}$  và dấu '=' của đánh giá BĐT BCS là  $\frac{1/x}{x} = \frac{?}{?}$ . Như

vậy 2 số còn lại cần điền sẽ có tỉ lệ  $3 : \frac{1}{3} = 9 : 1$ . Ta được:  $\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})(1^2 + 9^2)} \geq x + \frac{9}{x}$ .

Tương tự với y, z và cộng lại, ta được:  $P \cdot \sqrt{82} \geq \frac{9}{x} + \frac{9}{y} + \frac{9}{z} + x + y + z$ .

+ Vế phải là tổng các phân số quen (BĐT Côsi)

$\rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ . (**Dấu '=' vẫn đảm bảo**)  $\rightarrow \sqrt{82} P \geq x+y+z + \frac{81}{x+y+z} = f(t) = t + \frac{81}{t}$

(với  $t = x + y + z$  ( $0 < t \leq 1$ )). Khảo sát hàm ta được đpcm. (Tới đây có em dùng BĐT Côsi  $t + \frac{81}{t} \geq 18$  không thu được kết quả vì đã vi phạm nguyên tắc dấu '=')

2. Nếu suy nghĩ theo hướng nhập các dấu căn:

+ Ở mỗi dấu căn là dạng bình phương  $\rightarrow$  tổng 3 độ dài của ba vectơ.

+ Dự đoán dấu '=' khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . Khi đó 3 vectơ  $\vec{u} = (x; \frac{1}{x})$ ,  $\vec{v} = (y; \frac{1}{y})$  và  $\vec{w} = (z; \frac{1}{z})$

cùng hướng được tức đẳng thức sau xảy ra được:  $P =$

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(x+y+z)^2 + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})^2}$$

+ Tới đây thực hiện các bước phân tích như 1.

Khi thay dữ kiện  $x + y + z \leq 1$  bằng dữ kiện khác, chẳng hạn:  $x + y + z \leq 2$  thì vế phải bài toán như thế nào?

**Thí dụ 2:** (ĐBĐH - 2003)

Tìm GTNN, GTLN của:  $P = \sin^5 x + \sqrt{3} \cos x$ .

**Phân tích:**

Ta thấy P chứa một ẩn x suy nghĩ đầu tiên của ta thường là dùng đạo hàm. Thử đạo hàm:

$$f'(x) = 5\sin^4 x \cdot \cos x - \sqrt{3}$$

+ Chúng ta thấy có một nghiệm là  $\sin x = 0$  nhưng các nghiệm còn lại ta không thể tìm được. Như vậy hướng giải quyết khi đạo hàm trực tiếp là không khả thi. Nhưng qua đây cho ta có **dự đoán được các điểm mà tại đó đạt NN, LN** sẽ là các điểm làm  $\sin x = 0$ . (thường thì các điểm đạt max, min là các điểm tới hạn của hàm số)

+ Từ điều này, khi ta biến đổi và sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá phải luôn luôn có dấu '=' tại các điểm làm  $\sin x = 0$ .

+ Muốn đưa về một ẩn t, ta đặt  $t = \cos x$ , nhưng  $\sin^5 x$  không chuyển về t được  $\rightarrow$  đánh giá  $\sin^5 x$  để hạ một bậc ( $\sin^2 x, \sin^4 x, \dots$  thì đưa về  $t = \cos x$  được). **Phải đánh giá như thế nào để dấu '=' có được khi  $\sin x = 0$**   $\rightarrow \sin^5 x \leq \sin^4 x \rightarrow$  Khi đó:  $\sin^4 x = (1 - t^2)^2$

$f(x) \leq g(t) = (1 - t^2)^2 + \sqrt{3}t, t \in [-1; 1]$ .

+  $g'(t) = \sqrt{3} - 4t(1 - t^2) \rightarrow$  hàm bậc 3 nhưng ta không nhằm nghiệm được (thử bấm máy xem có nghiệm trong  $[-1; 1] \rightarrow$  không có nghiệm  $\rightarrow g'(t)$  chỉ mang dấu) đánh giá  $g'(t)$  để chứng minh  $g'(t)$  có một dấu  $\rightarrow$  dùng BĐT hoặc đạo hàm :

+  $g''(t) = 12t^2 - 4, g''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1/2$ . Lập BBT hoặc để ý rằng  $g'(\pm 1), g'(\pm 1/2) > 0 \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in [-1; 1]$ . Suy ra :  $\max g(t) = g(1)$  (**vấn đảm bảo dấu '=' như ở trên**).

**Thí dụ 3:** (ĐH 2004-A)

Cho tam giác không tù ABC, thỏa mãn điều kiện:  $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3$ .

Tính các góc của tam giác ABC.

**Phân tích:**

Bài toán yêu cầu tính 3 góc trong khi đó chỉ cho một đẳng thức ràng buộc như vậy chỉ có cách dùng BĐT để đánh giá một vế lớn hơn hoặc bằng vế còn lại.

+ Dự đoán dấu '=':  $B = C = 45^\circ$  và  $A = 90^\circ$ . (B, C đối xứng nên dự đoán  $B = C$ , hệ số  $\cos B$  là  $\sqrt{2}$  từ đây dự đoán  $B = 45^\circ$  thử vào thấy thỏa.)

+ Ta thực hiện biến đổi biểu thức quen thuộc :  $\cos B + \cos C = 2\cos \frac{B-C}{2} \cdot \cos \frac{B+C}{2}$ , với dự đoán  $B = C$  thì  $\cos \frac{B-C}{2} = 1$ , ta có thể đánh giá  $\cos B + \cos C$  để chuyển về một ẩn :  $\cos B +$

$$\cos C = 2\cos \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \leq 2\sin \frac{A}{2}$$

$$+ \text{Vậy : } \cos 2A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 3 \geq 0.$$

Đây là bài toán một ẩn ta có thể

**H1:** Đặt  $t = \sin \frac{A}{2}$  ( $t \in (0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ ) chuyển

$$f(t) = (2(2t^2 - 1)^2 - 1) + 4\sqrt{2}t - 1 = 8t^4 - 8t^2 + 4\sqrt{2}t - 1$$

$f'(t) = 32t^3 - 16t + 4\sqrt{2} \rightarrow$  không giải được nghiệm. (bấm máy tìm nghiệm  $t \in (0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$  thấy không có nghiệm  $\rightarrow f'(t)$  chỉ có một dấu)  $\rightarrow f''(t)$  lập BBT suy ra được  $f'(t) \geq 0, \forall t \Rightarrow f(t) \leq f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3$  (bài toán thường gặp ở lớp 12)

**H2:** Đánh giá  $\cos 2A$  để giảm bớt bậc, có thể phân tích theo hướng :  $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ . Với dự đoán dấu '=' khi  $A = 90^\circ$  ở trên, ta có thể đánh giá  $\cos^2 A$  như thế nào? Đánh giá :  $\cos^2 A \leq \cos A$  (để đảm bảo dấu '=' xảy ra khi  $A = 90^\circ$ )

$$+ \text{Thu được : } \cos A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 3 \geq 0$$

$$\text{hay: } -2\sin^2 \frac{A}{2} + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 \geq 0.$$

$$\text{Suy ra: } -(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

**Thí dụ 4:** (ĐH Mỏ Địa Chất - 99)

Giả sử A, B, C là 3 góc một tam giác. Tìm GTNN :

$$P = \frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 - \cos 2C}$$

**Phân tích:**

+ Dự đoán điểm đạt GTNN: thử một số giá trị đặc biệt và dự đoán  $A = B$  (A, B đối xứng)

A, B	15°	30°	45°	60°
P	$\frac{4}{4+\sqrt{3}} + \frac{2}{3}$	6/5	4/3	26/15

Vậy dự đoán  $A = B = 30^\circ$ ,  $C = 120^\circ$

+ Với giá trị dự đoán ta để ý :

$2 + \cos 2A = 2 + \cos 2B = 2 - \cos 2C$ , và cần đánh giá  $\geq$ . Điều này trùng với cách nhập các phân số trong BĐT Côsi :

$$+ \text{Vậy : } P \geq \frac{9}{6 + \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C} = Q$$

+ Mục tiêu bây giờ là đi chứng minh:

$R = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leq 3/2$  (giá trị tại điểm dự đoán, chiều  $\leq$  để đảm bảo  $Q \geq 6/5$ )

+ Biểu thức của R chứa tổng quen thuộc của tam giác :  $\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A - B) \cdot \cos(A + B) =$

$-2\cos(A - B) \cdot \cos C$  và  $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$ . Vậy :

$$R = -2\cos(A - B) \cdot \cos C - 2\cos^2 C + 1$$

+ Tới đây, có 2 suy nghĩ :

**H1** : Khi  $A = B = 30^\circ$  xảy ra thì  $\cos(A - B) = 1$  và  $\cos C = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos(A - B)$ . Tỷ lệ này giống tỷ lệ phân tích thành bình phương trong biểu thức của R.

Ta thử phân tích:  $R = -2(\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B))^2 + 1 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B) \leq \frac{3}{2}$ . Đây là mục tiêu cần đi tới.

**H2** : Đánh giá R đưa về một ẩn. Theo dự đoán thì  $\cos(A - B) = 1$  xảy ra được. Vậy ta có đánh giá quen thuộc :  $\cos(A - B) \leq 1$ . Nếu nhân  $\cos C$  vào 2 vế ta gặp sai lầm vì chưa biết dấu  $\cos C$ . Ta tránh bằng cách :

$-\cos(A - B) \cdot \cos C \leq |\cos(A - B)\cos C| \leq |\cos C|$  (dấu '=' đạt được tại các điểm dự đoán.). Vậy :

$$R \leq -2\cos^2 C + 2|\cos C| + 1 = -(|\cos C| - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \text{ (hoặc xét hàm)}$$

**Thí dụ 5:** (ĐHSP Hà Nội - 99)

Cho  $x, y, z \in [0; 1]$ . Chứng minh rằng :

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$$

**Phân tích:**

+ Dự đoán dấu '=': hai số bằng 1 còn 1 số bằng 0 hoặc  $x = y = z = 1$ .

+ Với dự đoán trên làm thế nào để xuất hiện được vế trái? Để làm xuất hiện  $x^2y$  ta thử xét tích :

$(1 - x^2)(1 - y) \geq 0$  (đảm bảo dấu '=' như dự đoán) hay :  $x^2y + 1 - x^2 - y \geq 0$ . Thực hiện tương tự trên ta có :

$$y^2z + 1 - y^2 - z \geq 0 \quad z^2x + 1 - z^2 - x \geq 0$$

+ Nếu cộng 3 vế ta gần được bất cần chứng minh, chỉ thay  $2(x^3 + y^3 + z^3)$  bằng tổng :  $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ . Với giả thiết  $x, y, z \in [0; 1]$  thì ta có thể so sánh các lũy thừa với bậc khác nhau, do đó có thể so sánh hai tổng trên:  $x^3 \leq x^2 \leq x$ ;  $y^3 \leq y^2 \leq y$  và  $z^3 \leq z^2 \leq z$ . Cộng các bất ta được đích cần phải tới.

**Thí dụ 6:** (ĐH- A- 2005)

Cho  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \geq 1$$

**Phân tích:**

+ Dự đoán dấu ‘=’  $x = y = z = \frac{3}{4}$

+ Với dự đoán đó thì  $2x = y + z, x + z = 2y, x + y = 2z$  ; mỗi phân số ở vế phải bây giờ giống vế phải của BĐT nhập phân số quen thuộc ở thứ 4 của chiêu “Côsi”.

+ Đánh giá:  $\frac{1}{2x+y+z} \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right); \frac{1}{x+2y+z} \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{x+z} \right); \frac{1}{x+y+2z} \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2z} + \frac{1}{y+x} \right)$

+ Với dự đoán  $x = y = z$  ta có thể đánh giá :  $\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right); \dots$  cộng các BĐT này ta được đpcm.

**Thí dụ 7:**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng :  $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+x^3+z^3}}{xz} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq 3\sqrt{3}$

**Phân tích:**

+ Dự đoán dấu “=” :  $x = y = z = 1$

+ Với dự đoán này thì  $1 = x^3 = y^3$ , ở mỗi phân số ta thấy đều có dạng tổng chia tích, ta dùng Côsi để đánh giá tổng đưa về tích:

$$\sqrt{1+x^3+y^3} = \sqrt{x^3 + y^3 + x^3y^3} \geq \sqrt{3x^3y^3} = \sqrt{3xy} \cdot \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

$$\sqrt{1+y^3+z^3} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}; \sqrt{1+z^3+x^3} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$$

Suy ra : VT  $\geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

+ Kết hợp với giả thiết và với dự đoán dấu ‘=’ thì  $\sqrt{xy} = \sqrt{yz} = \sqrt{zx}$ . Điều này trùng với dấu hiệu của BĐT Côsi, do đó dùng BĐT Côsi ta được:

$$VT \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \geq 3 \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}} = 3 \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^3}{xyz}} = 3\sqrt{3}$$

Qua các ví dụ trên chúng ta thấy được tầm quan trọng của việc đánh giá, dự đoán dấu ‘=’ xảy ra ở các BĐT. Ngoài việc tránh cho ta những sai lầm thường gặp trong quá trình tìm GTNN, GTLN thì việc dự đoán dấu ‘=’ còn cho chúng ta định hướng được phương pháp chứng minh (các cách đánh giá là hoàn toàn tự nhiên chứ không phải ‘từ trên trời rơi xuống’). Xin mời các em vận dụng vào các bài tập sau:

**III. Bài tập đề nghị:**

1> Tính các góc của tam giác ABC biết rằng :

a.  $\sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B = \frac{9}{4} + 3\cos C + \cos^2 C$

b.  $\cos A + \cos B - \cos C = -\frac{7}{2} + 2\sin \frac{C}{2} + 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$

2> Tìm GTNN của :  $P = 3\sin x + 8\cos^7 x$

3> Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng :  $3x + 2y + 4z \geq \sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 5\sqrt{zx}$

4> Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh:  $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

5> Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh:  $\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos B}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos C}\right) \geq 27$

6> Cho 3 số  $x, y, z > 0$  sao cho  $xy + yz + zx = xyz$ .

Chứng minh rằng :  $\frac{\sqrt{2x^2 + y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{2y^2 + z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{2z^2 + x^2}}{zx} \geq \sqrt{3}$

7> (ĐH – A- 2005)

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa mãn :  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

8> (ĐH – D – 2005)

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa :  $xyz=1$ . Cmr:  $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$

