Bài toán 1. Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = a + \frac{1}{a}$

Sai lầm thường gặp là: $A = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Nguyên nhân sai lầm: giá trị nhỏ nhất của A là 2 $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1$, điều này không xảy ra vì theo giả thiết thì $a \geq 2$.

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức trên ta nhận thấy giá trị của a càng tăng thì A càng tăng, do đó ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 2$. Khi đó ta nói A đạt giá trị nhỏ nhất tại "**Điểm rơi** $a = 2$". Ta không thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số a và $\frac{1}{a}$ vì không thỏa mãn dấu đẳng thức xảy ra. Vì vậy ta phải tách a hoặc $\frac{1}{a}$ để khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì thỏa mãn dấu đẳng thức xảy ra. Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số $\left(\frac{a}{k}, \frac{1}{a}\right)$ sao cho tại "**Điểm rơi** $a = 2$" thì $\frac{a}{k} = \frac{1}{a}$, ta có sơ đồ sau:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 4$$

Khi đó ta được $A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} + \frac{1}{a}$ và ta có lời giải như trên.

Lời giải đúng: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3.2}{4} = \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{2}$.

Chú ý: *Ngoài cách chọn cặp số* $\left(\frac{a}{k}, \frac{1}{a}\right)$ *ta có thể chọn các các cặp số sau:* $\left(ka, \frac{1}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a, \frac{k}{a}\right)$ *hoặc* $\left(a, \frac{1}{ka}\right)$.

Bài toán 2. Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = a + \frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = 8$

Sai lầm thường gặp là:

$$A = \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8} . \frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{7a}{8} \geq \sqrt{\frac{1}{2.2}} + \frac{7.2}{8} = \frac{9}{4}.$$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: $a \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2a}} \geq \sqrt{\frac{1}{2.2}}$ là sai.

Lời giải đúng: $A = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{6a}{8} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{6a}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6.2}{8} = \frac{9}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{4}$.

Bài toán 3. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = ab + \frac{1}{ab}$$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{1}{2}$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Khi đó ta có điểm rơi như sau:

$$ab = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ab}{k} = \frac{1}{ab} \\ \frac{1}{ab} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4k} = 4 \Rightarrow k = \frac{1}{16}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -ab \geq -\frac{1}{4}$$

Do đó ta được $A = 16ab + \frac{1}{ab} - 15ab \geq 2\sqrt{16ab.\frac{1}{ab}} - 15ab \geq 8 - 15.\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$

Bài toán 4. Cho số thực $a \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^2 + \frac{18}{a}$

Phân tích: Ta có $A = a^2 + \frac{18}{a} = a^2 + \frac{9}{a} + \frac{9}{a}$

Dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 6$. Ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{k} = \frac{9}{a} \\ \frac{9}{a} = \frac{9}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{36}{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = 24$$

Lời giải

Ta có $A = \frac{a^2}{24} + \frac{9}{a} + \frac{9}{a} + \frac{23a^2}{24} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{24} \cdot \frac{9}{a} \cdot \frac{9}{a}} + \frac{23a^2}{24} \geq \frac{9}{2} + \frac{23.36}{24} = 39$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 39

Bài toán 5. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a+2b+3c \ge 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

Phân tích: Dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được khi $a+2b+3c=20$ và tại điểm rơi $a=2,\ b=3,\ c=4.$

Sơ đồ điểm rơi:
$$a=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{k}=\dfrac{3}{a} \\ \dfrac{3}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k}=\frac{3}{2} \Rightarrow k=\frac{4}{3}$$
$$b=3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{m}=\dfrac{9}{2b} \\ \dfrac{9}{2b}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{m}=\frac{3}{2} \Rightarrow m=2$$
$$c=4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{n}=\dfrac{4}{c} \\ \dfrac{4}{c}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{n}=1 \Rightarrow n=4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có
$$A=\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{3c}{4}$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{3a}{4}\cdot\frac{3}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{2}\cdot\frac{9}{2b}}+2\sqrt{\frac{c}{4}\cdot\frac{4}{c}}+\frac{a+2b+3c}{4}\ge 3+3+2+5=13$$
Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=2,\ b=3,\ c=4.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 13.

Bài toán 6. Cho a, b, c là số thực dương thỏa mãn $ab\ge 12;\ bc\ge 8$. Chứng minh rằng:
$$\left(a+b+c\right)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}$$

Phân tích: Dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được khi $ab=12;\ bc=8$,tại điểm rơi $a=3;\ b=4;\ c=2$. Khi đó ta được ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng nhóm sau:
$$\left(\frac{a}{18};\frac{b}{24};\frac{2}{ab}\right),\ \left(\frac{a}{9};\frac{c}{6};\frac{2}{ca}\right),\left(\frac{b}{16};\frac{c}{8};\frac{2}{bc}\right),\left(\frac{a}{9};\frac{c}{6};\frac{b}{12};\frac{8}{abc}\right).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có
$$\frac{a}{18}+\frac{b}{24}+\frac{2}{ab}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{18}\cdot\frac{b}{24}\cdot\frac{2}{ab}}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{2}{ca}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{9}\cdot\frac{c}{6}\cdot\frac{2}{ca}}=1$$
$$\frac{b}{16}+\frac{c}{8}+\frac{2}{bc}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{16}\cdot\frac{c}{8}\cdot\frac{2}{bc}}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{a}{9}+\frac{c}{6}+\frac{b}{12}+\frac{8}{abc}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{9}\cdot\frac{c}{6}\cdot\frac{b}{12}\cdot\frac{8}{abc}}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\ge 2\sqrt{\frac{13a}{18}\cdot\frac{13b}{24}}\ge 2\sqrt{\frac{13}{18}\cdot\frac{13}{24}\cdot 12}=\frac{13}{3}$$
$$\frac{13b}{48}+\frac{13c}{24}\ge 2\sqrt{\frac{13b}{48}\cdot\frac{13c}{24}}\ge 2\sqrt{\frac{13}{48}\cdot\frac{13}{24}\cdot 8}=\frac{13}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(a+b+c\right)+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=4;\ c=2$.

Bài toán 7. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Phân tích: Do A là biểu thức đối xứng với a và b nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a=b$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a=b\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+b}{k\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}\\ \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{2}{k}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$A=\left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right)+\frac{3\left(a+b\right)}{4\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a+b}}+\frac{3.2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{2}$.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

Phân tích: Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a=b=c$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a=b=c\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{b+c}{ka}=\dfrac{c+a}{kb}=\dfrac{a+b}{kc}=\dfrac{2}{k}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{k}\Rightarrow k=4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$A=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{4a}+\frac{c+a}{4b}+\frac{a+b}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4a}}+2\sqrt{\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c+a}{4b}}+2\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4c}}+\frac{3}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$
$$\ge 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(2+2+2\right)=3+\frac{9}{2}=\frac{15}{2}$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{15}{2}$

Bài toán 9. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}$$

Phân tích: Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{k}{2ab} = 2 \\ \frac{1}{2ab} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \ge \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} \ge \frac{4}{(a + b)^2} \ge 4$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4.

Bài toán 10. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}$$

Phân tích: Dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + a^2 + b^2} = \frac{1}{2kab} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$A = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \ge 2\sqrt{\frac{1}{(1 + a^2 + b^2)6ab}} + \frac{1}{3ab}$$

$$\ge \frac{2}{\frac{1 + a^2 + b^2 + 6ab}{2}} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a + b)^2 + 1 + 4ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\ge \frac{4}{(a + b)^2 + 1 + 4\left(\frac{a + b}{2}\right)^2} + \frac{1}{3\left(\frac{a + b}{2}\right)^2} \ge \frac{4}{2.1 + 1} + \frac{4}{3.1} = \frac{8}{3}$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 + a^2 + b^2 = 6ab \\ a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{8}{3}$.

Bình luận: *Qua các bài toán trên ta thấy, khi giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức thì các đánh giá trung gian phải được bảo toàn dấu đẳng thức. Cho nên việc xác định đúng vị trí điểm rơi xảy ra sẽ tránh cho ta sử dụng các đánh giá trung gian sai lầm.*

Trong đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân, việc xác định điểm rơi đúng sẽ chỉ cho ta cách chọn các đánh giá hợp lí trong chuỗi các đánh giá mà ta cần phải sử dụng. Bây giờ ta đi tìm hiểu kĩ thuật đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân thông qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 1.1: Cho các số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8a^2b^2c^2$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Trong bất đẳng thức trên thì vế trái có các đại lượng $a^2+b^2;\ b^2+c^2;\ c^2+a^2$ và vế phải chứa đại lượng $8a^2b^2c^2$. Để ý ta nhận thấy $8a^2b^2c^2=2ab.2bc.2ca$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến các đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân $a^2+b^2\ge 2ab;\ b^2+c^2\ge 2bc;\ c^2+a^2\ge 2ca$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2\left|xy\right|$, ta có:

$$\begin{cases} a^2+b^2\ge 2\left|ab\right|\ge 0\\ b^2+c^2\ge 2\left|bc\right|\ge 0\\ c^2+a^2\ge 2\left|ca\right|\ge 0\end{cases}$$

Nhân vế theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8\left|a^2b^2c^2\right|=8a^2b^2c^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Nhận xét:

- Chỉ được nhân các vế của bất đẳng thức cùng chiều (kết quả được bất đẳng thức cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.

- Để ý rằng ta sử dụng cách đánh giá $x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2\left|xy\right|$ *khi chưa xác định được x, y âm hay dương.*

- Nói chung ta ít gặp bài toán sử dụng ngay bất đẳng thức Cauchy như bài toán nói trên mà phải qua một vài phép biến đổi đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Ví dụ 1.2: Cho a, b là các số thực dương không âm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8\ge 64ab\left(a+b\right)^2$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b$. Trong bất đẳng thức trên, vế trái có đại lượng $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8=\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)^4$ và vế phải có đại lượng $64ab\left(a+b\right)^2$. Để ý ta nhận thấy khi $a=b$ thì $a+b=2\sqrt{ab}$ và $\left(a+b\right)^2=4ab$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến các đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân cho hai số $a+b$ và $2\sqrt{ab}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$, ta được:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8=\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)^4\ge\left[2\sqrt{2\left(a+b\right)\sqrt{ab}}\right]^4=64ab\left(a+b\right)^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Ví dụ 1.3: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab \ge 7$$

Phân tích: Do biểu thức vế trái có tính đối xứng với a, b nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=\frac{1}{2}$. Khi đó ta có $a^2+b^2=2ab$ và $4ab=\frac{1}{4ab}$. Để ý đại lượng a^2+b^2 nằm ở mẫu nên ta cần tìm cách thêm vào $2ab$ để tạo thành $(a+b)^2$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến đánh giá $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab} \ge \frac{4}{a^2+b^2+2ab}=\frac{4}{(a+b)^2} \ge 4$. Như vậy lúc này bên vế trái còn lại $\frac{1}{2ab}+4ab$, đến đây ta sử dụng cách ghép hai đại lượng nghịch đảo $4ab+\frac{1}{4ab} \ge 2$. Như vậy lúc này ta thấy vế trái còn lại $\frac{1}{4ab}$ và ta cần chỉ ra được $\frac{1}{4ab} \ge 1$. Điều này không thể làm khó ta được vì dễ nhận ra được $4ab \le (a+b)^2 \le 1$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Ta viết lại biểu thức vế trái thành

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có các đánh giá sau:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab} \ge \frac{4}{a^2+b^2+2ab}=\frac{4}{(a+b)^2} \ge 4$$

$$4ab+\frac{1}{4ab} \ge 2;\quad 4ab \le (a+b)^2 \le 1 \Rightarrow \frac{1}{4ab} \ge 1$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab} \ge \frac{4}{(a+b)^2}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{4ab}}+\frac{1}{(a+b)^2} \ge 7$$

Hay
$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab \ge 7$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Ta tiếp tục vận dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân cho các ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.4: Cho số thực a bất kì. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2$

Phân tích: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là $a^2+2 \ge 2\sqrt{a^2+1}$. Để ý ta nhận thấy $a^2+2=a^2+1+1;\ 2\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{a^2+1.1}$, do đó ta sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân để chứng minh bất đẳng thức.

Ngoài ra, Để ý ta cũng có thể viết $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, đến đây ghép cặp nghịch đảo để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x+y\ge 2\sqrt{xy}$, ta có

$$a^2+2=a^2+1+1\ge 2\sqrt{a^2+1.1}=2\sqrt{a^2+1}$$

Hay $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2+1=1\Leftrightarrow a=0$.

Ta cũng có thể trình bày lời giải như sau: Biến đổi vế trái và áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số ta có

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\Leftrightarrow a^2+1=1\Leftrightarrow a=0$$

Ví dụ 1.5: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a>b$. Chứng minh rằng:

$$a+\frac{1}{b\left(a-b\right)}\ge 3$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế phải không chứa biến, nên khi áp dụng áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái ta cần phải khử hết các biến, như vậy ta cần phải có các đại lượng $a-b;\ b$, ngoài ra chiều bất đẳng thức gợi ý cho ta sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân. Để ý là $a=b+a-b$ khi đó ta áp dụng đánh giá cho 3 số dương $a-b;\ b;\ \dfrac{1}{b\left(a-b\right)}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$a+\frac{1}{b\left(a-b\right)}=b+a-b+\frac{1}{b\left(a-b\right)}\ge 3.\sqrt[3]{b.\left(a-b\right).\frac{1}{b\left(a-b\right)}}=3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a-b=b=\frac{1}{b\left(a-b\right)}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$$

Ví dụ 1.6: Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

Phân tích: Đây là bất đẳng thức Neibizt đã được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương. Tuy nhiên ở đây ta thử dùng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh xem sao.

+ Hướng 1: Để ý đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ nên khi đó có $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{1}{2}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số $\dfrac{a}{b+c};\ \dfrac{b+c}{4a}$ khi đó ta được $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b+c}{4a}\ge 1$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge 3-\left(\frac{b+c}{4a}+\frac{c+a}{4b}+\frac{a+b}{4c}\right)$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$\frac{b+c}{4a}+\frac{c+a}{4b}+\frac{a+b}{4c}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\le 6.$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai. Do đó ta không thể thực hiện chứng minh theo hướng thứ nhất được.

+ Hướng 2: Để ý là $\frac{a}{b+c}+1=\frac{a+b+c}{b+c}$, khi đó áp dụng tương tự được bất đẳng thức $\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$ hay $2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$. Dễ dàng chỉ ra được $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}$ và chú ý ta lại thấy $2\left(a+b+c\right)=\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)\ge 3.\sqrt[3]{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$. Đến đây ta có lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

Hay
$$2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2\left(a+b+c\right)=\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)\ge 3.\sqrt[3]{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{1}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge 9$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 1.7: Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)}\ge 1+\sqrt[3]{abc}$$

Phân tích: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể lũy thừa bậc 3 hai vế, khi đó ta được $\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ hay $\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge 1+3.\sqrt[3]{abc}+3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+abc$. Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến đẳng thức $\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)=1+\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)+abc$.

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $a+b+c\ge 3.\sqrt[3]{abc}$ và $ab+bc+ca\ge 3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, rõ ràng hai đánh giá trên đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

Hay
$$1+\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)+abc\ge 1+3.\sqrt[3]{abc}+3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+abc$$

Hay $$\left(a+b+c\right)+\left(ab+bc+ca\right)\ge 3.\sqrt[3]{abc}+3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a+b+c\ge 3.\sqrt[3]{abc} \text{ và } ab+bc+ca\ge 3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 1.8: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2}{abcd}\ge 64$$

Phân tích: Bất đẳng thức được viết lại thành $\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2\ge 64abcd$. Dễ thấy đẳng thức không xảy ra tại $a=b=c=d$, do đó để dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại đâu ta cần quan sát thật kỹ vai trò các biến trong bất đẳng thức. Nhận thấy trong bất đẳng thức a và b, $a+b$ và c, $a+b+c$ và d có vai trò như nhau, do đó ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b;\ a+b=c;\ a+b+c=d$ hay $4a=4b=2c=d$, kiểm tra lại ta thấy kết quả đúng vậy. Như vậy khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta cần chú ý bảo toàn dấu đẳng thức. Trước hết ta có các đánh giá như sau:

$$a+b\ge 2\sqrt{ab};\ a+b+c\ge 2\sqrt{\left(a+b\right)c};\ \left(a+b+c+d\right)^2\ge 4\left(a+b+c\right)d$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức ta được

$$\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2\ge 16\sqrt{ab}.\sqrt{\left(a+b\right)c}.\left(a+b+c\right)d$$

Tiếp tục áp dụng các đánh giá như trên ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}.\sqrt{\left(a+b\right)c}.\left(a+b+c\right)d &\ge \sqrt{ab}.\sqrt{2c\sqrt{ab}}.2\sqrt{\left(a+b\right)c}.d\\ &\ge \sqrt{ab}.\sqrt{2c\sqrt{ab}}.2\sqrt{2c\sqrt{ab}}.d=4abcd\end{aligned}$$

Đến đây ta thu được $\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2\ge 64abcd$ chính là bất đẳng thức cần chứng minh.

Ngoài ra, để đơn giản hơn ta có thể thực hiện các đánh giá như

$$\left(a+b\right)^2\ge 4ab;\ \left(a+b+c\right)^2\ge 4c\left(a+b\right);\ \left(a+b+c+d\right)^2\ge 4\left(a+b+c\right)d$$

Đến đây ta nhân theo vế và thu gọn thì được

$$\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2\ge 64abcd$$

Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2\ge 64abcd$$

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy dạng $\left(x+y\right)^2\ge 4xy$, ta có

$$\left(a+b+c+d\right)^2\ge 4d\left(a+b+c\right)\ge 0$$

$$\left(a+b+c\right)^2\ge 4c\left(a+b\right)\ge 0;\ \left(a+b\right)^2\ge 4ab\ge 0$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta suy ra

$$\left(a+b\right)^2\left(a+b+c\right)^2\left(a+b+c+d\right)^2\ge 64abcd\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)$$

Hay $$\left(a+b\right)\left(a+b+c\right)\left(a+b+c+d\right)^2\ge 64abcd$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d=2c=4b=4a>0$

Ngoài ra, ta cũng có thể trình bày lời giải như sau:
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a+b \ge 2\sqrt{ab};\ a+b+c \ge 2\sqrt{(a+b)c};\ (a+b+c+d)^2 \ge 4(a+b+c)d$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức ta được

$$(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2 \ge 16\sqrt{ab}.\sqrt{(a+b)c}.(a+b+c)d$$

Tiếp tục áp dụng các đánh giá như trên ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}.\sqrt{(a+b)c}.(a+b+c)d &\ge \sqrt{ab}.\sqrt{2c\sqrt{ab}}.2\sqrt{(a+b)c}.d\\ &\ge \sqrt{ab}.\sqrt{2c\sqrt{ab}}.2\sqrt{2c\sqrt{ab}}.d = 4abcd\end{aligned}$$

Đến đây ta thu được $(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2 \ge 64abcd$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.9: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng cách đánh giá mẫu, ở đó ta chứng minh bất đẳng thức phụ $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$ bằng phép biến đổi tương đương. Trong ví dụ này ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ trên bằng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Ta viết lại bất đẳng thức phụ trên thành $a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2$, khi đó ta có các đánh giá là $a^3+a^3+b^3 \ge 3a^2b;\ a^3+b^3+b^3 \ge 3ab^2$. Đến đây cộng theo vế ta thu được bất đẳng thức trên. Đến đây ta trình bày lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3+a^3+b^3 \ge 3a^2b;\ a^3+b^3+b^3 \ge 3ab^2$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2$

Suy ra
$$a^3+b^3+abc \ge ab(a+b+c)$$

Từ đó ta được
$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \le \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \le \frac{1}{bc(a+b+c)} = \frac{a}{abc(a+b+c)}$$
$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{ac(a+b+c)} = \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

Cộng theo vế các bất đẳngthức trên ta được

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$$

Nhận xét: *Khi đi tìm lời giải cho bất đẳng thức trên, cái làm khó ta chính là phải phát hiện ra bất đẳng thức phụ* $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$. *Trong quá trình đó đòi hỏi ta phải có sự phân tích kĩ càng và có những định hướng rõ ràng, còn trình bày chứng minh bất đẳng thức thì cách nào cũng được miễn là càng gọn càng tốt.*

Ví dụ 1.10: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{a^6+b^4}+\frac{2b}{b^6+c^4}+\frac{2c}{c^6+a^4}\le\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}$$

Phân tích: Vì vai trò các biến như nhau trong bất đẳng thức nên ta được dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$, khi đó ta được $\frac{2a}{a^6+a^4}=\frac{1}{a^4}\Leftrightarrow 2a=a^2+1$, do đó đẳng thức sẽ xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái của bất đẳng thức phức tạp hơn nên ta chọn đánh giá bên vế trái trước. Từ chiều bất đẳng thức ta cần phải thay các mẫu bởi các đại lượng bé hơn, tức là ta cần có đánh giá $a^6+b^4\ge ?$, cho nên một cách tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy, khi đó ta có $a^6+b^4\ge 2a^3b^2$, đánh giá này vẫn được bảo toàn dấu đẳng thức. Lúc này ta được $\frac{2a}{a^6+a^4}\le\frac{2a}{2a^3b^2}=\frac{1}{a^2b^2}$ và áp dụng tương tự thì ta sẽ thu được $\frac{2a}{a^6+b^4}+\frac{2b}{b^6+c^4}+\frac{2c}{c^6+a^4}\le\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}$. Việc chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\le\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}$, nhưng đây là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Do đó bài toán được chứng minh.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các mẫu số ta được

$$\frac{2a}{a^6+b^4}+\frac{2b}{b^6+c^4}+\frac{2c}{c^6+a^4}\le\frac{2a}{2a^3b^2}+\frac{2b}{2b^3c^2}+\frac{2c}{2c^3a^2}=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\le\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}$

Thật vậy, cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\ge\frac{2}{a^2b^2};\ \frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{2}{b^2c^2};\ \frac{1}{c^4}+\frac{1}{a^4}\ge\frac{2}{c^2a^2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}\le\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Ví dụ 1.11: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{bc}\right)+b\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{ca}\right)+c\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{ab}\right)\ge\frac{9}{2}$$

Phân tích: Vì vai trò các biến như nhau trong bất đẳng thức nên ta được dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$, khi đó ta được $a\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow a=1$, do đó đẳng thức sẽ xảy ra tại $a=b=c=1$. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\frac{9}{2}$$

Để ý đến đánh giá $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ khi đó ta được

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{a^2}{2}+\frac{1}{a}\ge\frac{3}{2};\ \frac{b^2}{2}+\frac{1}{b}\ge\frac{3}{2};\ \frac{c^2}{2}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{2}$. Chú ý đến $a=b=c=1$, ta có $\frac{a^2}{2}+\frac{1}{a}=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\ge\frac{3}{2}$, do vậy đến đây bài toán được chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\frac{9}{2}$$

Mặt khác ta có $$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Do đó ta được $$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Ta cần chứng minh được $$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{2}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{2}+\frac{1}{a}=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\ge\frac{3}{2}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{b^2}{2}+\frac{1}{b}\ge\frac{3}{2};\ \frac{c^2}{2}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{2}$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 1.12: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge 3\sqrt{3}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta có các ý tưởng tiếp cận như sau:

+ Hướng thứ nhất: Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến đánh giá tương tự như trong ví dụ 1.9 là $a^3+b^3+1=a^3+b^3+abc\ge ab\left(a+b+c\right)$, khi đó ta được bất đẳng thức là $\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}\ge\frac{\sqrt{ab\left(a+b+c\right)}}{ab}=\frac{\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{ab}}$ và áp dụng hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức $\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge\sqrt{a+b+c}.\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$. Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\sqrt{a+b+c}.\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)\ge 3\sqrt{3}$. Tuy nhiên bất đẳng thức đó là đúng nhờ hai đánh giá sau:

$$\sqrt{a+b+c}\ge\sqrt{3\sqrt[3]{abc}}=\sqrt{3}\ \text{và}\ \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}}=3$$

+ Hướng thứ hai: Áp dụng trự tiếp bất đẳng thức Cauchy ta có $a^3+b^3+1\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3}=3ab$ nên ta được $\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\ge 3$, tuy nhiên đánh giá này đã được khẳng định trong hướng thứ nhất. Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Cách 1: Dễ dàng chứng minh được $a^3+b^3\ge ab\left(a+b\right)$, khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}\ge\frac{\sqrt{ab\left(a+b+c\right)}}{ab}=\frac{\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{ab}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge\sqrt{a+b+c}.\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{a+b+c}\ge\sqrt{3\sqrt[3]{abc}}=\sqrt{3}\ \text{ và }\ \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}}=3$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{a+b+c}.\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)\ge 3\sqrt{3}$

Suy ra
$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge 3\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$a^3+b^3+1\ge 3\sqrt[3]{a^3b^3}=3ab$$

Suy ra $\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a^2b^2c^2}}}=3$.

Do đó ta được
$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab}+\frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc}+\frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca}\ge 3\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 1.13: Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$-\frac{1}{8}\le\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(1-ab\right)\left(1-bc\right)\left(1-ca\right)}{\left(1+a^2\right)^2\left(1+b^2\right)^2\left(1+c^2\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

Phân tích: Với bất đẳng thức trên việc dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra hơi khó. Để dễ quan sát hơn ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau:

$$\frac{\left|\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(1-ab\right)\left(1-bc\right)\left(1-ca\right)\right|}{\left(1+a^2\right)^2\left(1+b^2\right)^2\left(1+c^2\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

Hay ta cần chứng minh

$$8\left|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)\right| \le (1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2$$

Quan sát thật kĩ bất đẳng thức trên ta thấy cần phải chứng minh được

$$(1+a^2)(1+b^2) \ge 2\left|(a+b)(1-ab)\right|$$

Với bất đẳng thức trên, ta sử dụng phép biến đổi tương đương hoặc bất đẳng thức Cauchy. Ở đây ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy, chú ý bên vế phải của bất đẳng thức có chứa đại lượng $2\left|(a+b)(1-ab)\right|$, như vậy ta cần biến đổi vế trái thành $(a+b)^2+(1-ab)^2$. Để kiểm tra nhận định trên ta chỉ cần nhân tung hai biểu thức rồi so sánh là được và rất may là nhận định trên là đúng. Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$\frac{\left|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)\right|}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2} \le \frac{1}{8}$$

Hay ta cần chứng minh

$$8\left|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)\right| \le (1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(1+a^2)(1+b^2) = 1+a^2+b^2+a^2b^2 = (a+b)^2+(1-ab)^2 \ge 2\left|(a+b)(1-ab)\right|$$

Áp dụng tương tự

$$(1+b^2)(1+c^2) \ge 2\left|(b+c)(1-bc)\right|;\ (1+c^2)(1+a^2) \ge 2\left|(c+a)(1-ca)\right|$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$8\left|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)\right| \le (1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+1)^2(1+b)^2}{1+c^2}+\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2}+\frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \ge 24$$

Phân tích: Đầu tiên ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức thì ý tưởng đầu tiên đó là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tức là ta cần phải chứng minh được

$$\frac{\left[(1+a)(1+b)+(1+b)(1+c)+(1+c)(1+a)\right]^2}{a^2+b^2+c^2+3} \ge 24$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên không đúng, muốn kiểm tra ta chỉ cần chọn một một bộ số, chẳng hạn $a=2; b=c=\frac{1}{2}$ để thử thì thấy bất đẳng thức trên không đúng. Do đó đánh theo bất đẳng thức Bunhiacopxki không thực hiện được. Trong tình huống này ta nghĩ đến đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy.

Trước hết ta thử đánh giá trực tiếp bằng bất đẳng thức Cauchy xem sao, ta có

$$\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2}+\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2}+\frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)^4(1+b)^3(1+c)^4}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$(a+1)^4(1+b)^3(1+c)^4 \ge 8^3(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

Tuy nhiên đánh giá trên lại không đúng.

Như vậy để đánh giá được theo bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki ta cần biến đổi các biểu thức trước. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần biến đổi $\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2$ thành đại lượng có chứa $\left(1+a^2\right);\left(1+b^2\right)$ và ta có thể biến đổi như sau:

$$\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2=\left(ab+1+a+b\right)^2\ge 4\left(ab+1\right)\left(a+b\right)=4a\left(1+b^2\right)+4b\left(1+a^2\right)$$

Đến đây ta được $\dfrac{\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2}{1+c^2}\ge 4b.\dfrac{1+a^2}{1+c^2}+4a.\dfrac{1+b^2}{1+c^2}$, áp dụng tương tự ta thu được $\dfrac{\left(1+b\right)^2\left(1+c\right)^2}{1+a^2}\ge 4b.\dfrac{1+c^2}{1+a^2}+4c.\dfrac{1+b^2}{1+a^2};\ \dfrac{\left(1+c\right)^2\left(1+a\right)^2}{1+b^2}\ge 4a.\dfrac{1+c^2}{1+b^2}+4c.\dfrac{1+a^2}{1+b^2}$.

Để ý ta thấy trong các đánh giá trên xuất hiện các cặp nghịch đảo nên ta ghép chúng lại

$$4b.\frac{1+a^2}{1+c^2}+4b.\frac{1+c^2}{1+a^2}\ge 8b;\ \ 4a.\frac{1+b^2}{1+c^2}+4a.\frac{1+c^2}{1+b^2}\ge 8a;\ 4c.\frac{1+b^2}{1+a^2}+4c.\frac{1+a^2}{1+b^2}\ge 8c$$

Chú ý đến giả thiết $a+b+c=3$ ta có được điều cần chứng minh và lúc này ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng Cauchy ta có

$$\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2=\left(ab+1+a+b\right)^2\ge 4\left(ab+1\right)\left(a+b\right)=4a\left(1+b^2\right)+4b\left(1+a^2\right)$$

Suy ra $\dfrac{\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2}{1+c^2}\ge 4b.\dfrac{1+a^2}{1+c^2}+4a.\dfrac{1+b^2}{1+c^2}$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{\left(1+b\right)^2\left(1+c\right)^2}{1+a^2}\ge 4b.\frac{1+c^2}{1+a^2}+4c.\frac{1+b^2}{1+a^2};\ \frac{\left(1+c\right)^2\left(1+a\right)^2}{1+b^2}\ge 4a.\frac{1+c^2}{1+b^2}+4c.\frac{1+a^2}{1+b^2}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{\left(1+a\right)^2\left(1+b\right)^2}{1+c^2}+\frac{\left(1+b\right)^2\left(1+c\right)^2}{1+a^2}+\frac{\left(1+c\right)^2\left(1+a\right)^2}{1+b^2}$$
$$\ge 4b.\frac{1+a^2}{1+c^2}+4a.\frac{1+b^2}{1+c^2}+b.\frac{1+c^2}{1+a^2}+4c.\frac{1+b^2}{1+a^2}+4a.\frac{1+c^2}{1+b^2}+4c.\frac{1+a^2}{1+b^2}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$4b.\frac{1+a^2}{1+c^2}+4b.\frac{1+c^2}{1+a^2}\ge 8b;\ \ 4a.\frac{1+b^2}{1+c^2}+4a.\frac{1+c^2}{1+b^2}\ge 8a;\ 4c.\frac{1+b^2}{1+a^2}+4c.\frac{1+a^2}{1+b^2}\ge 8c$$

Suy ra

$4b.\dfrac{1+a^2}{1+c^2}+4b.\dfrac{1+c^2}{1+a^2}+4a.\dfrac{1+b^2}{1+c^2}+4a.\dfrac{1+c^2}{1+b^2}+4c.\dfrac{1+b^2}{1+a^2}+4c.\dfrac{1+a^2}{1+b^2}\ge 8\left(a+b+c\right)=24$ Do đó ta được $\dfrac{\left(a+1\right)^2\left(1+b\right)^2}{1+c^2}+\dfrac{\left(1+b\right)^2\left(1+c\right)^2}{1+a^2}+\dfrac{\left(1+c\right)^2\left(1+a\right)^2}{1+b^2}\ge 24$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 1.15: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=2$.

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\ge 12$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy giả thiết ta có

$$\frac{a}{a+1}=1-\frac{b}{b+1}+1-\frac{c}{c+1}=\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{2}{\sqrt{(b+1)(c+1)}}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{b+1}\ge\frac{2}{\sqrt{(c+1)(a+1)}};\ \frac{c}{c+1}\ge\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$

Khi đó ta được $\frac{ab}{(a+1)(b+1)}\ge\frac{4}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}}\Rightarrow ab\ge\frac{4.\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1}$

Áp dụng tương tự ta được $bc\ge\frac{4.\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1};\ ca\ge\frac{4.\sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$ab+bc+ca\ge\frac{4.\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1}+\frac{4.\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1}+\frac{4.\sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1}+\frac{\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1}+\frac{\sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}\ge 3$$

Suy ra $ab+bc+ca\ge 12$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Ví dụ 1.16: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 16$$

Lời giải

Đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, khi đó $\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}=\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}=8$

Do đó ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$$\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 2\sqrt{\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right).27(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)(a+b+c)^3}}$$ Ta

cần chứng minh được

$$27\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(ab+bc+ca)(a+b+c)^3$$

Dễ thấy $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};\ ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Suy ra $\frac{(a+b+c)(cb+bc+ca)}{9}\ge abc$

Do đó ta được $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(cb+bc+ca)$

Suy ra $27\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b)(b+c)(c+a)\ge 24\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)(cb+bc+ca)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$24\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\ge 8\left(ab+bc+ca\right)\left(a+b+c\right)^3$$

Hay
$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(a+b+c\right)^2$$

Rõ ràng đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.17: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=3\sqrt{2}$$
Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a^2+b^2};\ y=\sqrt{b^2+c^2};\ z=\sqrt{c^2+a^2}$, khi đó ta được $x;\ y;\ z>0$ và từ giả thiết ta được $x+y+z=3\sqrt{2}$

Từ đó ta có $x^2+y^2+z^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Do đó ta được
$$a^2=\frac{x^2-y^2+z^2}{2};\ b^2=\frac{x^2+y^2-z^2}{2};\ c^2=\frac{-x^2+y^2+z^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(b+c\right)^2\le 2\left(b^2+c^2\right)=2y^2$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{b+c}\ge\frac{x^2-y^2+z^2}{2y\sqrt{2}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{b^2}{c+a}\ge\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2z\sqrt{2}},\ \dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{-x^2+y^2+z^2}{2x\sqrt{2}}$

Suy ra
$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\\
&\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{2y\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2z\sqrt{2}}-\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2x\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}\\
&\ge\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x+y+z\right)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x+y+z\right)\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\ge\frac{9.3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}-3=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 1.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^4\left(b^2+c^2\right)}{b^3+2c^3}+\frac{b^4\left(c^2+a^2\right)}{c^3+2a^3}+\frac{c^4\left(a^2+b^2\right)}{a^3+2b^3}\ge 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả thiết ta có
$$a^4\left(b^2+c^2\right)=a^2\left(a^2b^2+c^2a^2\right)\ge a^2.2\sqrt{a^4.b^2c^2}=2a^3$$

Hoàn toàn tương tự ta được $b^4\left(c^2+a^2\right)\ge 2b^3;\ c^4\left(a^2+b^2\right)\ge 2c^3$

Khi đó ta được

$$\frac{a^4\left(b^2+c^2\right)}{b^3+2c^3}+\frac{b^4\left(c^2+a^2\right)}{c^3+2a^3}+\frac{c^4\left(a^2+b^2\right)}{a^3+2b^3}\ge\frac{2a^3}{b^3+2c^3}+\frac{2b^3}{c^3+2a^3}+\frac{2c^3}{a^3+2b^3}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{2a^3}{b^3+2c^3}+\frac{2b^3}{c^3+2a^3}+\frac{2c^3}{a^3+2b^3}\ge 2$

Thật vậy, đặt $x=b^3+2c^3;\ y=c^3+2a^3;\ z=a^3+2b^3$

Khi đó ta được $b^3=\frac{x-2y+4z}{9};\ c^3=\frac{y-2z+4x}{9};\ a^3=\frac{z-2x+4y}{9}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2\left(z-2x+4y\right)}{9x}+\frac{2\left(x-2y+4z\right)}{9y}+\frac{2\left(y-2z+4x\right)}{9z}\ge 2$$

Hay ta cần chứng minh $\frac{2}{9}\left[\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)+4\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)-6\right]\ge 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số dương ta có

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{z}{x}.\frac{x}{y}.\frac{y}{z}}=3;\ \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}.\frac{z}{y}.\frac{x}{z}}=3$$

Khi đó ta được $\frac{2}{9}\left[\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)+4\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)-6\right]\ge 2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Ví dụ 1.19: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\left(a+b+c\right)^3}{abc}\ge 28$$

Lời giải

Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là P, khi đó ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a+b+c\right)^2\frac{\left(a+b+c\right)}{abc}\\&=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\frac{\left(a+b+c\right)}{abc}\\&=\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+2\left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{9}{ab+bc+ca};\ \left(ab+bc+ca\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge 9$$

Để ý là $a^2+b^2+c^2\ge ab+cb+ca$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned}P&\ge\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{9}{ab+bc+ca}+2.9\\&=\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)+\frac{8\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+18\\&\ge 2+8+18=28\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 1.20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+c\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)=6.$

Chứng minh rằng: $$\frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ca}{b(2a+c)}+\frac{4ab}{c(a+b)}\ge\frac{8}{3}$$

Lời giải

Từ giả thiết

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+c\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)=6\Rightarrow 6=\frac{c(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cachy ta có

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow 6=\frac{c(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}+\frac{2(a^2+b^2)}{ab}\ge\frac{c(a+b)}{ab}+4$$

$$\Rightarrow 0<\frac{c(a+b)}{ab}\le 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ac}{b(2a+c)}=\frac{(bc)^2}{abc(2b+c)}+\frac{(ac)^2}{abc(2a+c)}$$
$$\ge\frac{(bc+ac)^2}{2abc(a+b+c)}=\frac{[c(a+b)]^2}{2abc(a+b+c)}$$

Và $\quad abc(a+b+c)=ab.bc+bc.ca+ab.ca\le\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

Suy ra ta có $$\frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ac}{b(2a+c)}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{c(a+b)}{ab+bc+ca}\right)^2=\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{c(a+b)}{ab}}{1+\frac{c(a+b)}{ab}}\right)^2$$

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức

Đặt $t=\frac{c(a+b)}{ab}\Rightarrow P\ge\frac{3t^2}{2(1+t)^2}+\frac{4}{t}$ (với $0<t\le 2$). Ta có

$$\frac{3t^2}{2(1+t)^2}+\frac{4}{t}=\left(\frac{3t^2}{2(1+t)^2}+\frac{4}{t}-\frac{8}{3}\right)+\frac{8}{3}=\frac{-7t^3-8t^2+32t+24}{6t(1+t)^2}+\frac{8}{3}$$
$$=\frac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2}+\frac{8}{3}\ge\frac{8}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng.

Đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng chính là đánh giá bất đẳng thức Cauchy theo chiều từ phía phải sang phía trái. Trong chuỗi đánh giá đó ta cũng cần phải bảo toàn dấu đẳng thức xảy ra. Dưới đây là một số ví dụ sử dụng kỹ thuật đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng.

Ví dụ 2.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điền kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$

Sai lầm thường gặp:

$$\begin{cases}\sqrt{a+b}=\dfrac{2.\sqrt{a+b}.1}{2}\le\dfrac{a+b+1}{2}\\ \sqrt{b+c}=\dfrac{2.\sqrt{b+c}.1}{2}\le\dfrac{b+c+1}{2}\\ \sqrt{c+a}=\dfrac{2.\sqrt{c+a}.1}{2}\le\dfrac{c+a+1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\frac{2\left(a+b+c\right)+3}{2}=\frac{5}{2}\le\sqrt{6}.$$

Cách chứng minh trên hoàn toàn sai. Vậy nguyên nhân sai lầm ở đây là gì?

Nguyên nhân sai lầm: Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a+b=b+c=c+a=1$ $\Rightarrow a+b+c=2$. Điều này trái với giả thiết.

Phân tích tìm lời giải: Để tìm lời giải cho bất đẳng thức trên, ta cần trả lời các câu hỏi sau

- Đẳng thức xẩy ra tại đâu?
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mấy số, đó là những số nào?

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau nên ta dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức sẽ là $a=b=c=\frac{1}{3}$, từ đó ta có $a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$. Vì bất đẳng thức chứa các căn bậc hai nên để phá căn ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số là a và $\frac{2}{3}$,…. Đến đây ta có lời giải đúng như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ cho hai số không âm ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{a+b}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{\left(a+b\right).\dfrac{2}{3}}\le\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{a+b+\frac{2}{3}}{2}\\ \sqrt{b+c}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{\left(b+c\right).\dfrac{2}{3}}\le\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{b+c+\frac{2}{3}}{2}\\ \sqrt{c+a}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{\left(c+a\right).\dfrac{2}{3}}\le\sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{c+a+\frac{2}{3}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{2\left(a+b+c\right)+3.\frac{2}{3}}{2}=\sqrt{6}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điền kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\sqrt[3]{18}$

Sai lầm thường gặp

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{(a+b).1.1} \le \dfrac{a+b+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{(b+c).1.1} \le \dfrac{b+c+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{(c+a).1.1} \le \dfrac{c+a+1+1}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \le \frac{2(a+b+c)+6}{3} = \frac{8}{3} > \sqrt[3]{18} \qquad .$$

Cách chứng minh trên hoàn toàn sai. Vậy nguyên nhân sai lầm ở đây là gì?

Nguyên nhân sai lầm: Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b=b+c=c+a=1$ $\Rightarrow a+b+c=2$. Điều này trái với giả thiết.

Phân tích tìm lời giải: Để tìm lời giải cho bất đẳng thức trên, ta cần trả lời các câu hỏi sau

- Đẳng thức xảy ra tại đâu?
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mấy số, đó là những số?

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau nên ta dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức sẽ là $a=b=c=\dfrac{1}{3}$, từ đó ta có $a+b=b+c=c+a=\dfrac{2}{3}$. Vì bất đẳng thức chứa các căn bậc ba nên để phá căn ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số là a, $\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{2}{3}$,…. Đến đây ta có lời giải đúng như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{x+y+z}{3}$ cho các số thực dương ta được

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\sqrt[3]{(a+b).\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}} \le \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\dfrac{a+b+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\sqrt[3]{(b+c).\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}} \le \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\dfrac{b+c+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\sqrt[3]{(c+a).\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}} \le \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}.\dfrac{c+a+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3} \end{cases}$$

Suy ra $$\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{2(a+b+c)+4}{3} = \sqrt[3]{18}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 2.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \le 3\sqrt[3]{3}$$

Phân tích: Do vai trò của các biến a, b, c trong các biểu thức là như nhau nên ta dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức sẽ là $a=b=c=1$, từ đó ta có $a+2b=b+2c=c+2a=3$ và $3a=3b=3c=3$. Vì bất đẳng thức chứa các căn bậc ba nên để phá căn ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số là 3a, $b+2c$ và 3,… Đến đây ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$ cho các số thực dương ta được

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a\left(b+2c\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\sqrt[3]{3a.\left(b+2c\right).3} \le \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\frac{3a+b+2c+3}{3} \\ \sqrt[3]{b\left(c+2a\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\sqrt[3]{3b.\left(c+2a\right).3} \le \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\frac{3b+c+2a+3}{3} \\ \sqrt[3]{c\left(a+2b\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\sqrt[3]{3c.\left(a+2b\right).3} \le \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{3c+a+2b+3}{3} \end{cases}$$

Suy ra $$\sqrt[3]{a\left(b+2c\right)} + \sqrt[3]{b\left(c+2a\right)} + \sqrt[3]{c\left(a+2b\right)} \le \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.\frac{6\left(a+b+c\right)+9}{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến đánh giá $\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Đầu tiên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{3}{4}$, khi đó ta có $2a=b+c$ và $b=c$ nên ta có đánh giá như sau $\frac{1}{2a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right] = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. Áp dụng tương tự ta được $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y} \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ cho hai số dương. Ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b+c}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right] = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{1}{a+2b+c} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$; $\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{4}$.

Ví dụ 2.5: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Phân tích: Trong chủ đề thứ hai ta đã chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp sử dụng tính chất của tỉ số, nhưng ở đó điều kiện của bài toán cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Với bài toán này ta không chứng minh được như vậy mà phải sử dụng các đánh giá khác. Quan sát bất đẳng thức ta thấy cần phải khử các căn bậc hai bên vế trái.

- Cách thứ nhất là bình phương hai vế, tuy nhiên lúc đó bên vế trái vẫn còn chứa căn bậc hai, do đó ta không nên sử dụng cách này.

- Cách thứ hai là sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, để ý đến chiều của bất đẳng thức nên ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các mẫu số. Từ đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép biến đổi $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$ và vì không cần quan tâm đến dấu đẳng thức xẩy ra nên ta có đánh giá $\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$. Đến đây chỉ cần áp dụng tương tự cho hai căn thức còn lại là bài toán được chứng minh

Lời giải

Vì a là số thực dương nên ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ ta được $\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \ge \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \ge \frac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$, điều này trái với giả thiết a, b, c là các số thực dương. Do vậy đẳng thức không xẩy ra.

Tức là ta được $$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.6: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+6c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2+6a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2+6b}} > 2$$

Phân tích: Để ý đến giả thiết $a+b+c=3$, ta thu được $c = 3-(a+b)$, khi đó ta có

$$a^2+b^2+6c = a^2+b^2+6(3-a-b) = (3-a)^2+(3-b)^2$$

Lại cũng từ giả thiết trên ta có $a+b=3-c$. Khi đó

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+6c}} = \frac{3-c}{\sqrt{(3-a)^2+(3-b)^2}} = \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}}.$$

Đến đây để đơn giản hóa ta đặt $x = (3-a)^2 > 0;\ y = (3-b)^2 > 0;\ z = (3-c)^2 > 0$, lúc này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$, đây chính là bất đẳng thức ở ví dụ trên.

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=3$, ta có

$$a^2+b^2+6c = a^2+b^2+6(3-a-b) = (3-a)^2+(3-b)^2$$

Do a, b, c là các số thực dương nên từ $a+b+c=3$ ta suy ra $0 < a, b, c < 3$.

Do đó ta được $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+6c}} = \frac{3-c}{\sqrt{(3-a)^2+(3-b)^2}} = \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}}$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{(3-a)^2}{(3-b)^2+(3-c)^2}} + \sqrt{\frac{(3-b)^2}{(3-c)^2+(3-a)^2}} + \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}} > 2$$

Đặt $x = (3-a)^2 > 0;\ y = (3-b)^2 > 0;\ z = (3-c)^2 > 0$, lúc này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$

Đến đây ta chứng minh tương tự như ví dụ trên.

Ví dụ 2.7: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \le 1$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, tuy nhiên nếu sử dụng ngay thì ta chỉ đánh giá cho các tử số được, như vậy dưới mẫu vẫn còn chứa căn thức. Cho nên để sử dụng được bất đẳng thức đó ta cần phải khử được các căn ở dưới mẫu trước, tuy nhiên việc này không thực hiện được. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta thấy, chỉ cần đổi được chiều bất đẳng thức thì ta có thể sử dụng bất đẳng thức trên có các căn thức ở mẫu và việc khử các căn ở tử số cũng đơn giản hơn. Từ sự phân tích đó ta có thể làm như sau

$$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} + 1 - \frac{2\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + 1 - \frac{2\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \ge 3-2=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b+2\sqrt{ca}} \ge 1$$

Lúc này áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ ta được $\frac{c}{c+2\sqrt{ab}} \ge \frac{c}{a+b+c}$, thực hiện tương tự ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\le 1$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{2\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+1-\frac{2\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+1-\frac{2\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\ge 3-2=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{c}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2\sqrt{ca}}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ ta được

$$\frac{c}{c+2\sqrt{ab}}\ge\frac{c}{a+b+c};\ \frac{a}{a+2\sqrt{bc}}\ge\frac{a}{a+b+c};\ \frac{b}{b+2\sqrt{ca}}\ge\frac{b}{a+b+c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{c}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2\sqrt{ca}}\ge 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: *Khi đánh giá một bất đẳng thức bằng bất đẳng thức Cauchy nếu bị ngược chiều thì ta có thể đổi chiều bất đẳng thức bằng cách nhân hai vế với -1 rồi cộng thêm hằng số để cả hai vế đều dương. Kĩ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy như trên còn được gọi là kĩ thuật Cauchy ngược dấu, vấn đề này sẽ được bàn cụ thể hơn trong chủ đề* ***"Kĩ thuật Cauchy ngược dấu"***

Ví dụ 2.8: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\ge 2$$

Phân tích: Đầu tiên ta thử với $a=b=c$ thấy rằng dấu đẳng thức không xảy ra, nên ta dự đoán nó xảy ra tại một biến bằng 0, điều này càng có cơ sở khi bài toán cho a, b, c không âm. Cho c nhận giá trị 0 và $a=b$ thì dấu đẳng thức xảy ra. Như vậy ta chọn được điểm rơi của bất đẳng thức là $a=b;\ c=0$ và các hoán vị. Cũng từ điều kiện $ab+bc+ca>0$ ta thấy trong ba số có nhiều nhất một số bằng 0. Do đó khi đánh giá bất đẳng thức ta cần chú ý đến bảo toàn dấu bằng.

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy $a^2+bc+a(b+c)=(a+b)(a+c)$, như vậy nếu dưới mẫu có tích $\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}$ thì theo chiều bất đẳng thức cần phải chứng minh ta có ngay đánh giá $\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}\le\frac{a^2+ab+bc+ca}{2}$, nhưng để có được điều này ta phải nhân cả tử và mẫu của mỗi phân số trong căn với tử số. Tuy nhiên vì cho các biến a, b, c không âm nên việc nhân thêm không thể thực hiện được. Trong tình huống này chú ý đến điểm rơi và nhận xét trong a, b, c có nhiều nhất một số bằng 0 ta có thể chia trường hợp để đánh giá bất đẳng thức.

- Trường hợp trong ba số a, b, c có một số bằng 0 và ta giả sử là c, khi đó bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\ge 2$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.
- Trường hợp cả ba số a, b, c đều dương, lúc này thì việc nhân thêm không bị ảnh ảnh hưởng gì đến các đánh giá cả. Đến đây ta có đánh giá như sau

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}=\frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}}\ge\frac{2a(b+c)}{a^2+ab+bc+ca}=\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} \ge \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)}$; $\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \ge \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$

Lúc này ta được bất đẳng thức

$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \ge \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$ Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} \ge 1$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta thu được $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)+4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 1$

Đánh giá cuối cùng hiển nhiên đúng, ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Vì các số a, b, c không âm và $ab+bc+ca>0$ nên trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 0. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp trong ba số a, b, c có một số bằng không, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $c=0$, lúc này bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}} \ge 0$$

- Trường hợp cả ba số a, b, c đều dương, khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} = \frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}} \ge \frac{2a(b+c)}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} \ge \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)}$; $\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \ge \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$

Lúc này ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \ge \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} \ge 1$

Biến đổi tương đương và thu gọn ta được $1 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 1$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $4abc>0$ và đẳng thức không xẩy ra trong trường hợp này. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: *Trong chứng minh bất đẳng thức việc chia trường hợp để chứng minh gây ra nhiều khó khăn. Do đó nếu tìm được một cách giải mà không cần phải quan tâm đến việc xét các trường hợp thì sẽ tốt hơn nhiều. Với bài toán trên ta thử tìm lời giải khác mà không phải chia trường hợp xem sao?*

Cũng xuất phát từ nhận xét như trên nhưng mà khi tích $\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}$ nằm ở trên tử thì không ảnh hưởng gì cả. Do đó ta có đánh giá như sau

$$\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(ab+ac\right)} \le \frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}{2} \text{ suy ra } \frac{\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(ab+ac\right)}}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)} \le \frac{1}{2}$$

Đến đây ta nhân cả hai vế với $\sqrt{\frac{a\left(b+c\right)}{a^2+bc}} \ge 0$ *thì ta được* $\frac{a\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\left(b+c\right)}{a^2+bc}}$.

Hay $\sqrt{\frac{a\left(b+c\right)}{a^2+bc}} \ge \frac{2a\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$ *và công việc còn lại hoàn toàn như trên.*

Ví dụ 2.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \ge 2$$

Phân tích: Đầu tiên ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=2$, chú ý đến hằng đẳng thức $b^3+1=\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right)$ và khi $b=2$ thì $b+1=b^2-b+1=3$ do đó ta có đánh giá sau $\sqrt{b^3+1}=\sqrt{\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right)} \le \frac{b+1+b^2-b+1}{2}=\frac{b^2+2}{2}$, từ đây ta suy ra được $\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} \ge \frac{2a}{b^2+2}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \ge \frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}$$

Ta cần phải chứng minh được $\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2} \ge 2$, đến đây ta đánh giá trên tử số hay dưới mẫu đều được bất đẳng thức ngược chiều. Do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến tư tưởng Cauchy ngược dấu, tức là ta biến đổi $\frac{2a}{b^2+2}=a-\frac{ab^2}{b^2+2}$, chú ý đến đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=2$ ta lại có

$$\frac{ab^2}{b^2+2}=\frac{2ab^2}{b^2+b^2+4} \le \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4.4}}=\frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3}=\frac{a\sqrt[3]{2.b.b}}{3} \le \frac{a\left(2+b+b\right)}{9}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2} \ge a+b+c-\frac{2\left(a+b+c\right)}{9}-\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{9}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta có $ab+bc+ca \le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=12$

Đến lúc này ta có $\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2} \ge 6-\frac{2.6}{9}-\frac{2.12}{9}=2$. Đây chính là điều cần phải chứng minh. Ta trình bày lại lời giải như sau.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \le x+y$ ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}=\frac{a}{\sqrt{\left(b+1\right)\left(b^2-b+1\right)}} \ge \frac{2a}{b+1+b^2-b+1}=\frac{2a}{b^2+2}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}}\ge\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}$$

Ta cần phải chứng minh được $\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}\ge 2$

Thật vậy, ta có $\frac{2a}{b^2+2}=a-\frac{ab^2}{b^2+2}$, mà cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab^2}{b^2+2}=\frac{2ab^2}{b^2+b^2+4}\le\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4.4}}=\frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3}=\frac{a\sqrt[3]{2.b.b}}{3}\le\frac{a\left(2+b+b\right)}{9}$$

Suy ra $\frac{2a}{b^2+2}\ge a-\frac{a\left(2+2b\right)}{9}$. Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}\ge a+b+c-\frac{2\left(a+b+c\right)}{9}-\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{9}$$

Mặt khác theo một đánh giá quen thuộc ta có $ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=12$

Do đó ta được $\frac{2a}{b^2+2}+\frac{2b}{c^2+2}+\frac{2c}{a^2+2}\ge 6-\frac{2.6}{9}-\frac{2.12}{9}=2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Ví dụ 2.10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}\le\frac{1}{2}$$

Phân tích: Để ý là $\sqrt{a+bc}=\sqrt{a\left(a+b+c\right)+bc}=\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$. Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được. Do đó $\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp giả thiết, ta có:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{a\left(a+b+c\right)+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$$

Tương tự ta được $\frac{ac}{\sqrt{b+ac}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b+a}+\frac{ac}{b+c}\right)$; $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned}\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}+\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}&\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{3}{2}$$

Phân tích: Để ý là $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ nên $ab+bc+ca\le 3$, do đó ta được $c^2+3\ge c^2+ab+bc+ca=(b+c)(c+a)$, suy ra ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$.

Lời giải

Từ bất đẳng thức $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ và $a+b+c=3$.

Suy ra $ab+bc+ca\le 3$. Như vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}\le\frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$$

Tương tự ta được $\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+c}+\frac{bc}{a+b}\right)$; $\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{ca}{\sqrt{b^2+3}}\le\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2.12: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$$

Phân tích: Đại lượng $\frac{1}{a+3b+2c}$ và chiều bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức dạng $\frac{9}{x+y+z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, khi đó ta được

$$\frac{9}{a+3b+2c}=\frac{9}{a+c+b+c+2b}\le\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}$$

Suy ra ta có $$\frac{9ab}{a+3b+2c}=\frac{9ab}{a+c+b+c+2b}\le\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}$$

Áp dụng tương tự và chú ý đến tổng $\frac{ca+ab}{c+b}+\frac{ca+bc}{b+a}+\frac{bc+ab}{c+a}=a+b+c$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{9}{x+y+z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, ta được

$$\frac{9}{a+3b+2c}=\frac{9}{a+c+b+c+2b}\le\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{9ab}{a+3b+2c}=\dfrac{9ab}{a+c+b+c+2b}\le\dfrac{ab}{a+c}+\dfrac{ab}{b+c}+\dfrac{a}{2}$. Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{9bc}{b+3c+2a}\le\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{b}{2};\ \frac{9ca}{c+3a+2b}\le\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{b+a}+\frac{c}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{9ab}{a+3b+2c}+\frac{9bc}{b+3c+2a}+\frac{9ca}{c+3a+2b}\le\frac{ca+ab}{c+b}+\frac{ca+bc}{b+a}+\frac{bc+ab}{c+a}+\frac{a+b+c}{2}=\frac{3\left(a+b+c\right)}{2}$$

Hay $$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 2.13: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a,b\ge 1;\ a+b+3=ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}+\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}+\frac{1}{a+b}\le\frac{1+8\sqrt{2}}{6}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta nhận thấy vai trò như nhau trong bất đẳng thức của a, b và dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=3$. Từ giả thiết $a+b+3=ab$, ta suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{ab}=1$.

Để đơn giản hóa ta đặt $x=\dfrac{1}{a};\ y=\dfrac{1}{b}$. Khi đó giả thiết trở thành $x+y+3xy=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\frac{xy}{x+y}\le\frac{1+8\sqrt{2}}{6}$$

Chú ý là các đại lượng $xy;\ x^2+y^2;\ \left(x+y\right)^2$ liên hệ với nhau bởi hằng đẳng thức quen thuộc. Do đó ta sẽ có biểu diễn giả thiết cũng như bất đẳng thức qua một đại lượng.

Theo bất đẳng Cauchy ta được $1=x+y+3xy\le x+y+\dfrac{3\left(x+y\right)^2}{4}$. Từ đó suy ra $x+y\ge\dfrac{2}{3}$. Cũng theo bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{m}+\sqrt{n}\le\sqrt{2\left(m+n\right)}$ ta được

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\le\sqrt{2\left[2-\left(x^2+y^2\right)\right]}\le\sqrt{2\left[2-\frac{\left(x+y\right)^2}{2}\right]}$$

Và $$\frac{xy}{x+y}=\frac{1-\left(x+y\right)}{3\left(x+y\right)}=\frac{1}{3\left(x+y\right)}-\frac{1}{3}$$

Lúc này ta được

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\frac{xy}{x+y}\le\sqrt{2\left[2-\left(x^2+y^2\right)\right]}+\frac{1-\left(x+y\right)}{3\left(x+y\right)}$$

$$\le\sqrt{2\left[2-\frac{\left(x+y\right)^2}{2}\right]}+\frac{1}{3\left(x+y\right)}-\frac{1}{3}\le\sqrt{2\left[2-\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}+\frac{1}{\frac{3.2}{3}}-\frac{1}{3}=\frac{1+8\sqrt{2}}{6}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=3$.

Ví dụ 2.14: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(a+b\right)\left(a+b+2c\right)}{\left(3a+3b+2c\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

Phân tích: Ta viết lại bất đẳng thức thành $\left(a+b\right)\left(a+b+2c\right)\le\frac{1}{8}\left(3a+3b+2c\right)^2$. Cách phát biểu của bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $xy\le\frac{\left(x+y\right)^2}{4}$.

Lời giải

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(a+b\right)\left(a+b+2c\right)=\frac{1}{2}\left(2a+2b\right)\left(a+b+2c\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\frac{\left(2a+2b\right)+\left(a+b+2c\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{8}\left(3a+3b+2c\right)^2$$

Từ đó ta được $$\frac{\left(a+b\right)\left(a+b+2c\right)}{\left(3a+3b+2c\right)^2}\le\frac{1}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b=2c$.

Ví dụ 2.15: Cho các số thực $a>b>0$. Chứng minh rằng: $2a+\frac{32}{\left(a-b\right)\left(2b+3\right)^2}\ge 5$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy có các ý tưởng sau:

+ Ý tưởng thứ nhất là sử dụng bất đẳng thức Cauchy với đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân, ở đây để ta cần khử được đại lượng $\left(a-b\right)\left(2b+3\right)^2$ thì ta cần phân tích được $a=k\left(a-b\right)+m\left(2b+3\right)+m\left(2b+3\right)-6m$, dễ dàng tìm ra được $k=2;\ m=\frac{1}{2}$.

+ Ý tưởng thứ hai là đánh giá $\left(a-b\right)\left(2b+3\right)^2$ theo đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng, chú ý đến dấu đẳng xảy ra ta được

$$\left(4a-4b\right)\left(2b+3\right)\left(2b+3\right)\le\left(\frac{4a-4b+2b+3+2b+3}{3}\right)^3=\left(\frac{4a+6}{3}\right)^3$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh được $2a+\dfrac{32}{\frac{8}{27}(2a+3)^3}\ge 5$ bằng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân là xong.

Lời giải

Cách 1: Biểu thức viết lại như sau

$$P=(2a-2b)+\frac{2b+3}{2}+\frac{2b+3}{2}+\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}-3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(2a-2b)+\frac{2b+3}{2}+\frac{2b+3}{2}+\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}$$
$$\ge 4\sqrt[4]{(2a-2b)\left(\frac{2b+3}{2}\right)^2\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}}=8$$

Do đó $P\ge 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2a-2b=\frac{2b+3}{2}=\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}\text{ hay } a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}.$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(4a-4b)(2b+3)(2b+3)\le\left(\frac{4a-4b+2b+3+2b+3}{3}\right)^3=\left(\frac{4a+6}{3}\right)^3=\frac{8}{27}(2a+3)^3$$

Từ đó ta có

$$P\ge 2a+\frac{32}{\frac{8}{27}(2a+3)^3}=\frac{2a+3}{3}+\frac{2a+3}{3}+\frac{2a+3}{3}+\frac{432}{(2a+3)^3}-3$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2a+3}{3}+\frac{2a+3}{3}+\frac{2a+3}{3}+\frac{432}{(2a+3)^3}\ge 8$$

Do đó $P\ge 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2a-2b=\frac{2b+3}{2}=\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}\text{ hay } a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.16: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\le abc$. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=3$. Bất đẳng thức chứa đại lượng $\dfrac{1}{a^2+bc}$, để ý đến chiều ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc $\dfrac{4}{x+y}\le\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$, khi đó ta có $\dfrac{a}{a^2+bc}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{bc}\right)$. Để ý tiếp ta có $\dfrac{a}{bc}=\dfrac{a^2}{abc}\le\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$. Như vậy áp dụng tương tự ta thu được $\dfrac{a}{a^2+bc}+\dfrac{b}{b^2+ca}+\dfrac{c}{c^2+ab}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+1\right)$. Bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$. Chú ý tiếp đến giả thiết ta được $1\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge \frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc dạng $\frac{4}{x+y}\le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, ta được

$$\frac{a}{a^2+bc}\le \frac{a}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{bc}\right)$$

Kết hợp với giả thiết $a^2+b^2+c^2\le abc$ ta được $\frac{a}{bc}=\frac{a^2}{abc}\le \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Do đó $$\frac{a}{a^2+bc}\le \frac{a}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{bc}\right)\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)$$

Ta cần chứng minh $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 1$$

Thật vậy, Áp dụng một đánh giá quen thuộc và kết hợp với giả thiết, ta được

$$1\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\ge \frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$

Ví dụ 2.17: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{ca+a^2}}\ge \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, khi đó để ý đến đánh giá $\sqrt{2b.(a+b)}\le \frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}$ khi đó ta được $\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}\ge \frac{2\sqrt{2}a}{a+3b}$. Áp dụng tương tự thì $\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{ca+a^2}}\ge \frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}$, như vậy ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\ge \frac{3}{4}$, đây là một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{2b.(a+b)}\le \frac{2b+(a+b)}{2}=\frac{a+3b}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{ca+a^2}}\ge \frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}.$$

Ta cần chứng minh $$\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b}+\frac{2b\sqrt{2}}{b+3c}+\frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Hay $$\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\ge\frac{3}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$

Mặt khác, từ một đánh giá quen thuộc ta có

$$\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+3\left(ab+bc+ca\right)&=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)+\left(ab+bc+ca\right)\\&\le\left(a+b+c\right)^2+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=\frac{4}{3}\left(a+b+c\right)^2\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $$\frac{a}{a+3b}+\frac{b}{b+3c}+\frac{c}{c+3a}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\frac{4}{3}\left(a+b+c\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 2.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a+3b+2c}+\frac{1}{3a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+3c}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{3a+3b+2c}&=\frac{1}{\left(2a+b+c\right)+\left(a+2b+c\right)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}\right)\\&\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(a+b\right)+\left(c+a\right)}+\frac{1}{\left(a+b\right)+\left(b+c\right)}\right]\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{2}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\right]\\&=\frac{1}{16}\left(\frac{2}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{3a+2b+3c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{a+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$$
$$\frac{1}{2a+3b+3c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{3a+3b+2c}+\frac{1}{3a+2b+3c}+\frac{1}{2a+3b+3c}\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{4}$

Ví dụ 2.19: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $13a+5b+12c=9$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{2a+b}+\frac{3bc}{2b+c}+\frac{6ca}{2c+a}\le 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{2}{b}+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{2}{3c}+\frac{1}{3b}}+\frac{1}{\frac{1}{3a}+\frac{1}{6c}}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$, Ta có

$$\begin{cases}\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\ge\frac{9}{2b+a}\\ \frac{2}{3c}+\frac{1}{3b}=\frac{1}{3c}+\frac{1}{3c}+\frac{1}{3b}\ge\frac{9}{6c+3b}\\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{6c}=\frac{1}{6a}+\frac{1}{6a}+\frac{1}{6c}\ge\frac{9}{12a+6c}\end{cases}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\frac{2}{b}+\frac{1}{a}}+\frac{1}{\frac{2}{3c}+\frac{1}{3b}}+\frac{1}{\frac{1}{3a}+\frac{1}{6c}}\le\frac{1}{\frac{9}{2b+a}}+\frac{1}{\frac{9}{6c+3b}}+\frac{1}{\frac{9}{12a+6c}}$$
$$=\frac{2b+a+6c+3b+12a+6c}{9}=\frac{13a+5b+12c}{9}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{3}{10}$.

Ví dụ 2.20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{3}=2$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt[3]{abc}\le\frac{2}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\Rightarrow\frac{abc}{2}\le\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3=ab+bc+ca\ge 3\sqrt{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow abc\le 1.$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{abc}+\frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{1}{abc}+\frac{abc}{2}\ge\frac{1}{abc}+abc-\frac{abc}{2}\ge 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Ví dụ 2.21: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\sqrt{3a}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{6b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{6c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5\sqrt{3}$$

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại là

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$
$$\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}\le\frac{b}{a+b}+\frac{3b}{b+c}$$
$$\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{c}{a+c}+\frac{3c}{b+c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$
$$\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{3b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{3c}{b+c}=5$$

Do đẳng thức không xảy ra nên ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.22: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$$

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=1$ ta có

$$1-c^2=(a+b+c)^2-c^2=a^2+b^2+2(ab+bc+ca)\ge 2(ab+bc)+2(ab+ca)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ta được

$$\frac{ab}{2(ab+bc)+2(ab+ca)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{ab}{2(ab+bc)}+\frac{ab}{2(ab+ca)}\right)$$

Do đó ta có $$\frac{ab}{1-c^2}\le\frac{1}{8}\left(\frac{ab}{ab+bc}+\frac{ab}{ab+ca}\right)$$

Áp dụng tương tự

$$\frac{bc}{1-a^2}\le\frac{1}{8}\left(\frac{bc}{bc+ca}+\frac{bc}{ab+bc}\right);\ \frac{ca}{1-b^2}\le\frac{1}{8}\left(\frac{ca}{ca+ab}+\frac{ca}{bc+ca}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}$$
$$\le \frac{1}{8}\left(\frac{ab}{ab+bc}+\frac{ab}{ab+ca}+\frac{bc}{bc+ca}+\frac{bc}{ab+bc}+\frac{ca}{ca+ab}+\frac{ca}{bc+ca}\right)=\frac{3}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 2.23: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=\frac{3}{4}$. Cứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}\ge 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt[3]{a+3b}=\sqrt[3]{(a+3b).1.1}\le\frac{a+3b+2}{3}$$

Do đó ta được $$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}\ge\frac{3}{a+3b+2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}}\ge\frac{3}{b+3c+2};\ \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}\ge\frac{3}{c+3a+2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}\ge\frac{3}{a+3b+2}+\frac{3}{b+3c+2}+\frac{3}{c+3a+2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{3}{a+3b+2}+\frac{3}{b+3c+2}+\frac{3}{c+3a+2}\ge\frac{3.9}{4(a+b+c)+6}=3$$

Do đó ta được $$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}\ge 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

3. Kỹ thuật ghép cặp trong bất đẳng thức Cauchy

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật "Ghép cặp" để bài toán trở nên đơn giản.

Ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp phải hai dạng toán sau:

- Dạng 1: Chứng minh $X+Y+Z\ge A+B+C$.

Ý tưởng 1: Nếu ta chứng minh được $X+Y\ge 2\sqrt{XY}\ge 2A$.

Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $Y+Z\ge 2B;\ Z+X\ge 2C$ (Nhờ tính chất đối xứng của bài toán).

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có:

$$X+Y+Z\ge A+B+C$$

Ý tưởng 2: Nếu ta chứng minh được $X+A\ge 2\sqrt{XA}\ge 2B$

Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $Y+Z\ge 2C;\ Z+X\ge 2A$ (Nhờ tính chất đối xứng của bài toán).

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

- Dạng 2: Chứng minh $XYZ\ge ABC$ với $X, Y, Z\ge 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY\ge A^2$.

Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $YZ \ge B^2$; $ZX \ge C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên vế theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có

$$XYZ \ge \sqrt{A^2B^2C^2} = |ABC| \ge ABC.$$

Chú ý một số cách ghép đối xứng:

Phép cộng: $\begin{cases} 2(x+y+z) = x+y+y+z+z+x \\ x+y+z = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y+z}{2} + \dfrac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân: $\begin{cases} x^2y^2z^2 = (xy).(yz).(zx) \\ xyz = \sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx} \end{cases} \quad (x, y, z \ge 0)$

Ví dụ 3.1: Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \ge a+b+c$$

Phân tích: Bài toán này có dạng $X+Y+Z \ge A+B+C$, trong đó

$$X = \frac{ab}{c}, Y = \frac{bc}{a}, Z = \frac{ca}{b}, A = a, B = b, C = c.$$

Để ý rằng hai biểu thức $\frac{ab}{c}$ và $\frac{bc}{a}$ là đối xứng với b (tức vai trò của a và c như nhau). Do đó sử dụng kỹ thuật ghép cặp ta sẽ thử chứng minh $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b$

Tương tự ta có $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \ge 2a$; $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \ge 2c$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \ge a+b+c$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3.2: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

Phân tích: Nếu $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta xét trường hợp $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \ge 0$.

Để ý rằng bất đẳng thức này có dạng $XYZ \ge ABC$, vì vậy sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, ta chỉ cần chứng minh $b^2 \ge (a+b-c)(b+c-a)$.

Lời giải

Bất đẳng thức có tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$, Khi đó $a+b-c \ge 0$ và $a+c-b \ge 0$.

+ Nếu $b+c-a < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Nếu $b+c-a \ge 0$. Khi này ta có $b+c-a$; $c+a-b$; $a+b-c$ là các số dương.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi dạng $(x+y)^2 \ge 4xy$, suy ra

$$\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\le\frac{\left[\left(a+b-c\right)+\left(b+c-a\right)\right]^2}{4}=b^2$$

$$\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\le\frac{\left[\left(b+c-a\right)+\left(c+a-b\right)\right]^2}{4}=c^2$$

$$\left(c+a-b\right)\left(a+b-c\right)\le\frac{\left[\left(c+a-b\right)+\left(a+b-c\right)\right]^2}{4}=a^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được điều cần chứng minh.

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: *Khi chưa xác định được các số không âm mà áp dùng ngay bất đẳng thức Cauchy thì sẽ dẫn đến sai lầm. Trong tình huống đó ta có thể chia nhỏ thành các trường hợp riêng để chứng minh bài toán.*

Ví dụ 3.3: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

Phân tích: Để ý là $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2}{c^2}}=2\left|\frac{a}{c}\right|$, áp dụng tương tự và cộng theo vế các bất đẳng thức thu được.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}.\frac{b^2}{c^2}}=2\left|\frac{a}{c}\right|$

Tương tự ta được $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 2\left|\frac{b}{a}\right|;\ \frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\ge 2\left|\frac{c}{b}\right|$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\ge 2\left(\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{b}\right|+\left|\frac{a}{c}\right|\right)\ge 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

Hay $$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

Phân tích: Để ý là theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}}\ge\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}=2\sqrt{\frac{bc}{a}}$ và cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\cdot\sqrt{\frac{ca}{b}}}=2\sqrt{c}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}}\ge\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}=2\sqrt{\frac{bc}{a}}$

Tương tự ta được $\frac{c+a}{\sqrt{b}}\ge 2\sqrt{\frac{ca}{b}};\ \frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\ge 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}}\cdot\sqrt{\frac{ca}{b}}}=2\sqrt{c}$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\ge 2\sqrt{a};\quad \sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\ge 2\sqrt{b}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

Do đó ta suy ra $\qquad\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

Ta cần chứng minh được $2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $abc=1$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3.5: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\le\frac{1}{8}abc$$

Phân tích: Từ giả thiết ta nhận được $\left(p-a\right);\ \left(p-b\right);\ \left(p-c\right)$ là các số dương và chú đến $p-a+p-b=c$. Do đó ta nghĩ đến đánh giá $\sqrt{\left(p-a\right)\left(p-b\right)}\le\frac{p-a+p-b}{2}=\frac{c}{2}$. Như vậy ta có thể chứng minh bất đẳng thức như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)&=\sqrt{\left(p-a\right)\left(p-b\right)}\sqrt{\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\sqrt{\left(p-c\right)\left(p-a\right)}\\&\le\frac{\left(p-a\right)+\left(p-b\right)}{2}\cdot\frac{\left(p-b\right)+\left(p-c\right)}{2}\cdot\frac{\left(p-c\right)+\left(p-a\right)}{2}\\&\le\frac{2p-\left(a+b\right)}{2}\cdot\frac{2p-\left(b+c\right)}{2}\cdot\frac{2p-\left(c+a\right)}{2}=\frac{1}{8}abc\end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3.6: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\right)\\&\ge\frac{1}{\sqrt{\left(p-a\right)\left(p-b\right)}}+\frac{1}{\sqrt{\left(p-b\right)\left(p-c\right)}}+\frac{1}{\sqrt{\left(p-c\right)\left(p-a\right)}}\end{aligned}$$

$$\ge \frac{1}{\frac{(p-a)+(p-b)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p-b)+(p-c)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p-c)+(p-a)}{2}}$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$10a^2 + 10b^2 + c^2 \ge 4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$8a^2 + \frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{8a^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = 4ac$$

$$8b^2 + \frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{8b^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = 4bc$$

$$2a^2 + 2b^2 \ge 2\sqrt{2a^2.2b^2} = 4ab$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có $10a^2 + 10b^2 + c^2 \ge 4(ab + bc + ca) = 4.1 = 4$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ab + bc + ca = 1 \\ 8a^2 = 8b^2 = \dfrac{c^2}{2} \\ 2a^2 = 2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \dfrac{1}{3} \\ c = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Nhận xét: *Đây là một lời giải ngắn gọn nhưng có vẻ hơi thiếu tự nhiên. Chúng ta sẽ thắc mắc tại sao lại tách được $10 = 8 + 2$. Nếu tách cách khác, chẳng hạn $10 = 6 + 4$ liệu có giải được không? Tất nhiên mọi cách tách khác đều không dẫn đến kết quả, và tách $10 = 8 + 2$ cũng không phải là sự may mắn. Bây giờ ta sẽ tìm lí do việc tách $10 = 8 + 2$ ở bài toán trên.*

Từ bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vai trò của a, b như nhau nên ta cần chia đều c ra thành hai phần và cũng lấy ra ka, kb để ghép cặp với $\frac{c}{2}$. Tức là với $0 < k < 10$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$ka^2 + \frac{c^2}{2} \ge 2\sqrt{ka^2.\frac{c^2}{2}} = \sqrt{2k}ac$$

$$kb^2 + \frac{c}{2}^2 \ge 2\sqrt{kb^2.\frac{c^2}{2}} = \sqrt{2k}bc$$

$$(10-k)a^2 + (10-k)b^2 \ge 2\sqrt{(10-k)a^2(10-k)b^2} = (20-2k)ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$10a^2 + 10b^2 + c^2 \ge \sqrt{2k}(ac + bc) + (20-2k)ab$$

Lúc này ta cân bằng hệ số để làm xuất hiện giả thiết, tức là:

$$\sqrt{2k} = 20 - 2k \Leftrightarrow 2k = 400 - 80k + 4k^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 41k + 200 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 8 \\ k = \dfrac{25}{2} > 10 \end{array}\right.$$

Ta chọn giá trị $k = 8$. Khi đó ta có lời giải bài toán như trên.

Ví dụ 3.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 5$. Chứng minh rằng:

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \ge 10$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2a^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{2a^2.\frac{c^2}{2}}=2ac$$
$$2b^2+\frac{c^2}{2}\ge 2\sqrt{2b^2.\frac{c^2}{2}}=2bc$$
$$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2.b^2}=2ab$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$3a^2+3b^2+c^2\ge 2\left(ab+bc+ca\right)=2.5=10$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=1;\ c=2$

Ví dụ 3.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab\ge 12,\ bc\ge 8$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{121}{12}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán được đẳng thức ra tại $a=3,b=4,c=2$, Khi đó ta sẽ tách các đại lượng bên vế trái và áp dụng bất đẳng thức Cauchy, chú ý là quá trình ghép cặp phải đảm bảo dấu đẳng thức xẩy ra. Với phân tích đó ta thực hiện ghép cặp như sau

$$\frac{2}{ab}+\frac{a}{18}+\frac{b}{24}\ge\frac{1}{2};\ \frac{2}{bc}+\frac{b}{16}+\frac{c}{8}\ge\frac{3}{4};\ \frac{2}{ca}+\frac{a}{9}+\frac{c}{6}\ge 1$$

Cộng các kết quả trên ta được $\frac{a}{6}+\frac{5b}{48}+\frac{7c}{24}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}\ge\frac{9}{4}$, khi này ta cần phải chứng minh được $\frac{5a}{6}+\frac{43b}{48}+\frac{17c}{24}+\frac{8}{abc}\ge\frac{47}{6}$. Để ý là nếu bây giờ ta ghép cặp bốn đại lượng trên thì sẽ không bảo toàn dấu đẳng thức. Cho nên ta sẽ ghép cặp để triệt tiêu đại lượng $\frac{8}{abc}$ trước, do đó ta có đánh giá $\frac{8}{abc}+\frac{a}{9}+\frac{b}{12}+\frac{c}{6}\ge\frac{4}{3}$. Cuối cùng bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được chỉ ra được $\frac{13a}{18}+\frac{13b}{16}+\frac{13c}{24}\ge\frac{13}{2}$.

Thực hiện ghép cặp tương tự như các ví dụ trên ta có các đánh giá sau $\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\ge\frac{13}{3};\ \frac{13c}{24}+\frac{13b}{48}\ge\frac{13}{6}$, cộng theo vế hai đánh giá đó ta được điều phải chứng minh.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{2}{ab}+\frac{a}{18}+\frac{b}{24}\ge\frac{1}{2};\ \frac{2}{bc}+\frac{b}{16}+\frac{c}{8}\ge\frac{3}{4};\ \frac{2}{ca}+\frac{a}{9}+\frac{c}{6}\ge 1$$
$$\frac{8}{abc}+\frac{a}{9}+\frac{b}{12}+\frac{c}{6}\ge\frac{4}{3};\ \frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\ge\frac{13}{3};\ \frac{13c}{24}+\frac{13b}{48}\ge\frac{13}{6}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\ge\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{4}{3}+\frac{13}{3}+\frac{13}{6}=\frac{121}{12}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3,\ b=4,\ c=2$.

Ví dụ 3.10: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2+\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Phân tích: Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Để ý bên vế phải ta viết được thành $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$. Do đó ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy với các nhóm

$$\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c},\frac{a}{a}\right);\left(\frac{b}{a},\frac{b}{b},\frac{b}{c}\right);\left(\frac{c}{a},\frac{c}{b},\frac{c}{c}\right)$$

Lúc này ta được $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\ge\frac{3\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}$. Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{3\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}+3$ hay $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3$. Rõ ràng đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2+\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\ge\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}};\ \frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\ge\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}};\ \frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\ge\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\ge\frac{3\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ \text{hay}\ \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3$$

Suy ra $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\ge\frac{3\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}+3$$

Hay $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\sqrt[3]{abc}\ge\frac{10}{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Theo một đánh giá quen thuộc ta nhận thấy $\frac{10}{9\left(a^2+b^2+c^2\right)} \le \frac{10}{3\left(a+b+c\right)^2} = \frac{10}{3}$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\sqrt[3]{abc} \ge \frac{10}{3}$. Để chứng minh được bất đẳng thức đó thì ta cần triệt tiêu được $\sqrt[3]{abc}$, điều này có nghĩa là ta cần có một đánh giá kiểu $\sqrt[3]{abc}+\frac{k}{\sqrt[3]{abc}} \ge 2\sqrt{k}$, chú ý đến đẳng thức xảy ra ta chọn được $k = \frac{8}{9}$. Tuy nhiên để làm xuất hiện $\frac{8}{9\sqrt[3]{abc}}$ thì ta cần chứng minh được $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$.

Để ý rằng $\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$, áp dụng ghép cặp tương tự ta được $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$; $\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \ge \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Do đó ta được bất đẳng thức $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\sqrt[3]{abc} \ge \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\sqrt[3]{abc}$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\sqrt[3]{abc} \ge \frac{10}{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{9\sqrt[3]{abc}}+\sqrt[3]{abc} \ge \frac{2}{3}$

Mà $a+b+c=1$, suy ra $\sqrt[3]{abc} \le \frac{1}{3}$ nên $\frac{8}{9\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{8}{3}$

Do đó $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{9\sqrt[3]{abc}}+\sqrt[3]{abc}+\frac{8}{9\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{2}{3}+\frac{8}{3} = \frac{10}{3}$

Mặt khác, theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\frac{10}{9\left(a^2+b^2+c^2\right)} \le \frac{10}{3\left(a+b+c\right)^2} = \frac{10}{3}$$

Từ đó ta được $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\sqrt[3]{abc} \ge \frac{10}{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.12: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{a^2+1}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{a+b}} \ge 3$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta để ý đến đánh giá $a^2 + 1 \ge 2a$, khi đó ta được bất đẳng thức
$$\sqrt{\frac{a^2+1}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{a+b}} \ge \sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}}$$

Như vậy ta cần phải chứng minh $\sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \ge 3$, đây là một bất đẳng thức nhìn hình thức thì đẹp nhưng đáng tiếc nó lại không đúng, ta có thể kiểm tra với $a = b;\ c = 0$. Như vậy đánh giá trên không hiệu quả.

Để ý ta thấy vế phải là hằng số 3, do đó nếu ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số vế trái thì khi đó ta được $3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(b+c)(c+a)(a+b)}}}$ và như vậy ta chỉ cần chỉ ra đại lượng dưới dấu căn lớn hơn hoặc bằng 1 là được. Điều này có nghĩa là ta cần chứng minh được
$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (b+c)(c+a)(a+b)$$

Chú ý đến tính đối xứng trong bất đẳng thức trên ta nghĩ đến đánh giá
$$(a^2+1)(b^2+1) \ge (a+b)^2$$

Đây là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunhiacopxki.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\sqrt{\frac{a^2+1}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{c+a}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{a+b}} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(b+c)(c+a)(a+b)}}}$$

Như vậy ta cần chứng minh được $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{(b+c)(c+a)(a+b)} \ge 1$

Hay $$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (b+c)(c+a)(a+b)$$

Thật vậy, ta có
$$(a^2+1)(b^2+1) \ge (a+b)^2 \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \ge a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2b^2 + 1 \ge 2ab$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy

Áp dụng tương tự ta được $(b^2+1)(c^2+1) \ge (b+c)^2$; $(a^2+1)(c^2+1) \ge (a+c)^2$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được
$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (b+c)(c+a)(a+b)$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}\ge 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}}}$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}\ge 1$

Hay $(a+b)(b+c)(c+a)\ge(c+ab)(a+bc)(b+ca)$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2\le\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^6=64$$

Và $4(c+ab)(a+bc)\le(c+ab+a+bc)^2=(b+1)^2(a+c)^2$

Tương tự ta được

$$\begin{aligned}64(c+ab)^2(a+bc)^2(b+ca)^2&\le(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\\&\le 64(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\end{aligned}$$

Hay $(a+b)(b+c)(c+a)\ge(a+ab)(a+bc)(b+ca)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3.14: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}}+\sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}}+\sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}}\ge 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}}+\sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}}+\sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}}\\&\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)}{(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)}}}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)}{(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)}\ge 1$$

Hay $(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)\ge(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)=(a^2+b^2+b^2)(b^2+c^2+c^2)\ge(b^2+bc+ac)^2$$

$$(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)=(b^2+c^2+c^2)(c^2+a^2+a^2)\ge(c^2+ca+ab)^2$$

$$(c^2+2a^2)(a^2+2b^2)=(c^2+a^2+a^2)(a^2+b^2+b^2)\ge(a^2+ab+bc)^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.15: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\left(a+b+c\right)^2 \ge 8\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2$$

Lời giải

Đặt $x = a^2;\ y = b^2;\ z = c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \ge 8\left(xy+yz+zx\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $x+y \ge 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \ge \dfrac{4xy}{x+y}$

Áp dụng tương tự được $2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx} \ge \dfrac{4xy}{x+y}+\dfrac{4yz}{y+z}+\dfrac{4zx}{z+x}$

Do đó ta được $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2 \ge \left(x+y+z\right)+\dfrac{4xy}{x+y}+\dfrac{4yz}{y+z}+\dfrac{4zx}{z+x}$

Như vậy ta được

$$\begin{aligned}&\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\\ &\ge \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left[\left(x+y+z\right)+\frac{4xy}{x+y}+\frac{4yz}{y+z}+\frac{4zx}{z+x}\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left[\left(x+y+z\right)+\frac{4xy}{x+y}+\frac{4yz}{y+z}+\frac{4zx}{z+x}\right] \ge 8\left(xy+yz+zx\right)^2$$

Hay

$$\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\left[\left(x+y+z\right)+\frac{4xy}{x+y}+\frac{4yz}{y+z}+\frac{4zx}{z+x}\right]-8\left(xy+yz+zx\right)^2 \ge 0$$

Hay $xy\left(x-y\right)^2+yz\left(y-z\right)^2+zx\left(z-x\right)^2 \ge 0$, bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.16: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right) \ge \left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right)$$

Phân tích: Quan sát đại lượng $\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)$ ta liên tưởng đến bất đẳng thức đã được chứng minh $\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)\left(1+z^3\right) \ge \left(1+xyz\right)^3$, tuy nhiên để ý các đại lượng bên vế phải thì ta áp dụng bất đẳng thức trên kiểu như

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+b^3\right) \ge \left(1+ab^2\right)^3.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với mọi số thực dương x, y, z ta có

$$\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)\left(1+z^3\right) \ge \left(1+xyz\right)^3$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$1+x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3z^3 \ge 1+3xyz+3x^2y^2z^2+x^3y^3z^3$$

Hay $$x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \ge 3xyz+3x^2y^2z^2$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz;\ \ x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \ge 3x^2y^2z^2$$
Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được
$$x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \ge 3xyz+3x^2y^2z^2$$
Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức trên ta được
$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+b^3\right) \ge \left(1+ab^2\right)^3$$
$$\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\left(1+c^3\right) \ge \left(1+bc^2\right)^3$$
$$\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)\left(1+a^3\right) \ge \left(1+ca^2\right)^3$$
Nhân từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được
$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right) \ge \left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right)$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3.17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:
$$\left(a+b-c\right)^3+\left(b+c-a\right)^3+\left(c+a-b\right)^3 \ge a^3+b^3+c^3$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\left(a+b-c\right)+\left(b+c-a\right)=2b$, như vậy nếu ta chứng minh được đánh giá $\left(a+b-c\right)^3+\left(b+c-a\right)^3 \ge k\left[\left(a+b-c\right)+\left(b+c-a\right)\right]^3$ thì bài toán có cơ hội được chứng minh.

Chú ý đến đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$ ta chọn được $k=\frac{1}{4}$. Để áp dụng cho các trường hợp khác ta quy về chứng minh bổ đề:

Với mọi $x;\ y>0$ ta có $x^3+y^3 \ge \frac{\left(x+y\right)^3}{4}$.

Đây là một bất đẳng thức đúng và được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương đồng thời sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Bổ đề: Với mọi x, y > 0, ta có $x^3+y^3 \ge \frac{\left(x+y\right)^3}{4}$

Chứng minh: Do $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$ nên bổ đề trên tương đương với
$$x^2-xy+y^2 \ge \frac{\left(x+y\right)^2}{4}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy hai số dạng $xy \le \frac{\left(x+y\right)^2}{4}$, ta được
$$x^2-xy+y^2=\left(x+y\right)^2-3xy \ge \left(x+y\right)^2-3\cdot\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{\left(x+y\right)^2}{4}$$
Bổ đề được chứng minh.

Để ý rằng a, b, c là ba cạnh của tam giác thì hiển nhiên ta có:
$$a+b-c>0,\ b+c-a>0,\ c+a-b>0$$
Áp dụng bổ đề, ta có:

$$\left(a+b-c\right)^3+\left(b+c-a\right)^3\ge\frac{\left[\left(a+b-c\right)+\left(b+c-a\right)\right]^3}{4}=2b^3$$
$$\left(b+c-a\right)^3+\left(c+a-b\right)^3\ge\frac{\left[\left(b+c-a\right)+\left(c+a-b\right)\right]^3}{4}=2c^3$$
$$\left(c+a-b\right)^3+\left(a+b-c\right)^3\ge\frac{\left[\left(c+a-b\right)+\left(a+b-c\right)\right]^3}{4}=2a^3$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo ta được

$$\left(a+b-c\right)^3+\left(b+c-a\right)^3+\left(c+a-b\right)^3\ge a^3+b^3+c^3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3.18: Cho các số thực $a,\ b,\ c>2$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng :

$$\left(a-2\right)\left(b-2\right)\left(c-2\right)\le 1$$

Lời giải

Đặt $a=x+2, b=y+2, c=z+2$ với $x,\ y,\ z>0$. Ta có:

Khi đó giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $xyz\le 1$.

Biến đổi giả thiết áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{z+2}=1-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{y+2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{y+2}\right)$$
$$=\frac{x}{2\left(x+2\right)}+\frac{y}{2\left(y+2\right)}\ge\sqrt{\frac{xy}{\left(x+2\right)\left(y+2\right)}}$$

Tương tự ta được $\frac{1}{y+2}\ge\sqrt{\frac{zx}{\left(z+2\right)\left(x+2\right)}};\ \frac{1}{x+2}\ge\sqrt{\frac{yz}{\left(y+2\right)\left(z+2\right)}}$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$\frac{1}{\left(x+2\right)\left(y+2\right)\left(z+2\right)}\ge\frac{xyz}{\left(x+2\right)\left(y+2\right)\left(z+2\right)}\Rightarrow xyz\le 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Ví dụ 3.19: Cho a, b, c các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}\le\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}$$

Phân tích: Bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$. Để ý là $\left(a+3b\right)+\left(b+2c+a\right)=2\left(a+2b+c\right)$ nên rất tự nhiên ta nghĩ đến đánh giá

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+2c+a}\ge\frac{4}{\left(a+3b\right)+\left(b+2c+a\right)}=\frac{2}{a+2b+c}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ ta có

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+2c+a}\ge\frac{4}{(a+3b)+(b+2c+a)}=\frac{2}{a+2b+c}$$

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+2a+b}\ge\frac{4}{(b+3c)+(c+2a+b)}=\frac{2}{b+2c+a}$$

$$\frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\ge\frac{4}{(c+3a)+(a+2b+c)}=\frac{2}{c+2a+b}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}\le\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a+3b=b+2c+a\\b+3c=c+2a+b\\c+3a=a+2b+c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$

4. Kỹ thuật thêm bớt

Nếu ở các kỹ thuật trên, ta được rèn luyện thói quen định hướng dựa vào bề ngoài của một bài toán. Thì từ đây ta bắt đầu gặp những lớp bất đẳng thức phong phú hơn – những bất đẳng thức mà lời giải cho chúng luôn đòi hỏi một tầm nhìn bao quát cũng như sự đột phá ý tưởng. Kỹ thuật thêm bớt là một minh chứng rõ ràng nhất cho lối tư duy sử dụng những “yếu tố bên ngoài” trong việc giải quyết vấn đề.

Ngay từ đây chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với kỹ thuật này với những ví dụ mà cách đánh giá nó tương đối đa dạng.

Ví dụ 4.1: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương và cũng có thể chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên bây giờ ta sẽ áp dụng ngay bất đẳng thức Cauchy để chứng minh bài toán. Dễ dàng nhận ra không thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy cũng không thể sử dụng kĩ thuật ghép đối xứng để giải quyết bài toán. Ta dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$. Bên vế trái xuất hiện các đại lượng $\frac{a^2}{b};\frac{b^2}{c};\frac{c^2}{a}$ và bên vế phải có đại lượng $a+b+c$, chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp sau

$$\left(\frac{a^2}{b},b\right);\left(\frac{b^2}{c},c\right);\left(\frac{c^2}{a},a\right)$$

Để sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp trên, trước hết ta cần phải thêm vào vế trái một tổng $a+b+c$ rồi mới tiến hành ghép theo cặp.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{a^2}{b}+b\ge 2a;\ \frac{b^2}{c}+c\ge 2b;\ \frac{c^2}{a}+a\ge 2c$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\ge 2a+2b+2c\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 4.2: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Phân tích: Áp dụng ý tưởng như trên, tuy nhiên ở đây ta cần triệt tiêu $b+c$ ở dưới mẫu nên ta thêm cho $\frac{a^2}{b+c}$ một số $\frac{b+c}{k}$ và chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$ nên ta tìm được $k=4$. Do đó ta có lời giải như sau.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge a;\ \frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\ge b;\ \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\ge a+b+c$$

Suy ra
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 4.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể chứng minh được bài toán theo ý tưởng như trên, nhưng ta cần trả lời được các câu hỏi đặt ra là

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mấy số?
- Các đại lượng được thêm vào có dạng như thế nào?

Để ý đến đại lượng $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}$ ta thấy nên áp dụng bất đẳng thức cho ba số, khi đó đại lượng thêm vào cần triệt tiêu được tích $(b+1)(c+1)$ ở dưới mẫu, do đó ta nghĩ đến các đại lượng kiểu $\frac{b+1}{k};\frac{c+1}{k}$ với k là một số dương nào đó. Chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$, khi đó $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}=\frac{b+1}{k}=\frac{c+1}{k}$ sẽ cho ta $k=4$. Vì vậy ta có chứng minh sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\ge3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\cdot\frac{1+b}{8}\cdot\frac{1+c}{8}}=\frac{3}{4}a$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{8}+\frac{1+a}{8}\ge\frac{3}{4}b;\ \frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\ge\frac{3}{4}c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}(a+b+c)$$

Hay $$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết $abc=1$, ta lại có

$$\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{abc}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

Suy ra $$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b^3}{c(a+2)}+\frac{c^3}{a(b+2)}\ge 1$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$, khi đó ta chú ý đến đánh giá sau $\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b}{3}+\frac{c+2}{9}\ge a$ và áp dụng tương tự.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b}{3}+\frac{c+2}{9}\ge a;\ \frac{b^3}{c(a+2)}+\frac{c}{3}+\frac{a+2}{9}\ge b;\ \frac{c^3}{a(b+2)}+\frac{a}{3}+\frac{b+2}{9}\ge c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b^3}{c(a+2)}+\frac{c^3}{a(b+2)}+\frac{a+b+c}{3}+\frac{a+b+c+6}{9}\ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b^3}{c(a+2)}+\frac{c^3}{a(b+2)}\ge\frac{5(a+b+c)}{9}-\frac{2}{3}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$. Do đó

$$\frac{a^3}{b(c+2)}+\frac{b^3}{c(a+2)}+\frac{c^3}{a(b+2)}\ge\frac{5.3}{9}-\frac{2}{3}=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4.5: Cho a, b, c độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c}+\frac{(c+a-b)^3}{3b}+\frac{(b+c-a)^3}{3a}\ge 1$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c=1$, khi đó ta chú ý đến đánh giá sau

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c}+\frac{c}{3}+\frac{1}{3}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b-c)^3}{3c}\cdot\frac{c}{3}\cdot\frac{1}{3}}\ge a+b-c$$ và áp dụng tương tự.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c}+\frac{c}{3}+\frac{1}{3}\ge a+b-c$$
$$\frac{(c+a-b)^3}{3b}+\frac{b}{3}+\frac{1}{3}\ge c+a-b$$
$$\frac{(b+c-a)^3}{3a}+\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\ge b+c-a$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c}+\frac{(c+a-b)^3}{3b}+\frac{(b+c-a)^3}{3a}\ge a+b+c-\frac{a+b+c}{3}-1=1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 4.6: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{c^2a}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b}{c^3(a+b)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$, khi đó ta chú ý đến đánh giá $\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}+\frac{1}{2b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^2c}{a^3(b+c)}\cdot\frac{b+c}{4bc}\cdot\frac{1}{2b}}=\frac{3}{2a}$ và áp dụng tương tự.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}+\frac{1}{2b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{b^2c}{a^3(b+c)}\cdot\frac{b+c}{4bc}\cdot\frac{1}{2b}}=\frac{3}{2a}$$

Từ đó suy ta $\quad \frac{b^2c}{a^3(b+c)}\ge\frac{3}{2a}-\frac{b+c}{4bc}-\frac{1}{2b}=\frac{3}{2a}-\frac{3}{4b}-\frac{1}{4c}$

Tương tự ta có $\quad \frac{c^2a}{b^3(c+a)}\ge\frac{3}{2b}-\frac{3}{4c}-\frac{1}{4a};\ \frac{a^2b}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2c}-\frac{3}{4a}-\frac{1}{4b}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{c^2a}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b}{c^3(a+b)}\ge\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 4.7: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\ge a+\frac{b}{2}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức khác so với các ví dụ trên, tuy nhiên đẳng thức vẫn xảy ra tại $a=b=c$. Để ý hai đại lượng đầu ta sử dụng cách thêm – bớt như các ví dụ trên thì được $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b$ khi đó ta được $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\ge\frac{c^2}{b+c}+a+\frac{3b}{4}-\frac{3c}{4}$ và ta cần phải chứng minh được

$\frac{c^2}{b+c}+a+\frac{3b}{4}-\frac{3c}{4}\ge a+\frac{b}{2}$ hay $\frac{c^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge c$, đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}a;\ \frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}b;\ \frac{c^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\ge c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a}{2}+b+c\ge\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b+c$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^2}{b+c}\ge a+\frac{b}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 4.8: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Phân tích: Dự đoán đẳng thức xẩy ra tại $a=b=c$, quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bên trái có đại lượng $\frac{a^2}{b}$ và vế phải lại chứa $\sqrt{a^2-ab+b^2}$, do đó để sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x+y\ge2\sqrt{xy}$ ta cần làm xuất hiện đại lượng a^2-ab+b^2, do đó ta để ý đến phép biến đổi $\frac{a^2}{b}=\frac{a^2}{b}-a+b+a-b=\frac{a^2-ab+b^2}{b}+a-b$, lúc này chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta có đánh giá $\frac{a^2-ab+b^2}{b}+b\ge2\sqrt{a^2-ab+b^2}$. Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge2\sqrt{a^2-ab+b^2}+2\sqrt{b^2-bc+c^2}+2\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được một trong hai khả năng sau

$$2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c$$

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\ge a+b+c$$

Để ý ta nhận thấy $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$ do đó khả năng thứ nhất luôn đúng. Như vậy bài toán được chứng minh.

Lời giải

Ta có $\frac{a^2}{b}=\frac{a^2}{b}-a+b+a-b=\frac{a^2-ab+b^2}{b}+a-b$, tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2-ab+b^2}{b}+\frac{b^2-bc+c^2}{c}+\frac{c^2-ca+a^2}{a}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2-ab+b^2}{b}+b\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}$$
$$\frac{b^2-bc+c^2}{c}+c\ge 2\sqrt{b^2-bc+c^2}$$
$$\frac{c^2-ca+a^2}{a}+a\ge 2\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Suy ra $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge 2\sqrt{a^2-ab+b^2}+2\sqrt{b^2-bc+c^2}+2\sqrt{c^2-ca+a^2}$

Ta cần chứng minh được $2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+a+b+c$

Hay $$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$$

Bất đẳng thức cuối cũng chính là bất đẳng thức trong ví dụ 1.
Vậy bài toán được chứng minh xong.
Nhận xét: *Từ những ví dụ trên ta đã thấy được sự hiệu quả của kỹ thuật thêm - bớt trong chứng minh bất đẳng thức. Tuy nhiên không phải với bất đẳng thức nào cũng có thể làm được theo cách như trên, mà đôi khi ta cần phải thực hiện việc biến đổi tương bất đẳng thức trước rồi mới thực hiện thêm bớt. Dưới đây là một số ví dụ như vậy.*

Ví dụ 4.9: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}$$

Phân tích: Nhận thấy ta chưa thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá ngay bất đẳng thức trên, do đó ta cần biến đổi bất đẳng thức thành $\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}\ge 0$, đến đây ta cũng chưa thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy. Bây giờ ta cần tìm cách loại đi các dấu trừ mới có thể áp dụng được, để ý đến $\frac{a-b}{b+c}+1=\frac{c+a}{b+c}$ lúc này ta có thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành
$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}\ge 0$$
Để ý rằng $\frac{a-b}{b+c}+1=\frac{c+a}{b+c}$, $\frac{b-c}{c+a}+1=\frac{a+b}{c+a}$, $\frac{c-a}{a+b}+1=\frac{b+c}{a+b}$
Vậy sau khi thêm bớt như vậy, ta đã quy bài toán về chứng minh.
$$\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\ge 3$$
Mặt khác bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì
$$\frac{a+b}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c+a}.\frac{c+a}{b+c}.\frac{b+c}{a+b}}=3$$
Phép chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 4.10: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$$

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt ta có bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 2\left(ab+bc+ca\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge \left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(ab+bc+ca\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge \left(a+b+c\right)^2\ge 9$$

Vậy ta cần chứng minh: $a^2+b^2+c^2+2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 9$

Hay là $$\left(a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\right)+\left(b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\right)+\left(c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\right)\ge 9$$

Điều này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy bộ ba số ta có

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\ge 3\sqrt[3]{a^2.\sqrt{a}.\sqrt{a}}=3a$$
$$b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\ge 3\sqrt[3]{b^2.\sqrt{b}.\sqrt{b}}=3b$$
$$c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\ge 3\sqrt[3]{c^2.\sqrt{c}.\sqrt{c}}=3c$$

Bài toán được giải quyết. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Ví dụ 4.11: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt{ab}}\ge \frac{3}{2}$$

Phân tích: Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức thì điều đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên ta xem có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy được không? Nhận thấy dưới các mẫu có chứa căn bậc hai và ta tìm cách khử căn trước.

Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá $2\sqrt{bc}\le b+c$, khi đó ta được $\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}\ge \frac{2a^2}{2a+b+c}$, hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt{ab}}\ge \frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2c^2}{2c+a+b}$$

Ta cần chỉ ra được $$\frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2c^2}{2c+a+b}\ge \frac{3}{2}$$

Để ý đến đánh giá $\frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2a+b+c}{8}\ge a$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2c^2}{2c+a+b}\ge \frac{a+b+c}{2}\ge \frac{3}{2}$$

Đến đây bài toán được chứng minh xong.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $2\sqrt{bc}\le b+c$ suy ra $\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}\ge \frac{2a^2}{2a+b+c}$.

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt{ab}}\ge \frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2c^2}{2c+a+b}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2c^2}{2c+a+b}\ge \frac{3}{2}$, thật vậy

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2a+b+c}{8}\ge a;\ \frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2b+c+a}{8}\ge b;\ \frac{2c^2}{2c+a+b}+\frac{2c+a+b}{8}\ge c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a^2}{2a+b+c}+\frac{2b^2}{2b+c+a}+\frac{2c^2}{2c+a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}\ge\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ví dụ 4.12: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c\ge 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^3}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^3}{c+\sqrt{ab}}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $2\sqrt{bc}\le b+c$ suy ra $\dfrac{a^3}{a+\sqrt{bc}}\ge\dfrac{2a^3}{2a+b+c}$.

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{a+\sqrt{bc}}+\frac{b^3}{b+\sqrt{ca}}+\frac{c^3}{c+\sqrt{ab}}\ge\frac{2a^3}{2a+b+c}+\frac{2b^3}{2b+c+a}+\frac{2c^3}{2c+a+b}$$

Ta cần chứng minh được $\dfrac{2a^3}{2a+b+c}+\dfrac{2b^3}{2b+c+a}+\dfrac{2c^3}{2c+a+b}\ge\dfrac{3}{2}$, thật vậy

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{2a^3}{2a+b+c}+\frac{a\left(2a+b+c\right)}{8}\ge a^2$$
$$\frac{2b^3}{2b+c+a}+\frac{b\left(2b+c+a\right)}{8}\ge b^2$$
$$\frac{2c^3}{2c+a+b}+\frac{c\left(2c+a+b\right)}{8}\ge c^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a^3}{2a+b+c}+\frac{2b^3}{2b+c+a}+\frac{2c^3}{2c+a+b}+\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{4}\ge a^2+b^2+c^2$$

Hay $$\frac{2a^3}{2a+b+c}+\frac{2b^3}{2b+c+a}+\frac{2c^3}{2c+a+b}\ge\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(ab+bc+ca\right)}{4}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(ab+bc+ca\right)}{4}\ge\dfrac{3}{2}$

Thật vậy, từ giả thiết ta có $a^2+b^2+c^2\ge 3$ và $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Do đó suy ra $$\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(ab+bc+ca\right)}{4}\ge\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}\ge\frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ví dụ 4.13: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a\left(a-2b+c\right)}{ab+1}+\frac{b\left(b-2c+a\right)}{bc+1}+\frac{c\left(c-2a+b\right)}{ca+1}\ge 0$$

Phân tích: Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trên sao cho vế phải là một số khác không, điều này làm ta nghĩ đến cộng vào hai vế của bất đẳng thức với một số dương nào đó?

Để ý ta thấy $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}=\frac{a(3-3b)}{ab+1}=\frac{3a-3ab}{ab+1}$, khi đó để làm mất dấu từ ta cộng thêm 3 thì được $\frac{3a-3ab}{ab+1}+3=\frac{3a+3}{ab+1}$, thực hiện tương tự ta được bất đẳng thức $\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\ge 3$. Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì được

$$\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ge(ab+1)(bc+1)(ca+1)$$

Đến đây ta biến đổi tương đương đổi tương đương thì được

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ge(ab+1)(bc+1)(ca+1)$$
$$\Leftrightarrow abc+a+b+c+1\ge a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+1$$
$$\Leftrightarrow abc(1-abc)+a+b+c(1-abc)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $abc\le 1$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Để ý ta thấy $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}=\frac{a(3-3b)}{ab+1}=\frac{3a-3ab}{ab+1}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh là $\frac{3a-3ab}{ab+1}+\frac{3b-3bc}{bc+1}+\frac{3c-3ca}{ca+1}\ge 0$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{3a-3ab}{ab+1}+3+\frac{3b-3bc}{bc+1}+3+\frac{3c-3ca}{ca+1}+3\ge 9$

Hay $\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\ge 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ge(ab+1)(bc+1)(ca+1)$$

Đến đây ta biến đổi tương đương đổi tương đương thì được

$$(a+1)(b+1)(c+1)\ge(ab+1)(bc+1)(ca+1)$$
$$\Leftrightarrow abc+a+b+c+1\ge a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+1$$
$$\Leftrightarrow abc(1-abc)+(a+b+c)(1-abc)\ge 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ suy ra $abc\le 1$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: *Thông qua các ví dụ trên ta nhận thấy được hiệu quả của kĩ thuật thêm - bớt trong bất đẳng thức Cauchy*

- *Bất đẳng thức Cauchy có thể giúp ta loại bỏ các rào cản như các căn thức, các lũy thừa bậc cao,...*
- *Kĩ thuật thêm - bớt có thể giúp ta đối xứng hóa bất đẳng thức cũng như các đánh giá hợp lí trong quá trình tìm lời giải.*

- *Chú ý đến điểm rơi giúp ta bảo toàn dấu đẳng thức trong chuỗi đánh giá.*

Sau đây là một số ví dụ khác

Ví dụ 4.14: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=2abc$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a\left(2a-1\right)^2}+\frac{1}{b\left(2b-1\right)^2}+\frac{1}{c\left(2c-1\right)^2}\ge \frac{1}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=2abc$ suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$.

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, khi đó ta có $x+y+z=2$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\frac{x^3}{\left(2-x\right)^2}+\frac{y^3}{\left(2-y\right)^2}+\frac{z^3}{\left(2-z\right)^2}\ge \frac{1}{2}$

Hay $$\frac{x^3}{\left(y+z\right)^2}+\frac{y^3}{\left(z+x\right)^2}+\frac{z^3}{\left(x+y\right)^2}\ge \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^3}{\left(y+z\right)^2}+\frac{y+z}{8}+\frac{y+z}{8}\ge \frac{3x}{4}$$
$$\frac{y^3}{\left(z+x\right)^2}+\frac{z+x}{8}+\frac{z+x}{8}\ge \frac{3y}{4}$$
$$\frac{z^3}{\left(x+y\right)^2}+\frac{x+y}{8}+\frac{x+y}{8}\ge \frac{3z}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{\left(y+z\right)^2}+\frac{y^3}{\left(z+x\right)^2}+\frac{z^3}{\left(x+y\right)^2}+\frac{x+y+z}{2}\ge \frac{3\left(x+y+z\right)}{24}$$

Hay $$\frac{x^3}{\left(y+z\right)^2}+\frac{y^3}{\left(z+x\right)^2}+\frac{z^3}{\left(x+y\right)^2}\ge \frac{x+y+z}{4}=\frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 4.15: Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào có tổng bằng 0. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c^2-ca+a^2}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{a^2-ab+b^2}{c^2+ab}}+\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}\ge 4$$

Phân tích: Bất đẳng thức có dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b;c=0$ và các hoán vị của nó, như vậy kết hợp với giả thiết ta có thể xét hai trường hợp. Tuy nhiên để ý biểu thức trong căn ta nhận thấy $a^2+bc+b^2-bc+c^2=a^2+b^2+c^2$ và để ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá $2\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(b^2-bc+c^2\right)}\le a^2+b^2+c^2$. Khi đó ta được

$$\sqrt{\frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}}=\frac{b^2-bc+c^2}{\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(b^2-bc+c^2\right)}}\ge\frac{2\left(b^2-bc+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

Đến đây áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c^2-ca+a^2}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{a^2-ab+b^2}{c^2+ab}}$$
$$\ge\frac{2\left(b^2-bc+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2\left(c^2-ca+a^2\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2\left(a^2-ab+b^2\right)}{a^2+b^2+c^2}=4-\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

Đây chính là bất đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(b^2-bc+c^2\right)}\le a^2+b^2+c^2$$

Khi đó ta suy ra $\sqrt{\frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}}=\frac{b^2-bc+c^2}{\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(b^2-bc+c^2\right)}}\ge\frac{2\left(b^2-bc+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2}$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c^2-ca+a^2}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{a^2-ab+b^2}{c^2+ab}}$$
$$\ge\frac{2\left(b^2-bc+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2\left(c^2-ca+a^2\right)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2\left(a^2-ab+b^2\right)}{a^2+b^2+c^2}=4-\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay $\sqrt{\frac{b^2-bc+c^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c^2-ca+a^2}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{a^2-ab+b^2}{c^2+ab}}+\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{a^2+b^2+c^2}\ge 4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b; c=0$ và các hoán vị.

Ví dụ 4.16: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý . Chứng minh rằng :

$$2\sqrt{3}\left[\frac{1}{\sqrt{a\left(a+2b\right)}}+\frac{1}{\sqrt{b\left(b+2c\right)}}+\frac{1}{\sqrt{c\left(c+2a\right)}}\right]\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{2a+b}+\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+a}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức và chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có đánh giá

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a\left(a+2b\right)}}=2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{3}{a+2b}}\le\frac{1}{a}+\frac{3}{a+2b}$$

Khi đó tương tự ta được bất đẳng thức

$$2\sqrt{3}\left[\frac{1}{\sqrt{a\left(a+2b\right)}}+\frac{1}{\sqrt{b\left(b+2c\right)}}+\frac{1}{\sqrt{c\left(c+2a\right)}}\right]\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}$$ Như

vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}\le\frac{3}{2a+b}+\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+a}$$

Rõ ràng bất đẳng thức trên không thể chứng minh được, điều này cho thấy cách đánh giá như trên không đem lại hiệu quả và ta cần phải tìm cách khác.

Để ý là trong phép đánh giá trên ta triệt tiêu được đại lượng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ nhưng không đem lại hiệu quả. Vậy ta thử đánh giá làm triệt tiêu $\frac{3}{a+2b}+\frac{3}{b+2c}+\frac{3}{c+2a}$ thì sẽ có kết quả như thế nào? Để làm được như vậy ta cần làm xuất hiện các $2a+b;\ 2b+c;\ 2c+a$ trong các căn và sự xuất hiện đó chỉ có thể được giải quyết bằng kĩ thuật thêm - bớt. Khi đó chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a\left(a+2b\right)}}=2\sqrt{\frac{3}{2a+b}\cdot\frac{2a+b}{a\left(a+2b\right)}}\le\frac{3}{2a+b}+\frac{2a+b}{a\left(a+2b\right)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$2\sqrt{3}\left[\frac{1}{\sqrt{a\left(a+2b\right)}}+\frac{1}{\sqrt{b\left(b+2c\right)}}+\frac{1}{\sqrt{c\left(c+2a\right)}}\right]$$
$$\le\frac{2a+b}{a\left(a+2b\right)}+\frac{2b+c}{b\left(b+2c\right)}+\frac{2c+a}{c\left(c+2a\right)}+\frac{3}{2a+b}+\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a+b}{a\left(a+2b\right)}+\frac{2b+c}{b\left(b+2c\right)}+\frac{2c+a}{c\left(c+2a\right)}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến cách ghép đối xứng. Nhưng ghép như thế nào đây và nếu không chứng minh được bất đẳng thức trên thì chuỗi đánh giá trên hoàn toàn vô tác dụng. Sau một thời gian mày mò cuối cùng cũng phát hiện ra

$$\frac{2a+b}{a\left(a+2b\right)}\le\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$$

Đánh giá này tương đương với $\left(a+2b\right)^2\ge 3b\left(2a+b\right)$ là một đánh giá đúng.

Thực hiện hoàn toàn tương tự ta được điều cần phải chứng minh.

Ví dụ 4.17: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$2\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 9$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Khi đó dễ thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab+bc+ca+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=ab+\frac{1}{ab}+bc+\frac{1}{bc}+ca+\frac{1}{ca}\ge 3$$

Như vậy ta cần chứng minh $ab+bc+ca\ge 3$ nữa là xong. Tuy nhiên với $a+b+c=3$ thì bất đẳng thức $ab+bc+ca\ge 3$ lại không đúng. Như vậy cách đánh giá như trên không hiệu quả. Ta cần tìm cách khác.

Trong bất đẳng thức có đại lượng $2\left(ab+bc+ca\right)$ và giả thiết thì có $a+b+c=3$, giữa chúng có mối liên hệ là

$$a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)=\left(a+b+c\right)^2$$

Điều này gợi ý cho ta thêm vào hai vế của bất đẳng thức đại lượng $a^2+b^2+c^2$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(a+b+c\right)^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 9+a^2+b^2+c^2$$

Hay
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge a^2+b^2+c^2$$

Kết hợp với giả thiết $a+b+c=3$ thì bất đẳng thức trên được viết là

$$\frac{3}{abc}\ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 3\ge abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì $abc\left(a+b+c\right)\le \frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)^2$

Do đó ta được

$$abc\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{3}abc\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\le \frac{\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(ab+bc+ca\right)\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$\le \left[\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\right]^3=\frac{\left(a+b+c\right)^6}{27}=27$$

Suy ra ta được $abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 4.18: Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-d}{b+d}+\frac{d-b}{c+b}+\frac{b-c}{a+c}+\frac{c-a}{a+d}\ge 0$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=d$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy chưa thể xác định được các phân số đã không âm hay chưa và vế phải lúc này là 0 nên việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy là không thể được. Bây giờ ta cần thay đổi các tử số để đảm bảo các phân số không âm và vế phải cũng là một hằng số dương. Yêu cầu này gợi ý cho ta sử dụng kĩ thuật thêm - bớt

Để ý ta thấy $\frac{a-d}{b+d}+1=\frac{a+b}{b+d}$, hoàn toàn tương tự ta được

$$\left(\frac{a-d}{b+d}+1\right)+\left(\frac{d-b}{c+b}+1\right)+\left(\frac{b-c}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c-a}{d+a}+1\right)\ge 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{d+b}+\frac{d+c}{c+b}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+d}{d+a}\ge 4$$

Lại thấy các phân số không cùng mẫu nhưng có các cặp cùng tử, do đó ta viết được bất đẳng thức trên thành

$$\left(a+b\right)\left(\frac{1}{d+b}+\frac{1}{c+a}\right)+\left(c+d\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+d}\right)\ge 4$$

Bất đẳng thức trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{4}{x+y}$

$$\left(a+b\right)\left(\frac{1}{d+b}+\frac{1}{c+a}\right)\ge \frac{4\left(a+b\right)}{a+b+c+d}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $(c+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+d}\right)\geq\frac{4(c+d)}{a+b+c+d}$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.19: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b}{2}+\frac{b+c}{4}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)}.\frac{b}{2}.\frac{b+c}{4}}=\frac{3}{2}a$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b}{2}+\frac{b+c}{4}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)}.\frac{b}{2}.\frac{b+c}{4}}=\frac{3}{2}a$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c}{2}+\frac{c+a}{4}\geq\frac{3}{2}b;\ \frac{c^3}{a(a+b)}+\frac{a}{2}+\frac{a+b}{4}\geq\frac{3}{2}c$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}+a+b+c\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 4.20: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}\geq\frac{2}{9}(a+b+c)$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b+2c}{27}+\frac{b+2c}{27}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2}.\frac{b+2c}{27}.\frac{b+2c}{27}}=\frac{a}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b+2c}{27}+\frac{b+2c}{27}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2}.\frac{b+2c}{27}.\frac{b+2c}{27}}=\frac{a}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c+2a}{27}+\frac{c+2a}{27}\geq\frac{b}{3};\ \frac{c^3}{(a+2b)^2}+\frac{a+2b}{27}+\frac{a+2b}{27}\geq\frac{c}{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}+\frac{a+b+c}{9}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{9}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 4.21: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $a^3+b^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge 3\sqrt[3]{a^3.b^3.\frac{1}{3\sqrt{3}}}=ab\sqrt{3}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3+b^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge ab\sqrt{3};\ b^3+c^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge bc\sqrt{3};\ c^3+a^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge ca\sqrt{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ge\sqrt{3}(ab+bc+ca)=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=b=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ c=a=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ ab+bc+ca=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ví dụ 4.22: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $4(a+b+c)=3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{8}$$

Phân tích: Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{4}$. Chú ý đến đánh giá

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}.\frac{1}{b^3}.\frac{1}{8}}=\frac{3}{2}.\frac{1}{ab}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $4(a+b+c)=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}.\frac{1}{b^3}.\frac{1}{8}}=\frac{3}{2}.\frac{1}{ab}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{bc};\ \frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ca}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+\frac{3}{8}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{9}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2$$

5. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

Trong quá trình tìm lời giải cho một bài toán bất đẳng thức, một sai lầm thường gặp đó là sau một loạt các đánh giá ta thu được một bất đẳng thức ngược chiều. Điều này làm không ít người cảm thấy nản lòng. Lúc này nếu ta bình tĩnh suy nghĩ một chút thì thấy với đánh giá ngược chiều bằng cách nào đó ta thêm vào trước một dấu âm thì lập tức đánh giá đó sẽ cùng chiều. Sử dụng ý tưởng tương tự như kỹ thuật thêm bớt, thậm chí có phần khéo léo hơn, kỹ thuật Cauchy ngược dấu đã chứng tỏ sự đột phá đơn giản nhưng đem lại hiệu quả bất ngờ đến ngạc nhiên khi giải quyết lớp bất đẳng thức hoán vị chặt và khó. Chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với một số ví dụ sau

Ví dụ 5.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức không ít bạn sẽ đánh giá $a^2+1\ge 2a$, áp dụng tương tự khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\le\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$$

Tuy nhiên bất đẳng thức thu được lại bị ngược chiều. Đến đây chúng ta sẽ bị lúng túng trong cách giải. Ta vẫn phải đánh giá mẫu nhưng nếu có thể thêm được dấu âm trước đánh giá đó thì tốt biết mấy. Điều ta mong muốn sẽ được giải quyết bằng phép biến đổi sau đây

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$$

Đến đây thì ta có thể đánh giá mẫu mà không sợ bị ngược chiều nữa

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cacuchy ta được

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{1}{b^2+1}\ge 1-\frac{b}{2};\ \frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge 3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$$

Phân tích: Nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp ta thu được

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{2\sqrt{ca}}\ge\frac{3}{2}$$

Do đó ta sẽ áp dụng bất đẳng Cauchy theo ý tưởng như trên

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+ab}=1-\frac{ab}{1+ab}\ge1-\frac{ab}{2\sqrt{ab}}=1-\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{1+bc}\ge1-\frac{\sqrt{bc}}{2};\ \frac{1}{1+ca}\ge1-\frac{\sqrt{ca}}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$$

Để ý là $\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\right)=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$

Do đó ta được $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=1$

Nhận xét: *Kỹ thuật Cauchy ngược dấu có thể hiểu là ta lấy nghịch đảo hai vế của một đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy sau đó nhân hai vế với -1. Khi đó bất đẳng thức ban đầu sẽ không bị đổi chiều. Dưới đây là một số ví dụ tương tự.*

Ví dụ 5.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2+1}\ge b-\frac{bc}{2};\ \frac{c}{a^2+1}\ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{d}{d^2+1}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác theo một đánh giá quen thuộc $ab+bc+ca\le\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2=3$

Do đó ta được $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Ví dụ 5.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b^3}{b^2+c^2}\ge b-\frac{c}{2};\ \frac{c^3}{c^2+a^2}\ge c-\frac{a}{2}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge a+b+c-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+c}{2}$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 5.5: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\ge a+1-\frac{(a+1)b^2}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}$$

Tương tự ta có: $\frac{b+1}{c^2+1}\ge b+1-\frac{bc+c}{2};\ \frac{c+1}{a^2+1}\ge c+1-\frac{ca+a}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge a+b+c+3-\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2}$$
$$=\frac{a+b+c}{2}+3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta có $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$

Do vậy ta được $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{b^2c+1}=a-\frac{ab^2c}{b^2c+1}\ge a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}=a-\frac{b\sqrt{a(ac)}}{2}\ge a-\frac{b(a+ac)}{4}$$

Suy ra ta có $\frac{a}{b^2c+1}\ge a-\frac{1}{4}(ab+abc)$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b}{c^2a+1}\ge b-\frac{1}{4}(bc+abc);\ \frac{c}{a^2b+1}\ge c-\frac{1}{4}(ca+abc)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge 3-\frac{ab+bc+ca}{4}-\frac{3abc}{4}$$

Mặt khác ta có theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$3=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\ge ab+bc+ca\Leftrightarrow\frac{3}{4}\ge\frac{ab+bc+ca}{4}$$

Và $$3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow\frac{3}{4}\ge\frac{3abc}{4}$$

Do đó ta được

$$\frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ge 3 \text{ hay } \frac{a}{b^2c+1}+\frac{b}{c^2a+1}+\frac{c}{a^2b+1}\ge\frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ac=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{2b^3+1}=a-\frac{2ab^3}{b^3+b^3+1}\ge a-\frac{ab^3}{3b^2}=a-\frac{2ab}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{2c^3+1}\ge b-\frac{2bc}{3};\ \frac{c}{2a^3+1}\ge c-\frac{2ca}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge a+b+c-\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{3}=a+b+c-2$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\ge ab+bc+ca\Rightarrow a+b+c\ge\sqrt{3\left(ab+bc+ca\right)}=3$$

Do đó ta được $$\frac{a}{2b^3+1}+\frac{b}{2c^3+1}+\frac{c}{2a^3+1}\ge 1$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+b^2+b^2}\ge a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(ab\right)^2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^2}{b+2c^2}\ge b-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(bc\right)^2};\ \frac{c^2}{c+2a^2}\ge c-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(ca\right)^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge a+b+c-\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{\left(ab\right)^2}+\sqrt[3]{\left(bc\right)^2}+\sqrt[3]{\left(ca\right)^2}\right]$$

$$=3-\frac{2}{3}\left[\sqrt[3]{\left(ab\right)^2}+\sqrt[3]{\left(bc\right)^2}+\sqrt[3]{\left(ca\right)^2}\right]$$

Mặt khác ta có $\sqrt[3]{(ab)^2} = \sqrt[3]{a.ab.b} \le \dfrac{a+ab+b}{3}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\sqrt[3]{(bc)^2} \le \dfrac{b+bc+c}{3}$; $\sqrt[3]{(ca)^2} \le \dfrac{c+ca+a}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2} \le \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

$$\le \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}.\frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{2}{3}.3 + \frac{1}{3}.\frac{3^2}{3} = 3$$

Suy ra ta có $\dfrac{2}{3}\left[\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2}\right] \le \dfrac{2}{3}.3 = 2$

Do đó ta được $\dfrac{a^2}{a+2b^2} + \dfrac{b^2}{b+2c^2} + \dfrac{c^2}{c+2a^2} \ge 1$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a+b^3+b^3} \ge a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2}$$

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{b+2c^3} \ge b - \dfrac{2}{3}c\sqrt[3]{b^2}$; $\dfrac{c^2}{c+2a^3} \ge c - \dfrac{2}{3}a\sqrt[3]{c^2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \ge a+b+c - \frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2}\right)$$

$$\ge 3 - \frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2}\right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$b\sqrt[3]{a^2} = b\sqrt[3]{a.a.1} \le b\left(\frac{a+a+1}{3}\right) = b\left(\frac{2a+1}{3}\right) = \frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2} \le \dfrac{2bc+c}{3}$; $a\sqrt[3]{c^2} \le \dfrac{2ca+a}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \le \frac{a+b+c}{3} + \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \le \frac{a+b+c}{3} + \frac{2(a+b+c)^2}{3.3} = 3$$

Do đó ta có $\dfrac{a^2}{a+2b^3} + \dfrac{b^2}{b+2c^3} + \dfrac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 5.10: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=a-\frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab+b^2}\ge a-\frac{ab\left(a+b\right)}{3ab}=a-\frac{a+b}{3}=\frac{2a-b}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{2b-c}{3};\ \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{2c-a}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 5.11: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$.

Chứng minh rằng: $$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\ge 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2\right)-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\ \frac{c}{1+d^2}\ge c-\frac{cd}{2};\ \frac{d}{1+a^2}\ge c-\frac{da}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\ge 4-\frac{ab+bc+cd+da}{2}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{ab+bc+cd+da}{2}=\frac{\left(a+c\right)\left(b+d\right)}{2}\le\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{8}=2$$

Do vậy ta được $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\ge 2$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Ví dụ 5.12: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^2+1}=\frac{\left(a^2+1\right)-a^2}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2+1}\ge 1-\frac{b}{2};\ \frac{1}{c^2+1}\ge 1-\frac{c}{2};\ \frac{1}{d^2+1}\ge 1-\frac{d}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Ví dụ 5.13: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{1+b^2c}=\frac{a\left(1+b^2c\right)-ab^2c}{1+b^2c}=a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\ge a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{1+c^2d}\ge b-\frac{bc\sqrt{d}}{2};\ \frac{c}{1+d^2a}\ge c-\frac{cd\sqrt{a}}{2};\ \frac{d}{1+a^2b}\ge d-\frac{da\sqrt{b}}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 4-\left(\frac{ab\sqrt{c}}{2}+\frac{bc\sqrt{d}}{2}+\frac{cd\sqrt{a}}{2}+\frac{da\sqrt{b}}{2}\right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b\sqrt{a.ac}}{2}\le\frac{b\left(a+ac\right)}{4}$

Tương tự ta được

$$\frac{b\sqrt{a.ac}+c\sqrt{b.bd}+d\sqrt{c.ca}+a\sqrt{d.db}}{2}\le\frac{ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab}{4}$$

Mà ta có $\frac{ab+bc+cd+da}{4}=\frac{\left(a+c\right)\left(b+d\right)}{4}\le\frac{\left(a+c+b+d\right)^2}{16}=1$ và

$$\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}=\frac{bc\left(a+d\right)+da\left(b+c\right)}{4}$$

$$\le\frac{\left(a+d\right)\left(b+c\right)^2+\left(b+c\right)\left(a+d\right)^2}{16}\le\frac{\left(a+b+c+d\right)^3}{4.16}=1$$

Do đó ta được $\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 2$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

6. Kỹ thuật đổi biến số

Trong bất đẳng thức, có một quy luật chung, đó là "Trong một dạng cụ thể, thì những bất đẳng thức càng nhiều biến càng khó". Điều này cũng đồng nghĩa với việc khẳng định "Bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nếu ta đưa được một bất đẳng thức nhiều biến về dạng ít biến hơn" Kỹ thuật đổi biến chính là một công cụ hữu ích để thực hiện ý tưởng này.

Ví dụ 6.1: Cho a, b là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge 3$$

Phân tích: Nhìn vào bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy hai hạng tử sau ở vế trái có vẻ như tạo ra được nghịch đảo của hạng tử thứ nhất. Vì vậy ta thử phân tích tổng hai hạng tử đó để xem kết quả có như dự đoán hay không.

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2}{a^2b^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2}-2$$

Với kết quả như vậy ta có thể sử dụng cách đặt ẩn phụ để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức đơn giản hơn.

Lời giải

Để ý rằng bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2}\ge 5$$

Đặt $t=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2}$ ta có $t\ge 4$. Từ đó suy ra $\frac{4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{4}{t}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$t+\frac{t}{4}\ge 5\Leftrightarrow \frac{t^2-5t+4}{t}\ge 0\Leftrightarrow \frac{\left(t-1\right)\left(t-4\right)}{t}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $t\ge 4$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\pm b$

Ví dụ 6.2: Cho các số thực $a,b,c>2$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng :

$$\left(a-2\right)\left(b-2\right)\left(c-2\right)\le 1$$

Phân tích: Để triệt tiêu các dấu trừ trong bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đổi biến $x=a-2;\ y=b-2;\ z=c-2$, khi đó giả thiết trở thành $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1$ và ta cần chứng minh $xyz\le 1$. Đây là một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng cách ghép cặp đối xứng. Tuy nhiên trong lời giải dưới đây ta chứng minh bài toán bằng kỹ thuật đổi biến.

Lời giải

Đặt $x=a-2;\ y=b-2;\ z=c-2$ với x, y, z là các số thực dương. Bài toán quy về chứng minh $xyz\le 1$ với $x,\ y,\ z>0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1\Leftrightarrow \frac{x}{x+2}+\frac{y}{y+2}+\frac{z}{z+2}=1$$

Đến đây ta đặt tiếp $m=\frac{x}{x+2};\ n=\frac{y}{y+2};\ p=\frac{z}{z+2}\Leftrightarrow m+n+p=1$

Khi đó ta có $\frac{1}{m}=\frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x}\Rightarrow \frac{2}{x}=\frac{1}{m}-1=\frac{n+p}{m}\Rightarrow x=\frac{2m}{n+p}$

Tương tự ta được $y=\frac{2n}{p+m};\ z=\frac{2p}{m+n}$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2m}{n+p}\cdot\frac{2n}{p+m}\cdot\frac{2p}{m+n}\le 1\Leftrightarrow \left(m+n\right)\left(n+p\right)\left(p+m\right)\ge 8mnp$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\left(m+n\right)\left(n+p\right)\left(p+m\right)\ge 2\sqrt{mn}.2\sqrt{np}.2\sqrt{pm}=8mnp$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$m=n=p\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=3$$

Ví dụ 6.3: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\ge 1$$

Phân tích: Giả thiết $abc = 1$ gợi ý cho ta cách đổi biến $a = \frac{x}{y};\ b = \frac{y}{z};\ c = \frac{z}{x}$ với $x,\ y,\ z$ là các số thực dương.

Lời giải

Đặt $a = \frac{x}{y};\ b = \frac{y}{z};\ c = \frac{z}{x}$ với x, y, z là các số thực dương. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{2\frac{x}{y}+1}+\frac{1}{2\frac{y}{z}+1}+\frac{1}{2\frac{z}{x}+1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{y}{2x+y}=\frac{y\left(2z+y\right)}{\left(2x+y\right)\left(2z+y\right)}\ge \frac{y\left(2z+y\right)}{\frac{\left[\left(2x+y\right)+\left(2z+y\right)\right]^2}{4}}=\frac{y\left(2z+y\right)}{\left(x+y+z\right)^2}$$

Tương tự ta có $\frac{z}{2x+y}\ge \frac{z\left(2x+z\right)}{\left(x+y+z\right)^2};\ \frac{x}{2z+x}\ge \frac{x\left(2y+x\right)}{\left(x+y+z\right)^2}$

Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\ge \frac{y\left(2z+y\right)+z\left(2x+z\right)+x\left(2y+x\right)}{\left(x+y+z\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(xy+yz+zx\right)+x^2+y^2+z^2}{\left(x+y+z\right)^2}=1$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 6.4: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1$$

Phân tích: Ta nhận thấy sự tương tự của bất đẳng thức trên với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1$$

Do đó ý tưởng đầu tiên đó ta đặt $x^3 = a;\ y^3 = b;\ z^3 = c$, khi này ta vẫn được $xyz = 1$ và khi đó ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}\le 1$$

Ngoài ra từ giả thiết $abc = 1$, ta có thể sử dụng các phép đổi như sau

$$a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x},\ a=\frac{x^2}{yz};\ b=\frac{y^2}{zx};\ c=\frac{z^2}{xy};\ a=\frac{yz}{x^2};\ b=\frac{zx}{y^2};\ c=\frac{xy}{z^2}$$

Lời giải

Đặt $x^3 = a;\ y^3 = b;\ z^3 = c$, khi đó ta được $xyz = 1$.

Bất đẳng thức càn chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)\ge xy(x+y)$$

Khi đó ta được $$\frac{1}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{xy(x+y)+xyz}=\frac{z}{x+y+z}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}\le\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 6.5: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy vế phải chứa căn bậc ba. Do đó điều đầu tiên ta nghĩ đến là làm mất các căn bậc ba này và ta có hai ý tưởng đổi biến để làm mất căn bậc ba là

- Đặt $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3(y^3+1)}+\frac{1}{y^3(z^3+1)}+\frac{1}{z^3(x^3+1)}\ge\frac{3}{xyz(xyz+1)}$$

- Đặt $abc=k^3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{k(1+k)}$$

Ta thử chứng minh bài toán với các cách đổi biến trên như sau

Lời giải

Đặt $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3(y^3+1)}+\frac{1}{y^3(z^3+1)}+\frac{1}{z^3(x^3+1)}\ge\frac{3}{xyz(xyz+1)}$$

Ta có

$$M=3+(1+x^3y^3z^3)\left(\frac{1}{x^3(y^3+1)}+\frac{1}{y^3(z^3+1)}+\frac{1}{z^3(x^3+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{x^3(y^3+1)}+\frac{1}{y^3(z^3+1)}+\frac{1}{z^3(x^3+1)}+\frac{x^3y^3}{x^3+1}+\frac{y^3z^3}{y^3+1}+\frac{z^3x^3}{z^3+1}+3$$

$$=\frac{1+x^3}{x^3(y^3+1)}+\frac{1+y^3}{y^3(z^3+1)}+\frac{1+z^3}{z^3(x^3+1)}+\frac{y^3(x^3+1)}{(1+y^3)}+\frac{z^3(y^3+1)}{(1+z^3)}+\frac{x^3(z^3+1)}{(1+z^3)}$$

Theo bất đẳng thức Caucy ta được

$$\frac{1+x^3}{x^3(y^3+1)}+\frac{1+y^3}{y^3(z^3+1)}+\frac{1+z^3}{z^3(x^3+1)}\ge\frac{3}{xyz}$$

$$\frac{y^3(x^3+1)}{(1+y^3)}+\frac{z^3(y^3+1)}{(1+z^3)}+\frac{x^3(z^3+1)}{(1+z^3)}\ge 3xyz$$

Từ đó suy ra $M \geq 3xyz + \frac{3}{xyz} \Rightarrow \left(1 + x^3y^3z^3\right)P \geq 3xyz + \frac{3}{xyz} - 3$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{3}{xyz\left(xyz+1\right)} \cdot \left(x^3y^3z^3 + 1\right) = \frac{3\left(x^2y^2z^2 - xyz + 1\right)}{xyz} = 3xyz - 3 + \frac{3}{xyz}$$

Do đó ta được

$$\left(1 + x^3y^3z^3\right)P \geq \left(1 + x^3y^3z^3\right)\frac{3}{xyz\left(xyz+1\right)} \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{xyz\left(xyz+1\right)}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Nhận xét: *Ta cũng có thể chứng minh bài toán trên theo cách sau*

Với cách đặt $abc = k^3$*, khi đó tồn tại các số thực dương* x, y, z *sao cho*

$$a = \frac{ky}{x}; b = \frac{kz}{y}; c = \frac{kx}{z}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{ky}{x}\left(\frac{kz}{y}+1\right)} + \frac{1}{\frac{kz}{y}\left(\frac{kx}{z}+1\right)} + \frac{1}{\frac{kx}{z}\left(\frac{ky}{x}+1\right)} \geq \frac{3}{k\left(k+1\right)}$$

Hay
$$\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{3}{k+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} = \frac{x^2}{x\left(y+kz\right)} + \frac{y^2}{y\left(z+kx\right)} + \frac{z^2}{z\left(x+ky\right)}$$
$$\geq \frac{\left(x+y+z\right)^2}{x\left(y+kz\right) + y\left(z+kx\right) + z\left(x+ky\right)}$$
$$= \frac{\left(x+y+z\right)^2}{\left(k+1\right)\left(xy+yz+zx\right)} \geq \frac{3}{k+1}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2+1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$, điều này gợi ý cho ta các đặt biến phụ $x = \frac{1}{a};\ y = \frac{1}{b};\ z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{3}{2}$. Chú ý đến $xy + yz + zx = 1$ ta viết được $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}$ khi đó ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{x}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\ge\frac{3}{2}$$

Đến đây ta sử dụng đánh giá Cauchy để giải quyết bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết $a+b+c=abc$ suy ra $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$.

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$, Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy+yz+zx=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+1}}\ge\frac{3}{2}$.

Dễ thấy $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+xy+yz+zx}=\sqrt{(x+y)(x+z)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2+1}=\sqrt{(y+z)(y+x)};\ \sqrt{z^2+1}=\sqrt{(z+x)(z+y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+1}}&=\frac{x}{\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{y}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}+\frac{z}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}\\&\ge\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}\ge\frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+2y+z}+\frac{2y}{x+y+2z}+\frac{2z}{2x+y+z}&=\frac{2x^2}{x(x+2y+z)}+\frac{2y^2}{y(x+y+2z)}+\frac{2z^2}{z(2x+y+z)}\\&\ge\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+\frac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\sqrt{3}$.

Ví dụ 6.7: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\ge\frac{15}{8}$$

Phân tích: Để đơn giản hóa các đại lượng vế trái ta có thể đặt

$$\begin{cases}x=2a+3b+3c\\y=3a+2b+3c\\z=3a+3b+2c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3y+3z-5x}{8}\\b=\dfrac{3z+3x-5y}{8}\\c=\dfrac{3x+3y-5z}{8}\end{cases}$$

Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{7}{8}\left(\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\right)-\frac{27}{8}\ge\frac{15}{8}$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá tiếp.

Lời giải

Đặt $x = 2a + 3b + 3c;\ \ y = 3a + 2b + 3c;\ z = 3a + 3b + 2c$, khi đó ta được

$$a = \frac{3y + 3z - 5x}{8};\ b = \frac{3z + 3x - 5y}{8};\ c = \frac{3x + 3y - 5z}{8}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{7}{8}\left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}\right) - \frac{27}{8} \ge \frac{15}{8}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \ge 6$$

Do đó ta được $$\frac{7}{8}\left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}\right) - \frac{27}{8} \ge \frac{7.6}{8} - \frac{27}{8} = \frac{15}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.8: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{a+c+16b} \ge \frac{16}{15}$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = a + b + c \\ y = b + c + 4a \\ z = c + a + 16b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = y - x \\ 15b = z - x \\ 15c = 21x - 5y - z \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{-6x + 5y + z}{15x} + \frac{20x - 5y}{15y} + \frac{16x - z}{15z} \ge \frac{16}{15}$$

Hay $$\frac{y}{3x} + \frac{3x}{4y} + \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \ge \frac{16}{15} + \frac{4}{5} = \frac{28}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \ge \frac{4}{3};\ \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \ge \frac{8}{15}$$

Do đó ta được $\dfrac{a+b}{a+b+c} + \dfrac{b+c}{b+c+4a} + \dfrac{c+a}{a+c+16b} \ge \dfrac{16}{15}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{y}{3x} = \dfrac{4x}{3y} \\ \dfrac{z}{15x} = \dfrac{16x}{15z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5c}{7} \\ b = \dfrac{3c}{7} \end{cases}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 6.9: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta chưa thấy có dấu hiệu đặt biến phụ, do đó ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trước. Ở đây ta chọn biến đổi vế trái trước

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = 3 + \frac{a^3 + b^3}{c^3} + \frac{b^3 + c^3}{a^3} + \frac{c^3 + a^3}{b^3}$$

Quan sát biểu thức sau khi biến đổi ta thấy cần phải đánh giá $\frac{a^3+b^3}{c^3}$ về $\left(\frac{a+b}{c}\right)^3$, điều này có nghĩa là ta cần chứng minh được $a^3+b^3 \ge k\left(a+b\right)^3$, chú ý đến dấu đẳng thức xẩy ra ta tìm được $k=\frac{1}{4}$. Như vậy ta đi chứng minh $a^3+b^3 \ge \frac{1}{4}\left(a+b\right)^3$, đây là một đánh giá đúng và có thể chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Đến đây ta có thể đặt $x=\frac{a+b}{c};\ y=\frac{b+c}{a};\ z=\frac{c+a}{b}$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $3+\frac{x^3+y^3+z^3}{4} \ge \frac{3\left(x+y+z\right)}{2}$. Chú ý lúc này đẳng thức xẩy ra tại $x=y=z=2$ và ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh bài toán trên.

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại là

$$3+\frac{a^3+b^3}{c^3}+\frac{b^3+c^3}{a^3}+\frac{c^3+a^3}{b^3} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}4\left(a^3+b^3\right)=a^3+b^3+3\left(a^3+b^3\right)&=a^3+b^3+3\left(a+b\right)\left(a^2+b^2-ab\right)\\&\ge a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)=\left(a+b\right)^3\end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{a^3+b^3}{c^3} \ge \frac{\left(a+b\right)^3}{4c^3}$$

Áp dụng tương tự ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3}{c^3}+\frac{b^3+c^3}{a^3}+\frac{c^3+a^3}{b^3} \ge \frac{\left(a+b\right)^3}{4c^3}+\frac{\left(b+c\right)^3}{4a^3}+\frac{\left(c+a\right)^3}{4b^3}$$

Ta cần chứng minh

$$3+\frac{\left(a+b\right)^3}{4c^3}+\frac{\left(b+c\right)^3}{4a^3}+\frac{\left(c+a\right)^3}{4b^3} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

Đặt $x=\frac{a+b}{c};\ y=\frac{b+c}{a};\ z=\frac{c+a}{b}$, bất đẳng thức trở thành

$$3+\frac{x^3+y^3+z^3}{4} \ge \frac{3\left(x+y+z\right)}{2}$$

Hay
$$12+x^3+y^3+z^3 \ge 6\left(x+y+z\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3+8+8 \ge 12x;\ y^3+8+8 \ge 12y;\ z^3+8+8 \ge 12z$$

Suy ra

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3+48 \ge 12\left(x+y+z\right)&=6\left(x+y+z\right)+6\left(x+y+z\right)\\&\ge 6\left(x+y+z\right)+36\end{aligned}$$

Hay
$$12+x^3+y^3+z^3 \ge 6\left(x+y+z\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 6.10: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

Phân tích: Cũng tương tự như ví dụ trên ta cần biến đổi bất đẳng thức trước khi đưa ra cách đổi biến. Trong ví dụ này ta chọn các biến đổi vế phải

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}$$

Lúc này để ý ta thấy cả hai vế xuất hiện các đại lượng $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}$, lại để ý ta nhận thấy rằng $\frac{a}{c}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}; \frac{b}{a}=\frac{b}{c}.\frac{c}{a}; \frac{c}{b}=\frac{c}{a}.\frac{a}{b}$. Do đó ta có thể đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$, khi đó ta được $xyz=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(x+y+z)^2=\frac{3(xy+yz+zx+x+y+z)}{2}$$

Đến đây ta có lời giải sau

Lời giải

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$ suy ra $xyz=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(x+y+z)^2=\frac{3(xy+yz+zx+x+y+z)}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$

Nên $$(x+y+z)^2 \geq 3(x+y+z)$$

Ta cũng có $$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

Do đó ta được $$2(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)+3(x+y+z)$$

Hay $$(x+y+z)^2=\frac{3(xy+yz+zx+x+y+z)}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 6.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $c=8ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a+2b+3}+\frac{c}{4bc+3c+2}+\frac{c}{2ac+3c+4} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy sự khác biệt của giả thiết cũng như bất đẳng thức cần chứng minh so với các ví dụ ở trên. Từ bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vai trò của a, b như nhau. Do đó ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b$. Mặt khác ta thấy tử của biểu thức thứ hai và thứ ba có biến c, do đó nếu ta viết lại hai biểu thức đó như biểu thức thứ nhất thì dưới mẫu xuất hiện đại lượng $\frac{1}{c}$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đẳng thức xảy ra tại $a=b=\frac{1}{c}$, khi này ta viết lại giả thiết là $8ab\frac{1}{c}=1$. Đến đây ta thấy được cách đặt là $x=2a;\ y=2b;\ z=\frac{2}{c}$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{1}{2x+y+3}+\frac{1}{2y+z+3}+\frac{1}{2z+x+3}\le\frac{1}{2}$$

Tuy nhiên từ hình thức của bất đẳng thức ta thấy tương tự bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}\le\frac{1}{2}$$

Do đó ta cho cách đặt $x^2=2a;\ \ y^2=2b;\ z^2=\frac{2}{c}$ để đưa bài toán về dạng quen thuộc.

Lời giải

Đặt $x^2=2a;\ \ y^2=2b;\ z^2=\frac{2}{c}$. Khi đó từ giả thiết ta được $xyz=1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$P=\frac{1}{2x^2+y^2+3}+\frac{1}{2y^2+z^2+3}+\frac{1}{2z^2+x^2+3}\le\frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2x^2+y^2+3=x^2+y^2+x^2+1+2\ge 2\left(xy+x+1\right)$$

Do đó ta được

$$P\le\frac{1}{2\left(xy+x+1\right)}+\frac{1}{2\left(yz+y+1\right)}+\frac{1}{2\left(zx+z+1\right)}$$

Ta chứng minh $\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1$ theo các cách sau

Cách 1: Do $xyz=1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $x=\frac{m}{n};\ y=\frac{n}{p};\ z=\frac{p}{m}$

Khi đó ta có

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=\frac{1}{\frac{m}{p}+\frac{m}{n}+1}+\frac{1}{\frac{n}{m}+\frac{n}{p}+1}+\frac{1}{\frac{p}{n}+\frac{m}{m}+1}$$

$$=\frac{np}{mn+np+pm}+\frac{pm}{mn+np+pm}+\frac{mn}{mn+np+pm}=1$$

Cách 2: Do $xyz=1$, nên ta được

$$\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=\frac{xyz}{xy+x+xyz}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{y}{xyz+yz+y}$$

$$=\frac{yz}{yz+y+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{y}{yz+y+1}=1$$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=\frac{1}{2};\ c=2$.

Ví dụ 6.13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=2abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\left(2a-1\right)^2}+\frac{1}{b\left(2b-1\right)^2}+\frac{1}{c\left(2c-1\right)^2}\ge\frac{1}{2}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xẩy ra tại $a = b = c = \frac{3}{2}$. Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$, khi đó để đơn giản hóa giả thiết ta có thể đổi biến $x = \frac{1}{a};\ y = \frac{1}{b};\ z = \frac{1}{c}$, khi này giả thiết mới là $x + y + z = 2$ với $0 < x, y, z < 2$. Cũng từ cách đặt trên ta suy ra được $a = \frac{1}{x};\ b = \frac{1}{y};\ c = \frac{1}{z}$, thay vào bất đẳng thức cần chứng minh thì được

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \ge \frac{1}{2}$$

Đến đây ta có thể chứng minh bất đẳng thức bằng cách thêm bớt hoặc sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 2abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Đặt $x = \frac{1}{a};\ y = \frac{1}{b};\ z = \frac{1}{c}$, khi đó ta có $x + y + z = 2$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \ge \frac{1}{2}$

Hay $$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \ge \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{8} + \frac{y+z}{8} \ge \frac{3x}{4}$$
$$\frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z+x}{8} + \frac{z+x}{8} \ge \frac{3y}{4}$$
$$\frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{8} + \frac{x+y}{8} \ge \frac{3z}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y+z}{2} \ge \frac{3(x+y+z)}{24}$$

Hay $$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \ge \frac{x+y+z}{4} = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Nhận xét: *Ngoài cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy thì ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức*

Ví dụ 6.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$.

Chứng minh rằng: $$\frac{a^2}{ca^2+2c^2}+\frac{b^2}{ab^2+2a^2}+\frac{c^2}{bc^2+2b^2}\ge 1$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab+bc+ca=3abc$ ta được $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$.

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$. Khi đó ta được $x+y+z=3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\ge 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{x+2y^2}=\frac{x^2+2xy^2-2xy^2}{x+2y^2}=x-\frac{2xy^2}{x+y^2+y^2}\ge x-\frac{2xy^2}{2\sqrt[3]{xy^4}}=x-\frac{2\sqrt[3]{x^2y^2}}{3}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{y^2}{y+2z^2}\ge y-\frac{2\sqrt[3]{y^2z^2}}{3};\quad \frac{z^2}{z+2x^2}\ge z-\frac{2\sqrt[3]{z^2x^2}}{3}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\ge (x+y+z)-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^2z^2}+\sqrt[3]{z^2x^2}\right)$$

Mạt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\sqrt[3]{x^2y^2}\le\frac{xy+xy+1}{3}=\frac{2xy+1}{3}$$
$$\sqrt[3]{y^2z^2}\le\frac{yz+yz+1}{3}=\frac{2yz+1}{3}$$
$$\sqrt[3]{z^2x^2}\le\frac{zx+zx+1}{3}=\frac{2zx+1}{3}$$

Suy ra $$\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^2z^2}+\sqrt[3]{z^2x^2}\le\frac{2(xy+yz+zx)}{3}+1\le\frac{2(x+y+z)^2}{9}+1=3$$

Do đó ta được $$\frac{x^2}{x+2y^2}+\frac{y^2}{y+2z^2}+\frac{z^2}{z+2x^2}\ge 3-\frac{2.3}{3}=1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 6.15: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{c+3a}}\le 1$$

Phân tích: Trước hết ta đơn giản hóa giả thiết bằng cách đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$, khi này giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}}\le 1$$

Chú ý đến giả thiết $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Để ý theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2+3y^2=x^2+y^2+y^2+y^2\ge 4\sqrt[4]{x^2y^6}$, như vậy ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\le\frac{1}{2\sqrt{\sqrt[4]{x^2y^6}}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2y^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y^4}}\right)\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$$

Đến đây áp dụng tương tự ta được

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Khi đó ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}}\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^2+3y^2=x^2+y^2+y^2+y^2\ge 4\sqrt[4]{x^2y^6}$$

Áp dụng một bất đẳng thức Cauchy khác ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\le\frac{1}{2\sqrt{\sqrt[4]{x^2y^6}}}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt[4]{x^2y^2}.\sqrt[4]{y^4}}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2y^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y^4}}\right)$$
$$\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{y}+\frac{3}{z}\right);\ \frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{z}+\frac{3}{x}\right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+3y^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{9}{4}$

Nhận xét: *Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4\left(x^2+3y^2\right)=\left(1+1+1+1\right)\left(x^2+y^2+y^2+y^2\right)\ge\left(x+3y\right)^2$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\left(x^2+3y^2\right)}}\le\frac{2}{\sqrt{\left(x+3y\right)^2}}=\frac{2}{x+3y}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$$

Ví dụ 6.17: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\le 1$$

Phân tích: Để ý là $\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}=\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{ab}}+2}$, do đó ta đặt $x=\frac{a}{\sqrt{bc}};b=\frac{b}{\sqrt{ca}};z=\frac{c}{\sqrt{ab}}$.

Lời giải

Vế trái bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}=\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{ab}}+2}+\frac{1}{\frac{b}{\sqrt{ca}}+2}+\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{bc}}+2}$$

Đặt $x=\frac{a}{\sqrt{bc}};\ b=\frac{b}{\sqrt{ca}};\ z=\frac{c}{\sqrt{ab}}$, suy ra $xyz=1$.

Biểu thức P được viết lại thành $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\le 1$.

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x+2)(y+2)+(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)\le(x+2)(y+2)(z+2)$$

Triển khai và thu gọn ta được $xy+yz+xz\ge 3$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy và $xyz=1$.

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: *Ta có thể chứng minh bài toán trên theo cách khác như sau*

Biểu thức vế trái được viết lại là

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{2\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{c}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2\sqrt{ca}}\right)$$

Đặt $$M=\frac{c}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2\sqrt{ca}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2\sqrt{ab}\le a+b;\ 2\sqrt{bc}\le b+c;\ 2\sqrt{ca}\le c+a$$

Do đó ta có

$$M=\frac{c}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2\sqrt{ca}}\ge\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1$$

Suy ra $$\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\le 1$$

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 6.18: Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}-\sqrt{abc}\le 3\sqrt{3}$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt{a};\ y=\sqrt{b};\ z=\sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2=3$.

Khi này bất đẳng thức trở thành $P=x^3+y^3+z^3-xyz\le 3\sqrt{3}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó ta có

$$z^2\le xy;\ \ x^2+y^2=3-z^2\le 3$$

Do đó ta có $\quad x^3+y^3+z\left(z^2-xy\right)\le x^3+y^3$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(x^3+z^3\right)^2=\left(x+y\right)^2\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\le\left[\frac{3\left(x^2+y^2\right)^3}{3}\right]\le 27$$

Suy ra $x^3+y^3\le 3\sqrt{3}$ nên ta được $P\le 3\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$x=\sqrt{3};\ y=z=0$ và các hoán vị $\Leftrightarrow a=3;\ b=c=0$ và các hoán vị

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3;\ b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: *Qua các ví dụ trên ta nhận thấy, đổi biến có một vai trò to lớn trong chứng minh bất đẳng thức, đổi biến có thể làm một bất đẳng thức trở nên đơn giản, đổi biến có thể đưa một bất đẳng thức hoán vị về bất đẳng thức đối xứng. Chúng ta cùng tham khảo thêm một số ví dụ khác sau đây để thấy được sự độc đáo của kỹ thuật đổi biến*

Ví dụ 6.19: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a+b}}>2$$

Lời giải

Đặt $a=x^3;\ b=y^3;\ c=z^3$, do đó $x,\ y,\ z>0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}+\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}}+\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}}>2$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}>\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{x^3}{y^3+z^3}\right)^2>\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}\right)^3\Leftrightarrow\left(y^2+z^2\right)^3>\left(y^3+z^3\right)^2\Leftrightarrow 3y^2z^2\left(y^2+z^2\right)>2y^3z^3$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}}+\sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}}+\sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}}>\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}}+\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}}+\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}\ge 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}+\sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}}+\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2\left(y^2+z^2\right)}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2\left(z^2+x^2\right)}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2\left(x^2+y^2\right)}}$$

$$\ge\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2z^2}{x^2+y^2+z^2}=2$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Ví dụ 6.20: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

Lời giải

Do $abc=1$ nên ta có thể đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$ với x, y, z là các số thực dương.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\le 1$$

Hay $$xyz\ge\left(x+y-z\right)\left(y+z-x\right)\left(z+x-y\right)$$

Do x, y, z có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z>0$

Như vậy $x+y-z>0;\ x+z-y>0$. Như vậy ta xét các trường hợp

- Nếu $y+z-x<0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
- Nếu $y+z-x>0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\sqrt{\left(x-y+z\right)\left(y-z+x\right)}\le x;\ \sqrt{\left(y-z+x\right)\left(z-x+y\right)}\le y;\ \sqrt{\left(z-x+y\right)\left(x-y+z\right)}\le z$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 6.21: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc=a+b+c+2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\frac{3}{2}\sqrt{abc}$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết $abc=a+b+c+2$ ta được

$$\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(a+1\right)\left(b+1\right)+\left(b+1\right)\left(c+1\right)+\left(c+1\right)\left(a+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+a}=1$$

Đặt $x=\frac{1}{a+1};\ y=\frac{1}{b+1};\ z=\frac{1}{c+a}$ suy ra $x+y+z=1$

Từ trên suy ra $a=\frac{1-x}{x}=\frac{y+z}{x};\ b=\frac{1-y}{y}=\frac{z+x}{y};\ c=\frac{1-z}{z}=\frac{x+y}{z}$

Và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\le\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{xyz}}$$

Hay $$\sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}.\frac{z}{x+y}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}.\frac{x}{y+z}}\le\frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}.\frac{y}{z+x}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right)$$
$$\sqrt{\frac{y}{z+x}.\frac{z}{x+y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$
$$\sqrt{\frac{z}{x+y}.\frac{x}{y+z}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}\right)$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh

Ví dụ 6.22: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab+bc+ca+2abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 4\left(a+b+c\right)$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+2=\frac{1}{abc}$

Đặt $a=\frac{x}{y+z};\ b=\frac{y}{z+x};\ c=\frac{z}{x+y}$, với $x,y,z>0;\ x+y+z=1$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\ge\frac{4x}{y+z};\ \frac{y}{x}+\frac{y}{z}\ge\frac{4y}{z+x};\ \frac{z}{x}+\frac{z}{y}\ge\frac{4z}{x+y}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Ví dụ 6.23: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}}>2$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a+b+c+d=1$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}+\sqrt{\frac{d}{1-c}}>2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}}=\frac{a}{\sqrt{\left(1-a\right)a}}\ge\frac{a}{\frac{1}{2}\left(1-a+a\right)}=2a$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{\frac{b}{1-b}}\ge 2b;\ \sqrt{\frac{c}{1-c}}\ge 2c;\ \sqrt{\frac{d}{1-d}}\ge 2d$

Cộng vế theo vế bốn bất đẳng thức ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}+\sqrt{\frac{d}{1-c}}\ge 2$$

Ở đây dấu đẳng thức không xảy ra nên $\sqrt{\frac{a}{1-a}}+\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\sqrt{\frac{c}{1-c}}+\sqrt{\frac{d}{1-c}}>2$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Khi đưa lời giải trên cho bài toán trên, chắc hẳn bạn đọc sẽ thắc mắc là tại sao lại có thể chọn được $a+b+c+d=1$ và nếu chọn $a+b+c+d=k$ bất kì thì bài toán có giải được không? Và ngoài cách chọn điều kiện như trên có thể chọn theo cách khác (chẳng hạn như $abcd=1$) được không? Câu trả lời là hoàn toàn được, thực chất việc chọn này bắt nguồn từ việc đổi biến. Sau đây là cách đổi biến dẫn đến kết quả $a+b+c+d=1$. Ta thực hiện biến đổi một hạng tử bên vế trái như sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}=\sqrt{\frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{b+c+d}{a+b+c+d}}}=\sqrt{\frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}}}$$

Tới đây ta đổi biến như sau:

$$x=\frac{a}{a+b+c+d};\ y=\frac{b}{a+b+c+d};\ z=\frac{c}{a+b+c+d};\ t=\frac{d}{a+b+c+d}$$

Thay vào biểu thức trên ta được: $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}=\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}$ và $x+y+z+t=1$

Áp dụng cho vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}}>2$$

Và $x+y+z+t=1$

Như vậy sau phép đổi biến ta có một bất đẳng thức mới có hình thức hoàn toàn giống như bất đẳng thức cần chứng minh và được bổ sung thêm điều kiện giả thiết cho các biến là $x+y+z+t=1$.

Ví dụ 6.24: Cho a, b , c là các số thực dương tùy ý Chứng minh rằng

$$\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\le\frac{9}{8}\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức đơn giản được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương kết hợp với bất đẳng thức Cauchy. Ta thử chứng minh bằng phương pháp đổi biến xem sao

Bất đẳng thức tương đương với

$$8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\le 9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Chia cả hai vế cho $\left(abc\right)^3$ ta được

$$\frac{8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{abc}\le\frac{9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+\frac{bc}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+\frac{ca}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\right)$$

$$\le 9\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Đặt $x=\frac{a}{\sqrt[3]{abc}};\ y=\frac{b}{\sqrt[3]{abc}};\ z=\frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\Rightarrow xyz=1$

Thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$8\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\le 9\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$$

Như vậy sau phép đổi biến ta có một bất đẳng thức mới có hình thức hoàn toàn giống như bất đẳng thức cần chứng minh và được bổ sung thêm điều kiện cho biến là $xyz=1$. Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức trên với điều kiện của biến là $xyz=1$.Thật vậy:

$$8(x+y+z)(xy+yz+zx)\le 9(x+y)(y+z)(z+x)$$
$$\Leftrightarrow 8\left(3+x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right)\le 9\left(2+x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 6\le x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2 \Leftrightarrow 6\le \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$

Dễ thấy rằng theo bất đẳng thức Cauchy thì bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.
Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ 6.25: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{6}{5}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a+b+c=1$

$$\frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}+\frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2}+\frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2}\le\frac{6}{5}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2a(1-a)\le\left(\frac{2a+1-a}{2}\right)^2=\frac{(a+1)^2}{4}$$

Suy ra $\quad 1-2a+2a^2=1-2a(1-a)\ge 1-\frac{(a+1)^2}{4}=\frac{(1-a)(a+3)}{4}>0$

Do đó ta được $\quad \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}\le\frac{4a(1-a)}{(1-a)(a+3)}=4.\frac{a}{a+3}=4\left(1-\frac{3}{a+3}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2}+\frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2}+\frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2}\le 4\left[\left(1-\frac{3}{a+3}\right)+\left(1-\frac{3}{b+3}\right)+\left(1-\frac{3}{c+3}\right)\right]$$
$$\le 4\left(3-\frac{3.9}{a+b+c+9}\right)\le\frac{6}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ví dụ 6.26: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{a};\ y=\frac{1}{b};\ z=\frac{1}{c}$ khi đó ta thu được $xyz=1$.

Ta có $\quad \frac{1}{a^2(b+c)}=\frac{x^2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{x^2yz}{y+z}=\frac{x}{y+z}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y+z}+1\right)+\left(\frac{y}{z+x}+1\right)+\left(\frac{z}{x+y}+1\right)\ge\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)\ge\frac{9}{2}$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 6.27: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+2b-c)^3}{a+b+4c} + \frac{(2b+2c-a)^3}{b+c+4a} + \frac{(2c+2a-b)^3}{c+a+4b} \ge \frac{9}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Lời giải

Đặt $x = 2a+2b-c;\ y = 2b+2c-a;\ z = 2c+2a-b$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $x; y; z$ là các số dương.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{x^3}{x+y} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{x(y+z)}{4} \ge x^2;\ \frac{y^3}{y+z} + \frac{y(z+x)}{4} \ge y^2;\ \frac{z^3}{x+y} + \frac{z(x+y)}{4} \ge z^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{x^3}{x+y} + \frac{xy+yz+zx}{2} \ge x^2+y^2+z^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{x^3}{x+y} \ge x^2+y^2+z^2 - \frac{xy+yz+zx}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$ ta được

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{x^3}{x+y} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.