Chuyên đề luyện thi đại học

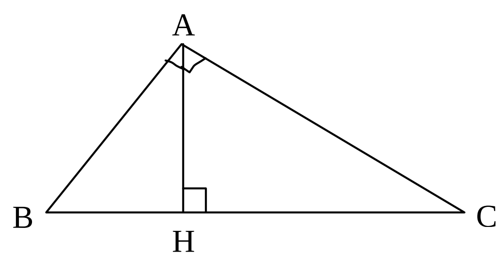
PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TẬP HÌNH KHÔNG GIAN TRONG KỲ THI TSĐH

Biên soạn: Nguyễn Trung Kiên

Trong kỳ thi TSĐH bài toán hình không gian luôn là dạng bài tập gây khó khăn cho học sinh. Nguyên nhân cơ bản là do học sinh chưa biết phân biệt rõ ràng dạng bài tập để lựa chọn công cụ, phương pháp giải cho phù hợp. Bài viết này sẽ giúp học sinh giải quyết những vướng mắc đó.

Phần 1: Những vấn đề cần nắm chắc khi tính toán

- Trong tam giác vuông ABC (vuông tại A) đường cao AH thì ta luôn có:



b=ctanB, c=btanC; $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$

- Trong tam giác thường ABC ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Tương tự ta có hệ thức cho cạng b, c và góc B, C:
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$
- V(khối chóp)=$\frac{1}{3}B.h$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao)
- V(khối lăng trụ)=B.h
- V(chóp S(ABCD)=$\frac{1}{3}$(S(ABCD).dt(ABCD))
- S=p.r (Trong đó p là nữa chu vi, r là bán kính vòng tròn nội tiếp tam giác)

Phần 2) Phương pháp xác định đường cao các loại khối chóp:

- **Loại 1:** Khối chóp có 1 cạnh góc vuông với đáy đó chính là chiều cao.
- **Loại 2:** Khối chóp có 1 mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao chính là đường kẻ từ mặt bên đến giao tuyến.
- **Loại 3:** Khối chóp có 2 mặt kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao chính là giao tuyến của 2 mặt kề nhau đó.
- **Loại 4:** Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên cùng tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy.
- **Loại 5:** Khối chóp có các mặt bên đều tạo với đáy 1 góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm vòng tròn nội tiếp đáy.

Sử dụng các giả thiết mở:

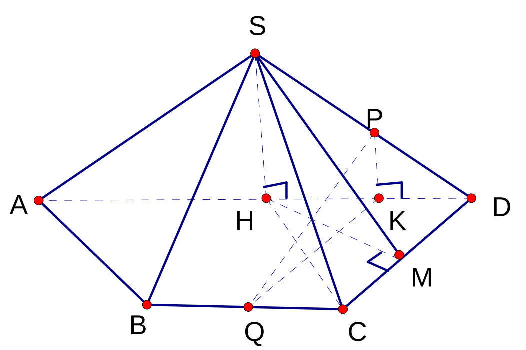
- Hình chóp có 2 mặt bên kề nhau cùng tạo với đáy góc α thì chân đường cao hạ từ đỉnh sẽ rơi vào đường phân giác góc tạo bởi 2 cạnh nằm trên mặt đáy của 2 mặt bên (Ví dụ: Hình chóp SABCD có mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy góc α thì chân đường cao hạ từ đỉnh S thuộc phân giác góc BAC)
- Hình chóp có 2 cạnh bên bằng nhau hoặc hai cạnh bên đều tạo với đáy một góc α thì chân đường cao hạ từ đỉnh rơi vào đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 điểm còn lại của cạnh bên thuộc mặt đáy. (Ví dụ: Hình chóp SABCD có SB=SC hoặc SB và SC cùng tạo với đáy một góc α thì chân đường cao hạ từ S rơi vào đường trung trực của BC)

Việc xác định được chân đường cao cũng là yếu tố quan trọng để tìm góc tạo bởi đường thẳng và mặt phẳng hoặc góc tạo bởi 2 mặt phẳng.

Ví dụ: Cho khối chóp SABCD có mặt bên SAD vuông góc (ABCD), góc tạo bởi SC và (ABCD) là 60^0, góc tạo bởi (SCD) và (ABCD) là 45^0, đáy là hình thang cân có 2 cạnh đáy là a, 2a; cạnh bên bằng a. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SD,BC.Tìm góc tạo bởi PQ và mặt phẳng (ABCD).Tính V khối chóp?

Rõ ràng đây là khối chóp thuộc dạng 2.Từ đó ta dễ dàng tìm được đường cao và xác định các góc như sau: Kẻ SH vuông góc với AD thì SH là đường cao(SC,(ABCD))= $S\hat{C}H;(SM,(ABCD))=H\hat{M}S)$, với M là chân đường cao kẻ từ H lên CD

Từ P hạ PK vuông góc với AD ta có $(PQ,(ABCD))=P\hat{Q}K$



Phần 3: Các bài toán về tính thể tích

A. Tính thể tích trực tiếp bằng cách tìm đường cao:

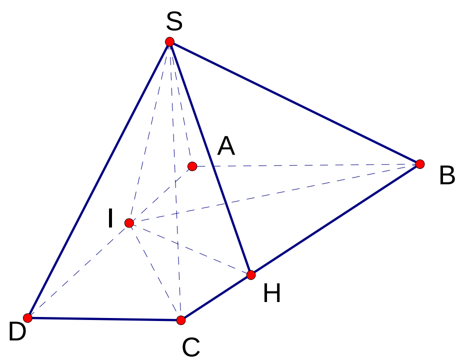
Ví dụ 1) ***(TSĐH A 2009***) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D., có AB=AD=2a; CD=a. Góc giữa 2 mặt phẳng (SCB),(ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm AD biết 2 mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với (ABCD).Tính thể tích khối chóp SABCD?

HD giải: Vì 2 mặt phẳng (SBC) và (SBI) cùng vuông góc với (ABCD) mà (SBI) và (SCI) có giao tuyến là SI nên SI là đường cao. Kẻ IH vuông góc với BC ta có góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là $S\hat{H}I=60^0$. Từ đó ta tính được:

$$IC=a\sqrt{2};IB=BC=a\sqrt{5};S(ABCD)=\frac{1}{2}AD(AB+CD)=3a^2$$

$\frac{1}{2}IH.BC = S(IBC) = S(ABCD) - S(ABI) - S(CDI) = 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$ nên

$IH = \frac{2S(IBC)}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}a$. Từ đó V(SABCD)= $\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$.



Ví dụ 2) (TSĐH D 2009) Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB=a; AA'=2a; A'C=3a. Gọi M là trung điểm của đoạn A'C', I là trung điểm của AM và A'C'. Tính V chóp IABC theo a?

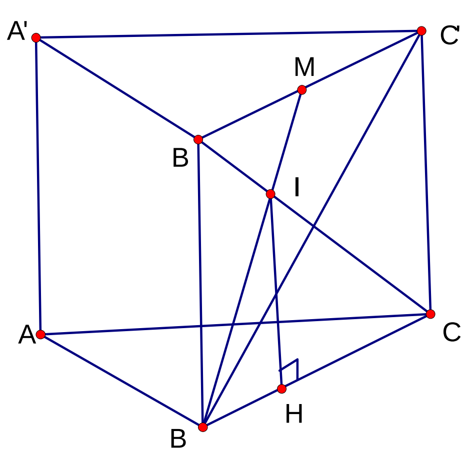
HD giải:

- ABC A'B'C' là lăng trụ đứng nên các mặt bên đều vuông góc với đáy.

Vì I∈ (ACC') ⊥ (ABC), từ I ta kẻ IH ⊥ AC thì IH là đường cao và I chính là trọng tâm tam giác AA'C' $\Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{4a}{3}$

Có $AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = \sqrt{9a^2 = 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$

V(IABC)= $\frac{1}{3}IH.dt(ABC) = \frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.\frac{1}{2}.2a.a = \frac{4}{9}a^3$ (đvtt)



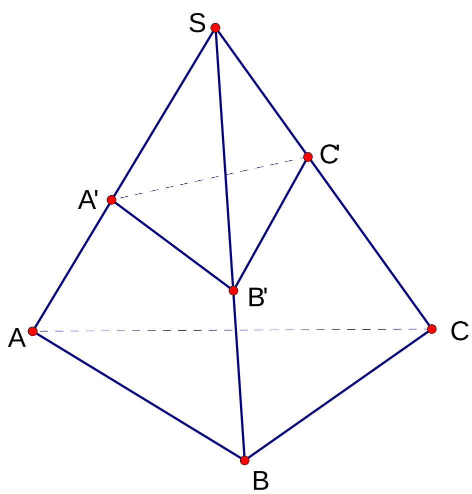
B. Tính thể tích bằng cách sử dụng công thức tỉ số thể tích hoặc phân chia khối đa diện thành các khối đa diện đơn giản hơn

Khi gặp các bài toán mà việc tính toán gặp khó khăn thì ta phải tìm cách phân chia khối đa diện đó thành các khối chóp đơn giản hơn mà có thể tính trực tiếp thể tích của nó hoặc sử dụng công thức tính tỉ sốthể tích để tìm thể tích khối đa diện cần tính thông qua 1 khối đa diện trung gian đơn giản hơn.

Các em học sinh cần nắm vững các công thức sau:

$\dfrac{V(SA'B'C')}{V(SABC)} = \dfrac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$ **(1)**

$\dfrac{V(SA'ABC)}{V(SABC)} = \dfrac{A'A}{SA}$ (2). Công thức (2) có thể mở rộng cho khối chóp bất kỳ.



Ví dụ 3) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $B\hat{A}D = 60^0$, SA vuông góc với đáy(ABCD), SA=a. Gọi C là trung điểm SC, mặt phẳng (P) đi qua AC song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp tại B', D'. Tính thể tích khối chóp

HD giải:

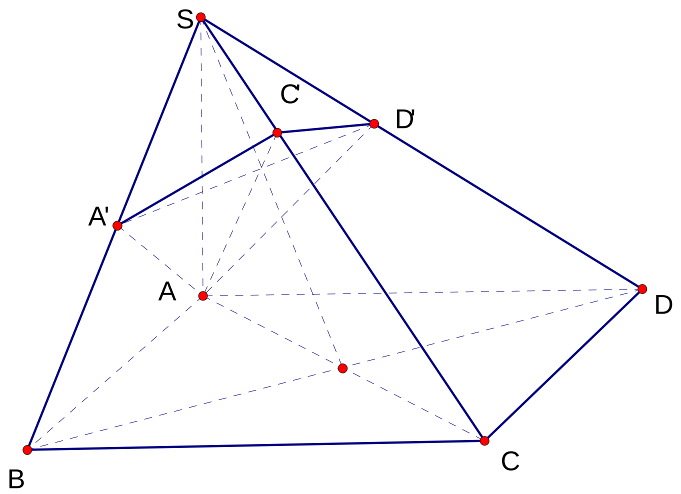
Gọi O là giao 2 đường chéo ta suy ra AC' và SO cắt nhau tại trọng tâm I của tam giác SAC. Từ I thuộc mặt phẳng (P)(SDB) kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD tại B', D' là 2 giao điểm cần tìm.

Ta có: $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{2}; \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$

Dễ thấy $V_{(SAB'C'D')} = 2V_{(SAB'C')}; V_{(SAB'C')} = 2V_{(SABC)} \Rightarrow \dfrac{V(SAB'C'D')}{V(ABCD)} = \dfrac{V(SAB'C')}{V(SABC)} = \dfrac{SA.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \dfrac{1}{3}$

Ta có $V_{(SABCD)} = \dfrac{1}{3}SA.dt(ABCD) = \dfrac{1}{3}SA.AD.AB.sinDA\hat{B} = \dfrac{1}{3}a.a.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^3\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$V_{(SAB'C'D')} = \dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$ (đvtt)



Ví dụ 4) ***(Dự bị A 2007)***

Cho hình chóp SABCD là hình chữ nhật AB=a, AD=2a, cạng SA vuông góc với đáy, cạnh SB hợp với đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy M sao cho AM=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng BCM cắt DS tại N. Tính thể tích khối chóp SBCMN.

HD giải:

Từ M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại N là giao điểm cần tìm, góc tạo bởi SB và (ABCD) là $SB\hat{A} = 60^0$.

Ta có SA=SBtan60^0=a$\sqrt{3}$.

Từ đó suy ra SM=SA-AM=$a\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{3} = a\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$

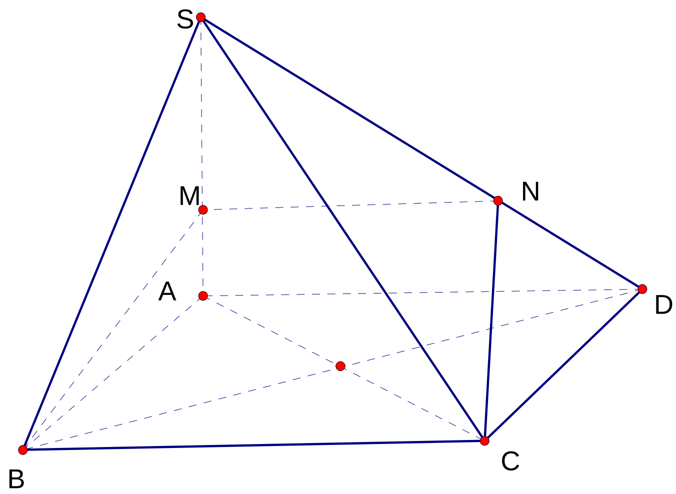
Dễ thấy $V_{(SABCD)} = V_{(SABC)} + V_{(SACD)} = 2V_{(SABC)} = 2V_{(SACD)}$; $V_{(SBCMN)} = V_{(SMBC)} + V_{(SMCN)}$

$$\Rightarrow \frac{V(SMBCN)}{V(SABCD)} = \frac{V(SMBC) + V(SMCN)}{V(SABCD)} = \frac{V(SMCN)}{2V(SABC)} + \frac{V(SMCN)}{2V(SACD)}$$

$$= \frac{1.SM.SB.SC}{2.SA.SB.SC} + \frac{1.SM.SC.SN}{2.SA.SC.SD} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

Mà $V_{(SABCD)} = \frac{1}{3}SA.dt(ABCD) = \frac{1}{3}a\sqrt{3a}.2a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

$$\Rightarrow V_{(SMBCN)} = \frac{10\sqrt{3}}{27}a^3$$



Phần 4: Các bài toán về khoảng cách trong không gian

A. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng

Để giải quyết nhanh gọn bài toán khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng học sinh cần nắm chắc bài toán cơ bản và các tính chất sau

*** Bài toán cơ bản:** Cho khối chóp SABC có SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

- Hạ AM vuông góc với BC , AH vuông góc với SM suy ra AH vuông góc với (SBC). Vậy khoảng cách từ A đến (SBC) là AH.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AH = \frac{AM.AS}{\sqrt{AM^2 + AS^2}}$

*** Tính chất quan trọng cần nắm:**

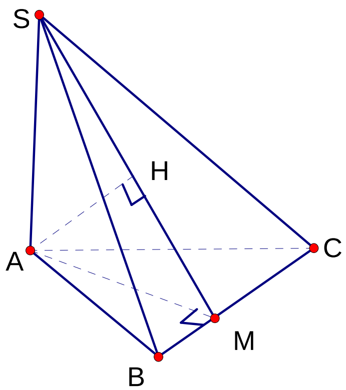
- Nếu đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên (d) đến mặt phẳng (P) là như nhau

- Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $d_{A/(P)} = kd_{B/(P)}$ trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M

Trên cơ sở các tính chất trên ta luôn quy được khoảng cách từ một điểm bất kỳ về bài toán cơ bản.

Tuy nhiên 1 số trường hợp việc tìm hình chiếu trở nên vô cùng khó khăn, khi đó việc sử dụng công thức tính thể tích trở nên rất hiệu quả.

Ta có V(khối chóp)=$\frac{1}{3}B.h \Rightarrow h = \frac{3V}{B}$



Ví dụ 1) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp SABCD và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).

Lời giải:
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD,
E là hình chiếu của G lên AB
Ta có: $SG \perp AB; GE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SGE)$

$\Rightarrow S\hat{A}G = 60^0$

$\Rightarrow SG = GE.\tan S\hat{E}G = \sqrt{3}GE$

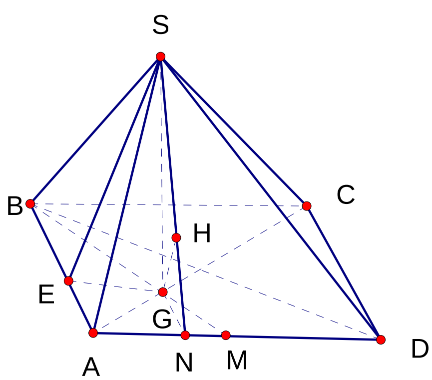
Mặt khác G là trọng tâm của tam giác ABD

$\Rightarrow GE = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{a}{3}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Hạ GN vuông góc với AD, GH vuông góc với SN.

Ta có $d_{B/(SAD)} = 3d_{G/(SAD)} = 3GH = \dfrac{3GN.GS}{\sqrt{GN^2+GS^2}} = \dfrac{3\dfrac{a}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Ví dụ 2) Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi , $AB = a\sqrt{3}$, $\angle BAD = 120^0$. Biết góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30^0.Tính thể tích khối lăng trụ trên theo a. và khoảng cách từ trung điểm N của BB' đến mặt phẳng (C'MA).Biết M là trung điểm của A'D'

Giải: Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD}$ (1).

Đáy ABCD là hình thoi gồm 2 tam giác đều ABC, ACD nên:

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \quad (2)$$

Gọi C'M là đường cao của tam giác đều C'A'D' thì $C'M \perp \left(ADA'D'\right)$ nên $C'\hat{A}M = 30^0$

Ta có $C'M = \frac{3a}{2} \Rightarrow AM = C'M.\cot 30^0 = \frac{3\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow A'A = \sqrt{AM^2 - A'M^2} = a\sqrt{6}$ (3)

Thay (2),(3) vào (1) ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.a\sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}a^3}{2}$.

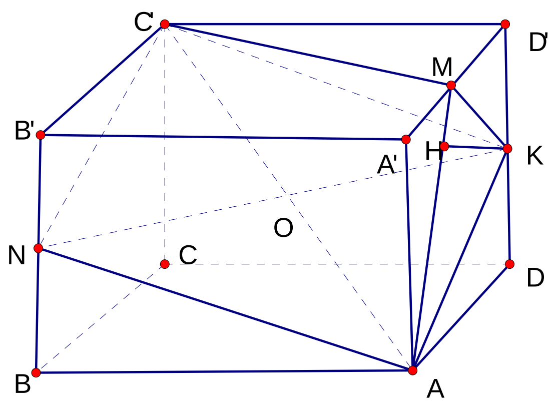
Ta có $d_{N/(C'MA)} = d_{K/(C'MA)}$ với K là trung điểm của DD' (Vì K và N đối xứng nhau qua trung điểm O của AC')

Từ K hạ KH vuông góc với AM thì

$$KH \perp (AC'M) \Rightarrow d_{K/(C'MA)} = KH; \frac{1}{2}KH.AM = dt(AA'D'D) - dt(AA'M) - dt(MD'K) - dt(AKD)$$

$$\Rightarrow KH.\frac{3\sqrt{3}a}{4} = a\sqrt{6}.a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{6}.\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3} \Rightarrow KH = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

Vậy $d_{N/(C'MA)} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$



Ví dụ 3) Cho hình chóp SABC có góc tạo bởi 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60^0, ABC,SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến mp(SAC).(**Đề dự bị khối A 2007)**

HD:

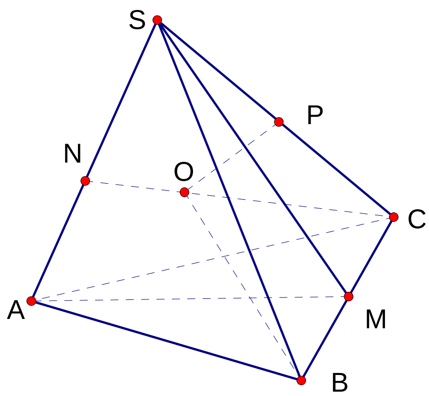
Cách 1: Coi B là đỉnh khối chóp BSAC từ giả thiết ta suy ra BS=BA=BC=a. Gọi O là chân đường cao hạ từ B xuống mp(SAC). O chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác SAC. Gọi M là trung điểm BC ta có $SM \perp BC; AM \perp BC$. Nên góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là

$\widehat{SMA} = 60^0 \Rightarrow SM = AM = \text{AS}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bây giờ ta tìm vị trí tâm vòng ngoại tiếp tam giác SAC.
Tam giác SAC cân tại C nên tâm vòng tròn ngoại tiếp nằm trên trung trực của SA và CN (N là trung diểm của SA). Kẻ trung trực của SC cắt trung trực của SA tại O là điểm cần tìm

$$\cos SNC = \frac{NC}{SC} = \frac{\sqrt{SC^2 - \left(\frac{SA}{2}\right)^2}}{SC} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{\frac{SC}{2}}{\cos S\hat{CN}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}; BO = \sqrt{BC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{13}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$



Cách 2: $V_{(SABCD)} = 2V_{(SABM)} = 2\frac{1}{3}BM.dt(SAM) = \frac{2a}{3.2}AM.MS.\sin 60^0 = a^3\frac{\sqrt{3}}{16}dt(SAC)$

$= \frac{1}{2}CN.\text{AS}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{13}}{4}a.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{39}a^2}{16} \Rightarrow d(B,(SAC)) = \frac{3V(SABC)}{dt(SAC)} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Ví dụ 4) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang $A\hat{B}C = B\hat{A}D = 90^0$, BA=BC=a, AD=2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA=$a\sqrt{2}$, gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mp(SCD) **(TSĐH D 2007)**

HD giải: Ta có $AC = a\sqrt{2}; SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{6}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$. Ta cũng dễ dàng tính được $CD = a\sqrt{2}$. Ta có $SD^2 = SC^2 + CD^2$ nên tam giác SCD vuông tại C.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{\text{AS}^2} \Rightarrow AH = \frac{AB.\text{AS}}{\sqrt{\text{AB}^2 + \text{AS}^2}} = \frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

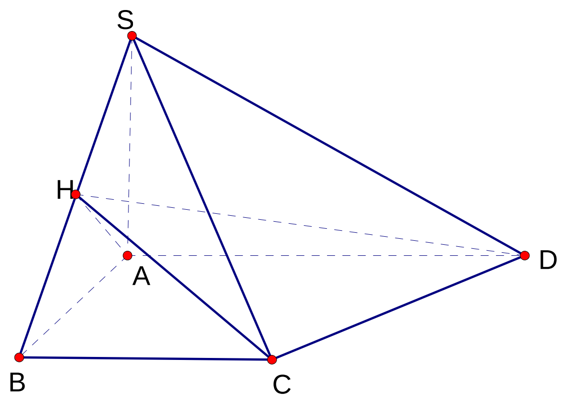
$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}a \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$dt(BCD) = dt(ABCD) - dt(ABD) = \frac{1.AB.(BC+AD)}{2} - \frac{1}{2}AB.AD = \frac{a^2}{2};$$

$$dt(SCD) = \frac{1}{2}SC.CD = a^2\sqrt{2}$$

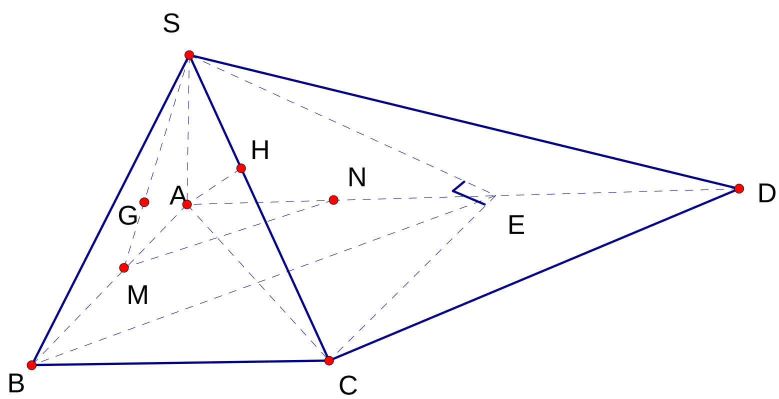
$$\frac{V(SHCD)}{V(SBCD)} = \frac{SH.SC.SD}{SB.SC.SD} = \frac{2}{3}; V(SBCD) = \frac{1}{3}SA.dt(BCD) = \frac{1.a\sqrt{2}.a^2}{3.2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

$V(SHCD) = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3$ .Ta có $d(H/(SCD)) = \frac{3V(SHCD)}{dt(SCD)} = \frac{\sqrt{2}}{9}a^3.3\frac{1}{a^2\sqrt{2}} = \frac{a}{3}$



Ví dụ 5) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang $A\hat{B}C = B\hat{A}D = 90^0$ BA=BC=a; AD=2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy , góc tạo bởi SC và (SAD) bằng 30^0.Gọi G là trọng tâm tam giác SAD. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD)

<u>Giải:</u>



Kẻ CE vuông góc với AD thì E là trung điểm của AD và $CE \perp (SAD)$

$\Rightarrow C\hat{S}E = 30^0 \Rightarrow SE = CE.\tan 60 = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AE. Ta có BE song song với (SCD), MN cũng song song với (SCD). Ta có $ND = \frac{3}{4}AD$

$$GS = \frac{2}{3}MS \Rightarrow d_{G/(SCD)} = \frac{2}{3}d_{M/(SCD)} = \frac{2}{3}.d_{N/(SCD)} = \frac{2}{3}.\frac{3}{4}d_{A/(SCD)} = \frac{1}{2}d_{A/(SCD)}$$

Vì tam giác ACD vuông cân tại C nên CD vuông góc với (SAC). Hạ AH vuông góc với SC thì

$$AH \perp (SCD) \Rightarrow d_{A/(SCD)} = AH = \frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = a$$

(Ta cũng có thể lập luận tam giác SAC vuông cân suy ra AH=a)

B. <u>Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau trong không gian</u>

Khi tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b trong không gian ta tiến hành theo trình tự sau:

- Dựng (tìm) mặt phẳng trung gian (P) chứa a song song với b sau đó ***tính khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ trên b đến mp(P)***

- Khi tính khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng ta có thể vận dụng 1 trong 2 phương pháp đã trình bày ở mục A.

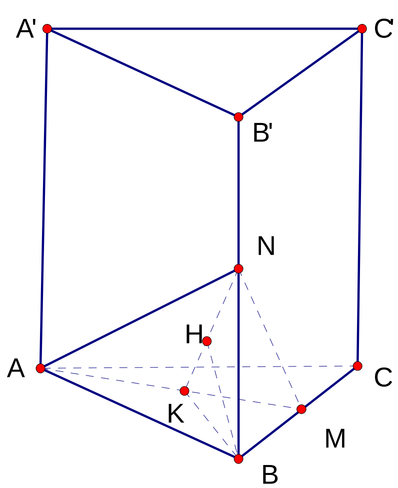
Ví dụ 1) Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông AB=BC=a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, $B'C$.**(TSĐH D2008)**

HD giải:

$$V(ABCA'B'C') = S.h = a^3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi N là trung điểm của BB' ta có $B'C$ song song với mp(AMN). Từ đó ta có:
$d(B'C, AM) = d(B', (AMN)) = d(B, (AMN))$ vì N là trung điểm của BB'. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (AMN), vì tứ diện BAMN là tứ diện vuông tại B nên ta có

$\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BM^2} \Rightarrow BH = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$ chính là khoảng cách giữa AM và $B'C$.

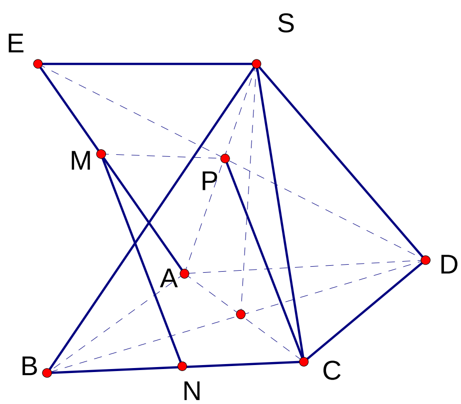


Chú ý 1) Trong bài toán này ta đã dựng mặt phẳng trung gian là mp(AMN) để tận dụng điều kiện $B'C$ song song với (AMN). Tại sao không tìm mặt phẳng chứa $B'C$ các em học sinh tự suy nghĩ điều này

Chú ý 2) Nếu mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của đoạn AB thì khoảng cách từ A đến (P) cũng bằng khoảng cách từ B đến (P))

Ví dụ 2) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và AC.**(TS B2007)**

HD giải: Gọi P là trung điểm của SA, ta có tứ giác MPNC là hình bình hành.
Nên MN// PC. Từ đó suy ra MN//(SAC). Mặt khác BD$\perp$mp(SAC) nên BD$\perp$PC $\Rightarrow BD \perp MN$.
Ta có: d(MN, AC)=d(N,(SAC))=$\frac{1}{2}d(B,(SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$



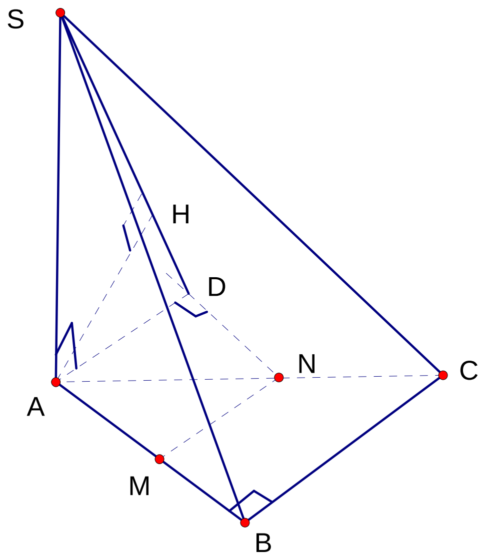
(Chú ý việc chuyển tính khoảng cách từ N đến (SAC) sang tính khoảng cách từ B đến (SAC) giúp ta đơn giản hoá bài toán đi rất nhiều. Các em học sinh cần nghiên cứu kỹ dạng toán này để vận dụng)

Ví dụ 3) Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với đáy (ABC). Gọi M là trung điểm AB, mặt phẳng qua SM song song với BC cắt AC tại N. Biết góc tạo bởi (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp SBCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN **(TSĐH A 2011)**

Giải:

- Ta có $SA \perp (ABC); A\hat{B}C = 90^0 \Rightarrow S\hat{B}A = 60^0 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{3}$
Mặt phẳng qua SM song song với BC cắt AC tại N suy ra N là trung điểm AC
Từ đó tính được $V = \sqrt{3}a^3$
- Kẻ đường thẳng (d) qua N song song với AB thì AB song song với mặt phẳng (P) chứa SN và (d) nên khoảng cách từ AB đến SN cũng bằng khoảng cách từ A đến (P).
Dựng AD vuông góc với (d) thì $AB//(SND)$, dựng AH vuông góc với SD thì

$$AH \perp (SND) \Rightarrow d_{AB/SN} = d_{A/(SND)} = AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$



Ví dụ 4) Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a, AA' = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC.

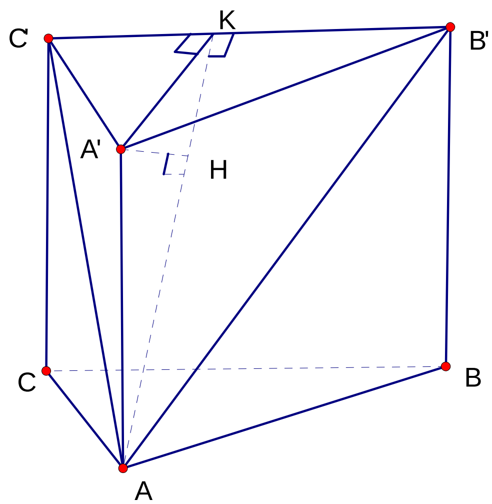
Giải:

Ta có BC song song với mặt phẳng (AB'C') chứa AB' nên

$d_{BC/AB'} = d_{BC/(AB'C')} = d_{B/(AB'C')} = d_{A'/(AB'C')}$ (vì $A'B, AB'$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

Từ A' hạ A'K vuông góc với B'C', Hạ A'H vuông góc với AK thì

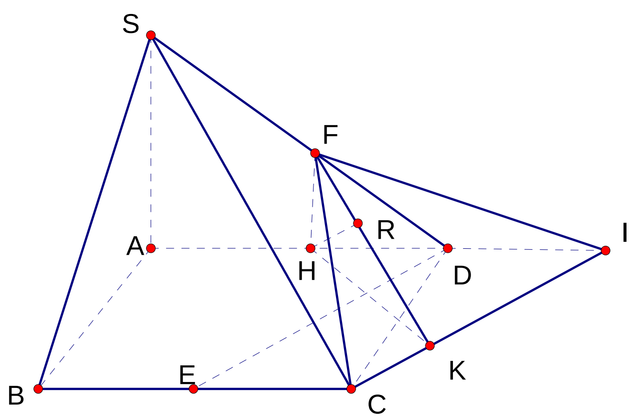
$$A'H \perp (AB'C') \Rightarrow d_{A'/(AB'C')} = A'H = \frac{A'K.A'A}{\sqrt{A'K^2 + A'A^2}} = \frac{2a}{3}$$



(Rõ ràng việc quy về bài toán cơ bản có vai trò đặc biệt quan trọng trong các bài toán tính khoảng cách, các em học sinh cần chú ý điều này)

Ví dụ 5) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. SA vuông góc với đáy góc tạo bởi SC và (SAB) là 30^0. Gọi E , F là trung điểm của BC và SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau DE và CF.

Giải:



Vì $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow C\hat{S}B = 30^0 \Rightarrow SB = BC.\cot 30 = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$

Từ C dựng CI song song với DE ta có $CI = DE = \dfrac{a}{2}$. Ta có mặt phẳng (CFI) chứa CF và song song với DE.

Ta có $d_{DE/CF} = d_{DE/(CFI)} = d_{D/(CFI)} = \dfrac{1}{2} d_{H/(CFI)}$ với H là chân đường cao hạ từ F lên AD

Dựng $\begin{cases} HK \perp CI \\ HR \perp FK \end{cases} \Rightarrow HR \perp (FCI) \Rightarrow d_{H/(CFI)} = HR = \dfrac{HK.HF}{\sqrt{HK^2 + HF^2}}$

Ta có $\dfrac{1}{2} HK.CI = \dfrac{1}{2} CD.HI \Rightarrow HK = \dfrac{CD.HI}{CI} = \dfrac{a.\dfrac{3}{2}a}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3}{2}a\right)^2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$

Ta có $FH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HR = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{3a}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{\sqrt{13}}\right)^2}} = \dfrac{3\sqrt{31}}{31}$

Trong bài toán này ta đã tạo ra khối chóp FHCI để quy về bài toán cơ bản là : Tính khoảng cách từ chân đường cao H đến mặt bên (FCI). Việc làm này giúp bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều

Phần 6
Các bài toán tính góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau trong không gian.

Khi cần tính góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b trong không gian ta phải ***tìm 1 đường thẳng trung gian là c song song với a và c cắt b***. Khi đó ***góc tạo bởi a và b cũng chính là góc tạo bởi b và c***. Hoặc ta ***dựng liên tiếp 2 đường thẳng c và d cắt nhau lần lượt song song với a và b. Sau đó ta tính góc giữa c và d theo định lý hàm số côsin*** $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ***hoặc theo hệ thức lượng trong tam giác vuông.***

Ví dụ 1) Cho lăng trụ ABCA'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a , đáy ABC là tam giác vuông tại A. AB = a , $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' lên mp (ABC) là trung điểm của cạnh BC , Tính theo a thể tích khối chóp A'ABC và tính côsin góc tạo bởi AA' và B'C' **. (TSĐH A 2008)**

HD giải :Gọi H là trung điểm của BC. Suy ra A'H$\perp$(ABC) và

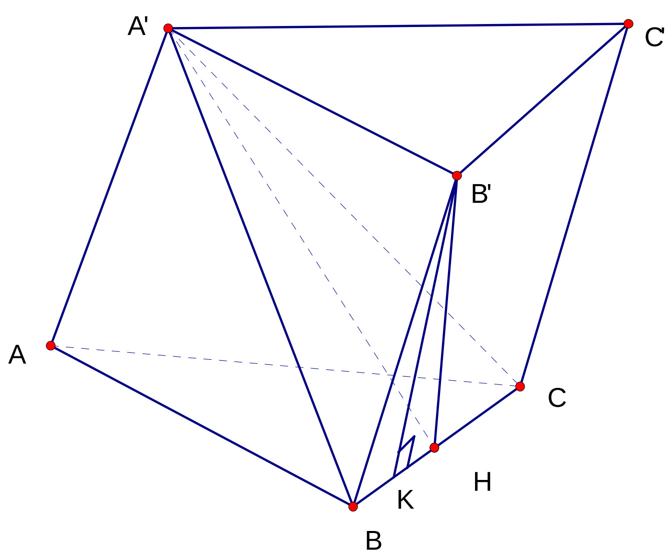
$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2} = a$ Do đó A'H = $\sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$.

V(A'ABC) = $\frac{1}{3}$A'H.dt (ABC) = $\frac{a^3}{2}$

Trong tam giác vuông A'B'H ta có HB'= $\sqrt{A'B^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác B'BH cân tại B'.

Đặt α là góc tạo bởi AA' và B'C' thì $\alpha = \widehat{B'BH} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$

Tel 0988844088



Ví dụ 2) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a , SA = a, SB = a$\sqrt{3}$ mp (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy . Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Tính theo a thể tích khối chóp SBMDN và tính cosin góc tạo bởi SM và DN.

Hd giải: Từ S hạ SH vuông góc AB thì SH vuông góc với mp (ABCD). SH cũng chính là đường cao khối chóp SBMDN . Ta có $SA^2 + SB^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại

S $\Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = a \Rightarrow \Delta SAM$ là tam giác đều $\Rightarrow_{\Delta} ABCH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

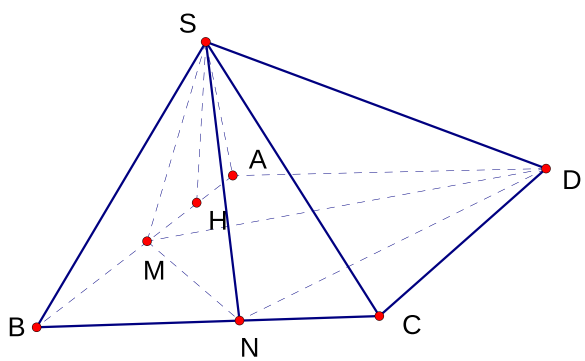
Dễ thấy đường thẳng(BMDN)=1/2dt(ABCD)=$2a^2$. Do đó $V_{(SBMDN)} = \dfrac{1}{3} SH.dt(BMDN) = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$

Kẻ ME song song với DN (E thuộc AD) suy ra AE = $\dfrac{a}{2}$ giả sử (SM,DN)=$\alpha \Rightarrow \alpha = (SM, ME)$.

Ta có SA vuông góc với AD (Định lý 3 đường vuông góc) suy ra

$SA \perp AE \Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ Tam giác SME cân tại E

nên $\cos\alpha = \dfrac{\frac{SM}{2}}{ME} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$



PHẦN 7) CÁC DẠNG BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Để giải quyết tốt dạng bài tập này học sinh cần nắm vững kiến thức cơ bản sau:

** Nếu I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $SA_1A_2..A_n$ thì tâm I cách đều các đỉnh $S; A_1; A_2.....A_n$

- Vì vậy tâm I thuộc trục đường tròn đáy là đường thẳng qua tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với đáy $A_1A_2...A_n$ (đường thẳng này song song với đường cao khối chóp) (Phải chú ý việc chọn mặt đáy cần linh hoạt sao cho khi xác định trục đường tròn đáy là đơn giản nhất)

- Tâm I phải cách đều đỉnh S và các đỉnh $A_1; A_2.....A_n$ nên I thuộc mặt phẳng trung trực của SA_i đây là vấn đề khó đòi hỏi học sinh cần khéo léo để chọn cạnh bên sao cho trục đường tròn đã xác định và cạnh bên đồng phẳng với nhau để việc tìm I được dễ dàng

** Trong một số trường hợp đặc biệt khi khối chóp có các mặt bên là tam giác cân, vuông, đều ta có thể xác định 2 trục đường tròn của mặt bên và đáy . Khi đó tâm I là giao điểm của 2 trục đường tròn. Nếu hình chóp có các đỉnh đều nhìn cạnh a dưới một góc vuông thì tâm mặt cầu là trung điểm của cạnh a.

** Khi tính toán cần lưu ý các công thức:

$S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}$; $a=2R\sin A,...$

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B $AB=BC=a; AD=2a$ .Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABCD) và SA=a. Gọi E là trung điểm của AD.Tính thể tích khối chóp SCDE và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đó.

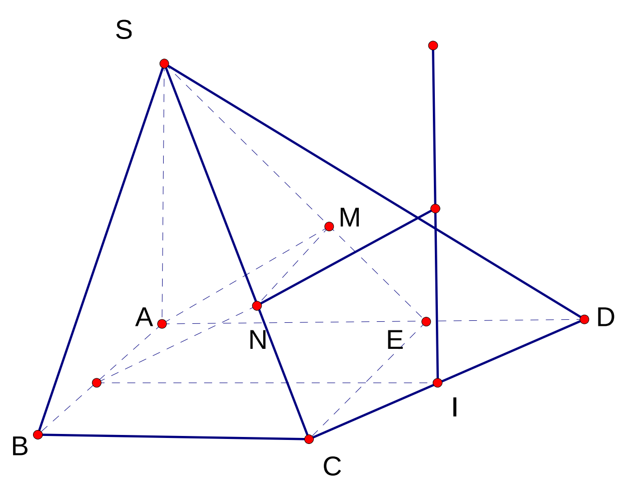
HD giải:

$V=\frac{a^3}{6}$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SE và SC ta có mặt phẳng (ABNM) là mặt phẳng trung trực của SE. Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SCDE là giao điểm của mặt phẳng (ABMN) và trục đường tròn ngoại tiếp đáy CDE. Gọi Δ là đường thẳng qua I là trung điểm của CD và song song với SA.Gọi K là trung điểm của AB thì KN //AM. KN và Δ đồng phẳng suy ra $KN\cap\Delta=O$ là điểm cần tìm

Tam giác OIK vuông cân nên OI=IK=$\frac{BC+AD}{2}=\frac{3a}{2}$;

Ta có $OC^2=OI^2+IC^2=\frac{9a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}=\frac{11a^2}{4}\Rightarrow R=OC=\frac{a\sqrt{11}}{2}$ (0,25 điểm)



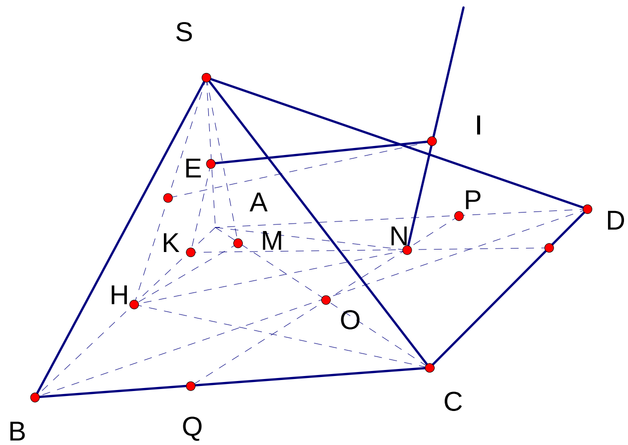
Trong ví dụ này ta dựng mặt phẳng trung trực của SE để tận dụng điều kiện tam giác SAE vuông cân ở A

Ví dụ 2) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh $AB=a; AD=a\sqrt{2}$ góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và ABCD bằng 60^0. Gọi H là trung điểm của AB. Biết mặt bên SAB là tam giác cân tại đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp SABCD và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp SAHC

- Ta có $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)$ .Kẻ HM vuông góc với AC thì góc tạo bởi (SAC) và (ABCD) là $S\hat{M}H=60^0$

Có $HM=AH\sin H\hat{A}M=AH\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6};SH=HM\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}SHdt(ABCD)=\dfrac{a^3}{3}$



- Gọi E, K lần lượt là trung điểm của SA, HA . Kẻ đương thẳng qua K song song với AD cắt CD ở F thì KF$\perp(SAH)$. Dựng Ex song song với KF thì Ex là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SHA. Dựng đường thẳng qua tâm O của mặt đáy vuông góc với AC cắt KF, AD tại N, P thì N là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác AHC. Trong mặt phẳng chứa Ex và KF kẻ đường thẳng Ny vuông góc với đáy (ABCD) (đường thẳng song song với EK) thì Ny là trục đường tròn của tam giác AHC.

Giao điểm $I=Ny\cap Ex$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SAHC.

Ta có $R^2=IH^2=IN^2+NH^2=KE^2+NH^2$.

$AP=\dfrac{AO}{\cos C\hat{A}D}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}a;KN=\dfrac{1}{2}(HO+AP)=\dfrac{5a}{4\sqrt{2}}\Rightarrow HN=\sqrt{KN^2+\dfrac{AH^2}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}a$

$$\Rightarrow R^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}a\right)^2=\frac{31a^2}{32}$$

Vậy $R=\sqrt{\dfrac{31}{32}}a$

Cách 2) Gọi *J*, *r* lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *AHC*. Ta có

$r=\dfrac{AH.HC.AC}{4S_{AHC}}=\dfrac{AH.HC.AC}{2S_{ABC}}=\dfrac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

Kẻ đường thẳng Δ qua *J* và $\Delta // SH$. Khi đó tâm *I* của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.AHC$ là giao điểm của đường trung trực đoạn *SH* và Δ trong mặt phẳng (*SHJ*). Ta có

$$IH = \sqrt{IJ^2 + JH^2} = \sqrt{\frac{SH^2}{4} + r^2}.$$

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = a\sqrt{\frac{31}{32}}$.

Ví dụ 3) Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều cạnh a, $DA = DB = \frac{a}{\sqrt{3}}$, CD vuông góc với AD.Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm E sao cho $A\hat{E}B = 90^0$.Tính góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD).Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCE

Giải:

- Gọi I là trung điểm của AB thì CI vuông góc với AB và DI vuông góc với AB. Nên góc tạo bởi (ACD) và (ABD) là $C\hat{I}D$.Do hai tam giác ACD và BCD bằng nhau nên

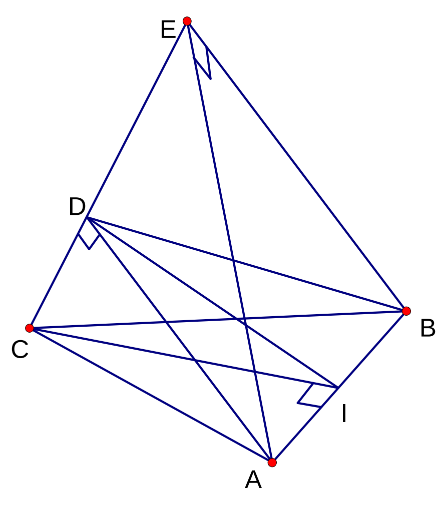
$$B\hat{D}C = A\hat{D}C = 90^0 \Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp DI; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; DI^2 = DA^2 - AI^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

$$\cos C\hat{I}D = \frac{DI}{CI} = \frac{a}{\sqrt{2}} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

- Tam giác vuông ACD có $CD^2 = \sqrt{CA^2 - DA^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Tam giác ABE vuông cân, do đó

$AE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DE = \sqrt{AE^2 - DA^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}; \Delta ACE$ có AD là đường cao và

$CD.DE = \frac{a^2}{3} = DA^2 \Rightarrow \Delta ACE$ vuông tại A.Tương tự ta có tam giác BCE vuông tại B. Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCE có CE là đường kính tâm I của mặt cầu là trung điểm của CE. Bán kính $R = \frac{1}{2}(CD + DE) = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{a}{\sqrt{6}}\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$



Ví dụ 4) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và đường cao là SH với H thỏa mãn $\overrightarrow{HN} = -3\overrightarrow{HM}$ trong đó M, N là trung điểm AB, CD. Mặt phẳng (SAB) tạo với đáy ABCD góc 60^0. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) và xác định thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD

Giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra H là trung điểm của MO và

$MH = \frac{a}{4}; AB \perp HM \Rightarrow AB \perp SM \Rightarrow SMH = 60^0 \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SM = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân

tại S và $SA = SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ta có $d(N/(SAC)) = \frac{3V_{SNAC}}{dt(SAC)}$. Kẻ HK vuông góc với AC thì

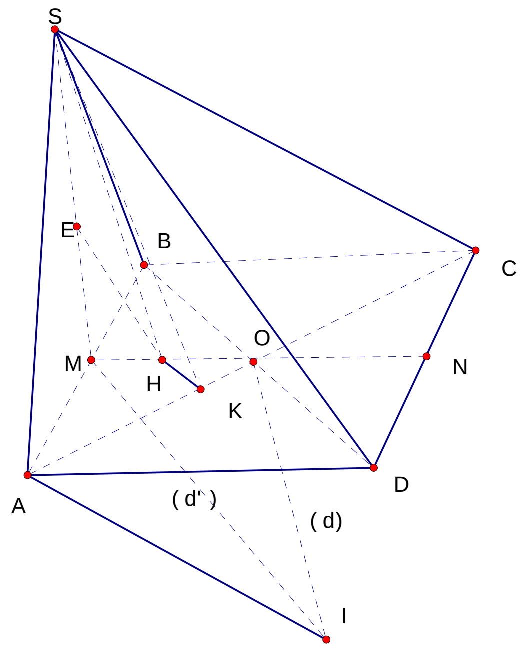
HK//BD và $K\hat{H}O = K\hat{O}H = 45^0 \Rightarrow SK = \frac{a\sqrt{14}}{8} \Rightarrow dt(SAC) = \frac{1}{2}AC.SK = \frac{\sqrt{7}a^2}{8}$

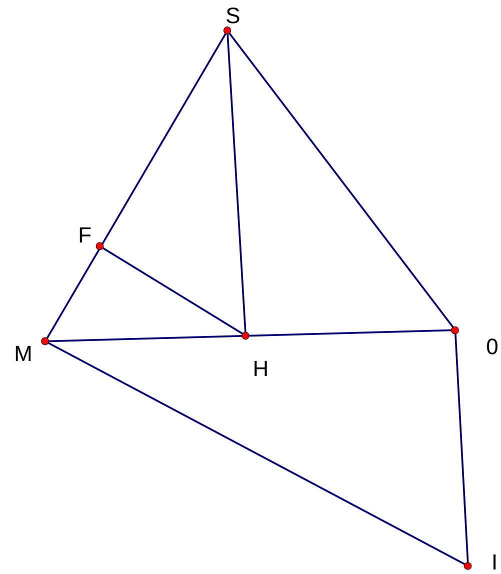
$V_{SNAC} = \frac{1}{3}SH.dt(NAC) = \frac{\sqrt{3}}{48}a^3 \Rightarrow d(N/(SAC)) = \frac{a\sqrt{21}}{14}$

Trục đường tròn đáy là đường thẳng d qua O và //SH $\Rightarrow d \subset (SMN)$. Vì tam giác SAB vuông cân tại S nên trục d' của mp(SAB) qua M và vuông góc với SAB. Theo trên ta có (SAB) vuông góc với (SMH) nên kẻ HE vuông góc với SM thì $HE \perp (SAB)$ nên (d') //HE. Ta có $d' \cap d = I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD. Ta có

$O\hat{M}I = 30^0; OI = OM\tan 30 = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow R^2 = IA^2 = OA^2 + OI^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{12} = \frac{7a^2}{12} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

Thể tích khối cầu là: $V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \pi a^3 \frac{7\sqrt{21}}{54}$.





MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC VỀ HÌNH KHÔNG GIAN THƯỜNG DÙNG TRONG KỲ THI TSĐH

BIÊN SOẠN GV NGUYỄN TRUNG KIÊN

Câu 1) Khối chóp SABCD có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AM, song song với BD chia khối chóp làm 2 phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Câu 2) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có các cạnh bằng a.

a) Tính thể tích khối chóp.

b) Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy đến các mặt của hình chóp.

Câu 3) Khối chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA $\perp$ (ABCD); SA=2a. Gọi E, F là hình chiếu của A trên SB và SD. I là giao điểm của SC và (AEF). Tính thể tích khối chóp SAEIF.

Câu 4) Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với đáy 1 góc 30^0 và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Câu 5) Khối lăng trụ $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông cân, cạnh huyền AB=$\sqrt{2}$. Mặt phẳng (AA_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AA_1=\sqrt{3}$; góc A_1AB nhọn, góc tạo bởi (A_1AC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Câu 6) Khối lăng trụ tứ giác đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và A_1D bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5.

a) Hạ AH $\perp$ A_1D (K$\in$ A_1D). chứng minh rằng AK=2.

b) Tính thể tích khối lăng trụ $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Câu 7) Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), AC=AD=4cm; AB=3cm; BC=5cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

Câu 8) Cho hình chóp tam giác đều SABC đỉnh S, độ dài cạnh đáy bằng a. GỌi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Câu 9) Cho hình chóp SABC có SA=3a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC có AB=BC=2a, góc ABC=120^0. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).
Câu 10) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).
Câu 11) Cho hình chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA=2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC

a) Tính khoảng cách t ừ A đến mặt phẳng (SBC)
b) Tính thể tích của khối chóp ABCMN.

Câu 12) Hình chóp tam giác SABC có các cạnh bên SA=SB=SC=a, góc ASB=120^0, góc BSC=60^0, góc ASC=90^0. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông và tính thể tích hình chóp SABC theo a.
Câu 13) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2a. Góc giữa các mặt bên và mặt đáy là α.

a) Tính thể tích khối chóp theo a và α
b) Xác định α để thể tích khối chóp nhỏ nhất.

Câu 14) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD= $a\sqrt{2}$, SA=a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).
b) Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Câu 15) Cho lăng trụ đứng ABCA’B’C’ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB=a, AA’=2a, A’C=3a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A’C’, I là giao điểm của AM và A’C

a) Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC
b) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC)

Câu 16) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB=AD=2a, CD=a, góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết 2 mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp SABCD theo a.
Câu 17) Cho hình lăng trụ tam giác ABCA’B’C’ có BB’=a, góc tạo bởi BB’ và mặt phẳng (ABC) là 60^0, tam giác ABC vuông tại C và góc BAC=60^0. Hình chiếu vuông góc của điểm B’ lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A’ABC theo a.
Câu 18) Trong không gian cho hình chóp tam giác đều SABC có $SC = a\sqrt{7}$. Góc tạo bởi (ABC) và (SAB) =60^0. Tính thể tích khối chóp SABC theo a.
Câu 19) Trong không gian cho hình chóp SABCD với ABCD là hình thoi cạnh a, góc ABC=60^0, SO vuông góc với đáy (O là tâm mặt đáy), $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. M là trung điểm của AD. (P) là mặt phẳng qua BM và song song với SA, cắt SC tại K. Tính thể tích khối chóp KABCD.
Câu 20) Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Câu 21) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật, $AD = a\sqrt{2}, CD = 2a.$ Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = 3\sqrt{2}a.$ Gọi K là trung điểm AB.

a) Chứng minh rằng (SAC) vuông góc với (SDK)
b) Tính thể tích khối chóp CSDK theo a; tính khoảng cách từ K đến (SDC).

Câu 22) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy, góc ASC=90^0, SA tạo với đáy 1 góc 60^0. Tính thể tích khối chóp.

Câu 23) Cho lăng trụ ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo 1 thiết diện có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối lăng trụ

Câu 24) Cho hình chóp SABC có AB=AC=a; $BC = \frac{a}{2}; SA = a\sqrt{3}$; góc SAB bằng góc SAC và bằng 30^0. Tính thể tích của khối chóp theo a.

Câu 25) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC và khoảng cách từ G đến mặt bên (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm của mặt đáy đến mặt bên (SCD)
b) Tính thể tích của khối chopSABCD.

Câu 26) Cho hình chóp SABC có đường cao AB=BC=a; AD=2a. Đáy là tam giác vuông cân tại B. Gọi B' là trung điểm của SB, C' là chân đường cao hạ từ A xuống SC.Tính thể tích khối chóp SAB'C'.

Câu 27) Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB=BC=a, cạnh bên AA'=$a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC

a) Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABCA'B'C'
b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM và B'C.

Câu 28) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a; SA=a; SB=$a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC. Tính thể tích khối chóp SBMDN và góc giữa (SM;ND).

Câu 29) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang, góc BAD bằng góc ABC và bằng 90^0; AB=BC=a; AD=2a. SA vuông góc với đáy và SA=2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA; SD. Tính thể tích khối chóp SABCD và khối chóp SBCMN.

Câu 30) Cho lăng trụ ABCA'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB=a; AC=$a\sqrt{3}.$ và hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'ABC và cosin của góc giữa 2 đường thẳng AA' và B'C'.

Câu 31) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Câu 32) Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có AB=a; AC=2a; $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và góc BAC=120^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh rằng $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (A_1MB)

Câu 33) Cho hình chóp SABC có góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0 . Các tam giác ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

Câu 34) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy. Cho AB=a; SA= $a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB; SC. Chứng minh SC $\perp$ (AHK) và tính thể tích khối chóp OAHK.
Câu 35) Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB=2R và điểm C thuộc nửa vòng (SAB;SBC)= 60^0. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Chứng minh tam giác AHK vuông và tính V_{SABC}
Câu 36) Lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông AB=AC=a; $AA_1= a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA_1 và BC_1. Chứng minh rằng MN là đoạn vuông góc chung của AA_1 và BC_1. Tính thể tích khối chóp MA_1BC_1
Câu 37) Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a. M là trung điểm của đoạn AA_1. Chứng minh BM $\perp$ B_1C và tính $d_{(BM;B_1C)}$
Câu 38) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính khoảng cách giữa MN và AC theo a.
Câu 39) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang, góc ABC= góc BAD= 90^0; AD=2a; BA=BC=a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA= $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

a) Chứng minh rằng tam giác SCD vuông
b) Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD)

Câu 40) Cho hình chóp SABC mà mỗi mặt bên là 1 tam giác vuông. SA=SB=BS=a. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. D là điểm đối xứng của S qua E, I là giao điểm của AD và (SMN)

a) Chứng minh rằng AD vuông góc với SI
b) Tính theo a thể tích khối tứ diện MBSI

Câu 41) Cho hình hộp đứng ABCDA’B’C’D’ có các cạnh AB=AD=a; AA’= $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc BAD= 60^0. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của A’D’ và A’B’. Chứng minh AC’ vuông góc với mặt phẳng (BDMN) và tính thể tích khối chóp ABDMN.
Câu 42) Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD=2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Trên cạnh SA lấy M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp SBCNM.
Câu 43) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. Góc BAD= 60^0. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA=a. Gọi C’ là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) đi qua AC’ và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B’, D’. Tính thể tích của khối chóp SAB’C’D’.
Câu 44) Cho lăng trụ ABCA’B’C’ có A’ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy AB=a, cạnh bên AA’=b. Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (A’BC). Tính $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp A’BB’CC’.
Câu 45) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy =a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt phẳng (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp SABCD.

Câu 46) Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh =a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho: $CK = \frac{2a}{3}$. Mặt phẳng α đi qua A, K và song song với BD chia khối lập phương thành 2 khối đa diện. Tính thể tích của 2 khối đa diện đó.
Câu 47) Cho 1 hình trụ tròn xoay và hình vuông ABCD cạnh a có 2 đỉnh liên tiếp A; B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất, 2 đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ 2 của hình trụ. Mặt phẳng (ABCD)tạo với đáy hình trụ góc 45^0. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.
Câu 48) Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, SA và SB là 2 đường sinh. Biết SO=3a, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng a, diện tích tam giác SAB=$18a^2$. Tính thể tích và diện tích xung quanh.
Câu 49) Cho hình trụ có 2 đáy là 2 hình tròn tâm O và O'. Bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấyđiểm B sao cho AB=2a.

a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ
b) Tính thể tích tứ diện OO'AB.

Câu 50) Cho hình chóp cụt tam giác đều ngoại tiếp 1 hình cầu bán kính r cho trước. Tính thể tích khối chóp cụt biết rằng cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh nhỏ. (Hình chóp ngoại tiếp hình cầu nếu hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp).
Câu 51) Cho hình chóp tam giác đều SABC có độ dài cạnh bên bằng a. Các mặt bên hợp với mặt phẳng đáy một góc α. Tính thể tích khối cầu nội tiếp hình chóp.
Câu 52) Cho hình chóp SABCD. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Đáy ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD biết SA=h.
Câu 53) Hình cầu đường kính AB=2R. Lấy H trên AB sao cho AH=x ($0<x<2R$). Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H cắt mặt cầu theo giao tuyến là hình tròn (C), MNPQ là hình vuông nội tiếp trong hình tròn giao tuyến (C).

a) Tính bán kính đường tròn giao tuyến. Tính độ dài MN, AC.
b) Tính thể tích khối đa diện tạo bởi 2 hình chóp AMNPQ và BMNPQ.

Câu 54) Cho tứ diện ABCD có AB=BC=AC=BD=a; AD=b. Hai mp(ACD) và (BCD) vuông góc với nhau.

a) Chứng minh tam giác ACD vuông.
b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Câu 55) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy bằng a, tâm đáy là O, chiều cao SH=$\frac{a}{2}$

a) CMR tồn tại mặt cầu O tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp. Tính bán kính của mặt cầu
b) (P) là mặt phẳng song song với (ABCD) và cách (ABCD) một khoảng x($0<x<R$). S_{td} là diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp (bỏ đi phần diện tích nằm trong mặt cầu) Xác định x để $S_{td}=\pi R^2$

Câu 56) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy và chiều cao cùng bằng a. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC.

a) Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SEBK
b) Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp SEBK.

Câu 57) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD, cạnh đáy có độ dài bằng a, cạnh bên tạo với cạnh đáy 1 góc 30^0. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

ĐÁP SỐ:

Câu 1) ĐS: $\frac{1}{2}$

Câu 2) $a)\frac{a^3\sqrt{2}}{6};b)\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Câu 3) $\frac{16a^3}{45}$ S

Câu 4) $8\sqrt{3}$

Câu 5) $V=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Câu 6) $b)V=20\sqrt{5};V=10\sqrt{5}$

Câu 7) $\frac{60\sqrt{34}}{17}(cm)$

Câu 8) $S=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}(dvdt)$

Câu 10) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 11) $a)\frac{2\sqrt{57}a}{19};b)\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$

Câu 12) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 13) $\frac{4a^3}{3\cos\alpha.\sin^2\alpha};\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 14) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$

Câu 15) $V=\frac{4a^3}{9};d=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 16) $V=\frac{3\sqrt{15}}{5}a^3$

Câu 17) $V=\frac{9a^3}{208}$

Câu 33) $d=\frac{3\sqrt{13}a}{13}$

Câu 34) $V=\frac{2a^3}{27}$

Câu 35) $V=\frac{R^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 36) $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 37) $d=\frac{a\sqrt{10}}{30}$

Câu 38) $d=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 39) $h=\frac{a}{3}$

Câu 40) $V=\frac{a^3}{36}$

Câu 18) V=3a^3

Câu 19) $V=\frac{a^3}{6}$

Câu 20) $AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 21) $V=2a^3;h=\frac{3\sqrt{5}a}{10}$

Câu 22) $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Câu 23) $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 24) $V=\frac{a^3}{16}$

Câu 25) $a)\frac{a\sqrt{3}}{4};b)\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 26) $c)\frac{a^3}{36}$

Câu 44 $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{3b^2-a^2}}{a};V_{A'BB'CC'}=\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{6}$

Câu 45) $V=\frac{2}{3}.\frac{a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$

Câu 46) $V_1=\frac{a^3}{3};V_2=\frac{2a^3}{3}$

Câu 47) $V=\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{16}(dvtt);S_{xq}=\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{2}$

Câu 49) $S_{TP}=4\pi a^2;V=\pi a^3;V_{OOAB}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}(dvtt)$

Câu 50) $V=7\sqrt{3}r^2$

Câu 30) $V=\frac{a^3}{2};\cos\alpha=\frac{1}{4}$

Câu 31) $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$

Câu 32) $d=\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Câu 27) $a)\frac{a^3\sqrt{2}}{2};b)\frac{a\sqrt{7}}{7}$

Câu 28) $V=\frac{a\sqrt{3}a^3}{3};\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 29) $a)a^3;b)\frac{a^3}{3}$

Câu 30) $V=\frac{a^3}{2};\cos\alpha=\frac{1}{4}$

Câu 41) $V=\frac{3a^3}{16}$

Câu 42) $V=\frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$

Câu 43) $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$

BÀI TẬP VỀ MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI CHÓP

Câu 1) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của S trùng với trọng tâm tam giác ABD. Mặt bên (SAB) tạo với đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích của khối chóp SABCD và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABD.

Câu 2) Cho lăng trụ tam giác đều ABCA'B'C' có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N , I lần lượt là trung điểm của AA', AB và BC. Biết góc tạo bởi (C'AI) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp NAC'I và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp C'AIB

Câu 3) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B $AB=BC=a;AD=2a$ .Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABCD) và SA=a. Gọi E là trung điểm của AD.Tính thể tích khối chóp SCDE và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp đó.

Câu 4) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a và đường cao là SH với H thỏa mãn $\overrightarrow{HN}=-3\overrightarrow{HM}$, trong đó M, N là trung điểm AB, CD. Mặt phẳng (SAB) tạo với đáy ABCD góc 60^0. Tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAC) và xác định thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD

Câu 5) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh $AB=a;AD=a\sqrt{2}$ góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và ABCD bằng 60^0. Gọi H là trung điểm của AB. Biết mặt bên SAB là tam giác cân tại đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp SABCD và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp SAHC

Câu 6) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B có $AB=BC=a;AD=2a$, SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, SB tạo với (SAC) góc 60^0. Gọi O là giao điểm AC và BD. Giả sử mặt phẳng (P) qua O song song với SC cắt SA ở M. Tính thể tích khối chóp MBCD và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp SACD

Câu 7) Cho tứ diện ABCD có AB=2a; $AB\perp(BCD);CB=CD=a;B\hat{C}D=120^0$. Gọi M là trung điểm của AB.Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACD) và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

Câu 8) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của BC, lấy điểm D đối xứng với A qua M. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M lên SA.Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC). Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp NBCD

Câu 9) Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều cạnh a, $DA = DB = \frac{a}{\sqrt{3}}$, CD vuông góc với AD.Trên cạnh CD kéo dài lấy điểm E sao cho $A\hat{E}B = 90^0$.Tính góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (ABD).Xác định tâm và tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối tứ diện ABCE.

Câu 10) Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a. Mặt bên (SAB) vuông góc với đáy (ABCD). Biết $SB = a\sqrt{3}; SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD, O là giao điểm AC và DB. Tính theo a thể tích khối chóp SAMBN và xác định tâm bán kính mặi cầu ngoại tiếp khối chóp SAMON

Câu 11) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Lấy điểm H trên đoạn AC với AH=a/2. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại H lấy điểm S sao cho góc ASC=45^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD

Câu 12) Cho tứ diện ABCD có AB=AC=a, BC=b. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông gócvới nhau và góc BDC=90^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b

Câu 13) Cho hình chóp SABC, biết SA=SB=SC=a. $A\hat{S}B = 60^0; B\hat{S}C = 90^0; C\hat{S}A = 120^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp SABC.

Câu 14) Cho tam giác ABC vuông cân tại B với AB=a. Từ trung điểm M của AB ta dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC), trên đó lấy điểm S sao cho SAB là tam giác đều. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC.

Câu 15) Cho tam giác vuông cân ABC với AB=AC=a. BB’ và CC’ là hai đoạn thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và ở cùng một phía so với (ABC), BB’=CC’=a. Tính thể tích khối chóp ABCC’B’ và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp ABCC’B’.

Câu 16) Cho lăng trụ tam giác đều ABCA’B’C’ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA’, AB, BC biết mặt phẳng (MNP) tạo với đáy ABC góc 60^0. Tính thể tích khối chóp MNPC’ và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp ABPC’

Một số bài tập tự luyện

1) Cho lăng trụ đứng ABCA’B’C’ đáy là tam giác cân có BC=AB=a, góc $B\hat{A}C = \alpha$. Mặt phẳng (BA’C’) tạo với đáy lăng trụ một góc $\beta = \dfrac{\pi}{6}$.

Tính thể tích lăng trụ theo a, α

Tính diện tích BA’C’ và tính khoảng cách từ đỉnh B’ đến mặt phẳng (BA’C’).

2) Cho lăng trụ đứng ABCA’B’C’ đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (ABC’) tạo với mặt bên (BCC’B’) một góc α. Gọi I, J là hình chiếu của A lên BC và BC’.

Chứng minh $A\hat{I}J = \alpha$

Tính theo a thể tích khối lăng trụ.

3) Cho lăng trụ đứng ABCA’B’C” đáy là tam giác đều. Tam giác ABC’ có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và tạo với đáy một góc α thay đổi $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Tìm α để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

4) Cho khối lăng trụ ABCA’B’C’ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, CA=CB=a. Mặt phẳng (AA’B) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AA' = a\sqrt{3}, A'\hat{A}B$ nhọn. Góc của mặt phẳng (A’AC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

5) Cho lăng trụ xiên ABCA’B’C’ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A’ lên mặt phẳng (ABC) trùng với O là tâm đường tròn (ABC). Biết $B\hat{A}A' = \dfrac{\pi}{4}$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ theo a.

6) Cho lăng trụ xiên ABCA’B’C’ có đáy tam giác ABC vuông tại A với AB=a, BC=2a. Mặt bên ABB’A’ là hình thoi, mặt bên BCC’B’ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, 2 mặt này tạo nhau 1 góc α.

Xác định góc α

Tính theo a và α thể tích hình lăng trụ.

7) Cho hình hộp xiên ABCDA’B’C’D’ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. $B\hat{A}D = 60^0$, AA’=A’B=AD và cạnh bên tạo với đáy góc α.

Xác định góc α và chân đường cao vẽ từ A’

Tính thể tích V của hình hộp theo a và α.

8) Cho ABCDA’B’C’D’ hình lập phương cạnh a. Lấy M trên cạnh AB với AM=x (0<x<a). Gọi (P) là mặt phẳng qua M và A’C’.

Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình lập phương

Tìm x để mặt phẳng (P) chia hình lập phương thành 2 khối đa diện mà thể tích khối này bằng 2 lần thể tích khối đa diện kia.

9) Trên các cạnh SA,SB của tứ diện SABC lấy các điểm M,N sao cho $\dfrac{SM}{MA} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{SN}{NB} = 2$. Một mặt phẳng ($\alpha$)đi qua MN và song song với SC chia tứ diện thành 2 phần . Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

10) Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông A,BC = a ,SA = SB = SC = 2a và $A\hat{B}C = \alpha$. Gọi H là hình chiếu của S trên BC.

Tính thể tích khối chóp SABC theo a và

Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAH).

Cho (P) là mặt phẳng qua A , trọng tâm tam giác SBC và song song với BC chia khối chóp SABC thành 2 phần. Tính thể tích mỗi phần

11) Cho khối chóp DABC có mặt (DBC) vuông góc với đáy , các mặt bên (DAB) và (DAC) cùng hợp với đáy góc $\alpha(\alpha \prec 90^0)$. Tính thể tích của khối chóp trong các trường hợp sau

a) ABC là tam giác vuông tại A có AB = a , AC = 2a ;

b) ABC là tam giác đều có cạnh bằng a.

12) Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2a. Góc giữa các mặt bên và mặt đáy là α.

Tính thể tích khối chóp theo a và α

Xác định α để thể tích khối chóp nhỏ nhất.

13) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M, N là trung điểm của AB, AD, H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với (ABCD) và $SH = \sqrt{3}$.

Tính thể tích khối chóp SCDNM và khoảng cách giữa DM và SC theo a (A 2010)

14) Cho lăng trụ tam giác đều ABCA'B'C' có AB=a góc tạo bới (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ và tìm tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp GABC theo a. (B 2010)

15) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. SA=a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD) là điểm H thuộc AC sao cho $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích SMBC theo a. (D 2010)

16) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, hai đáy là AD = 2a , BC = a. Biết AB = a , SA = a và SA $\perp$ (ABCD).

Tính thể tích của khốichóp SACD.

Tính thể tích của khối chóp SBCD và khoảng cách d(B; (SCD))

17) Cho khối chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông A,BC = a ,SA = SB = SC = 2a và $A\widehat{B}C = \alpha$. Gọi H là hình chiếu của S trên BC.

18)Tính thể tích khối chóp SABC theo a và

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAH).

b) Cho (P) là mặt phẳng qua A , trọng tâm tam giác SBC và song song với BC chia khối chóp SABC thành 2 phần. Tính thể tích mỗi phần

19) Cho khối chóp DABC có mặt (DBC) vuông góc với đáy , các mặt bên (DAB) và (DAC) cùng hợp với đáy góc $\alpha(\alpha \prec 90^0)$. Tính thể tích của khối chóp trong các trường hợp sau

a) ABC là tam giác vuông tại A có AB = a , AC = 2a ;

b) ABC là tam giác đều có cạnh bằng a

20) Cho lăng trụ tam giác đều ABCA'B'C' có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N , I lần lượt là trung điểm của AA', AB và BC. Biết góc tạo bởi (C'AI) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp NAC'I và khoảng cách giữa hai đường thẳng MN, AC'

21) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh $\sqrt{5}a$, $AC = 4a$ $SO = 2\sqrt{2}a$ và SO vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC. Tính thể tích khối chóp SMDB và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

22) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O biết $AB = a; BC = a\sqrt{3}$, Tam giác SAO cân tại S, mặt bên SAD vuông góc với đáy ABCD. Biết SD hợp với đáy ABCD một góc 60^0.Tính thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa SB và AC

23) Hình chóp SABC có ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a, SA = 2a$ và SA vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm AC.Tính khoảng cách giữa
a) AB và SM
b) BC và SM
24) Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B với $BC = a, SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy ABC. Gọi M, N là trung điểm của AC và SB. Tính khoảng cách giữa
a) AC và SB
b) MN và BC
c) Từ M đến (SBC)
25) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Tam giác SAB đều và vuông góc với đáy. Gọi M, N, P là trung điểm của SB, BC, SD. Tính khoảng cách giữa AP và MN.
26) Cho hình chóp SABCD có SAB là tam giác đều (SAB) vuông góc với đáy (ABCD). ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Gọi H, M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA, SD.Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau:
a) BN và DM b) HD và CP c) DM và CP
27) Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B biết $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$, SA vuông góc với (ABCD), góc tạo bởi (SCD) và (ABCD) bằng 45^0.Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, SD. Tính khoảng cách giữa
a) BD và CP b) DN và CP c) SC và DN
28) Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB=a, AD= $a\sqrt{2}$, SA=a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC, I là giao điểm của BM và AC. Tính khoảng cách giữa
a) BM và SC b) SI và ND c) SN và AC
29) Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc với (ABCD), SA=a, ABCD là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng
a) BN và SC b) SN và MC c) SN và AC
30) Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a$, Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc đoạn thẳng AB, AD sao cho $AM = MB; DN = 3AN$,Biết SMC là tam giác cân tại S và SM vuông góc với MN. Tính thể tích khối chóp SAMDN và khoảng cách giữa SA với CM