Quan hệ vuông góc trong không gian

Mục lục

A.Tóm tắt lý thuyết

1. Các khái niệm cơ bản

- **Góc giữa hai đường thẳng, hai đường thẳng vuông góc**

  +) Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với Δ_1 và Δ_2.

  +) Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

- **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

  +) Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

  +) Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng 90°. Trong trường hợp đường thẳng Δ không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng Δ với hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P).

- **Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc**

  +) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

  +) Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

2. Các định lý quan trọng

- Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

- ***Định lý ba đường vuông góc.*** Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a lên (P).

- Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

B. Các dạng toán quan trọng

Dạng 1. Hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

❖ Phương pháp giải toán

- ***Để giải chứng minh hai đường thẳng vuông góc , ta có các cách làm như sau:***

+) Phương pháp 1. Chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng kia:

$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$

+) Phương pháp 2 (Sử dụng định lý ba đường vuông góc). Giả sử đường thẳng a' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng a lên (P), b là một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó

$$a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'.$$

+) Phương pháp 3(Sử dụng mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc).

$$\begin{cases} b' \parallel b \\ a \perp b' \end{cases} \Rightarrow a \perp b.$$

- ***Để chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng, ta có thể làm như sau:***

+) Phương pháp 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng.

$$\begin{cases} a \perp b \\ a \perp c \\ b \text{ va } c \text{ cat nhau} \\ b \subset (P) \\ c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$

+) Phương pháp 2: (Sử dụng mối liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc):

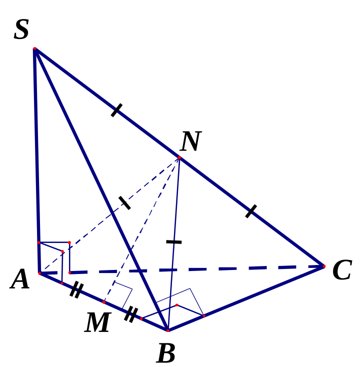
$$\begin{cases} a \perp (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P),$$

$$\begin{cases} a \parallel a' \\ a' \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P).$$

❖ Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Biết đáy ABC là tam giác vuông tại B. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC. Chứng minh $MN \perp AB$.

Giải



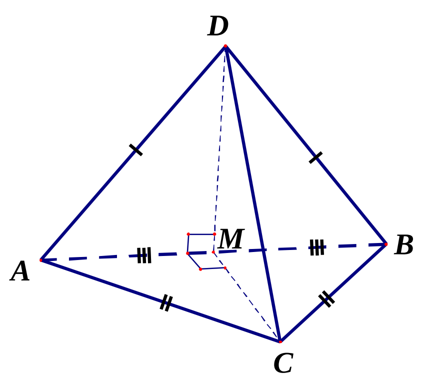
* $SA \perp (ABC)$, $BC \subset (ABC)$ $\Rightarrow$ $BC \perp SA$ (1). Mặt khác theo giả thiết: $BC \perp AB$ (2). Từ (1), (2) suy ra: $BC \perp (SAB)$ $\Rightarrow$ $BC \perp SB$, nói cách khác ΔSBC vuông tại B $\Rightarrow NB = \frac{1}{2}SC$ (3) (trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

* $SA \perp (ABC)$, $AC \subset (ABC)$ $\Rightarrow$ $AC \perp SA$, nói cách khác ΔSAC vuông tại A $\Rightarrow NA = \frac{1}{2}SC$ (4) (trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

* Từ (3), (4) suy ra $NA = NB$ $\Rightarrow$ ΔNAB cân tại N nên trung tuyến MN đồng thời là đường cao $\Rightarrow$ $MN \perp AB$ (ĐPCM).

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có mặt ABC là tam giác cân tại C, ABD là tam giác cân tại D. Chứng minh $AB \perp CD$.

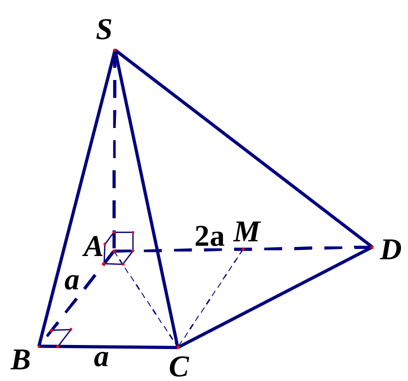
Giải



Gọi M là trung điểm của AB. ΔDAB cân tại D nên trung tuyến DM đồng thời là đường cao $\Rightarrow AB \perp MD$ (1). Tương tự như thế, ta cũng chứng minh được $AB \perp MC$ (2). Từ (1), (2) suy ra $AB \perp (DMC)$, lại có $DC \subset (DMC)$. Từ đó suy ra $AB \perp CD$ (ĐPCM).

Ví dụ 3. [ĐHD07] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông ($AD//BC$), $BA = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy. Chứng minh SCD là tam giác vuông.

Giải

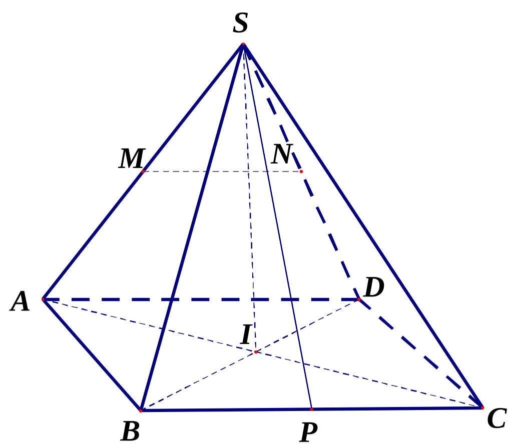


Ta thấy AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$. Lại có $CD \subset (ABCD)$ nên: $CD \perp SC \Leftrightarrow CD \perp AC$ (Định lý ba đường vuông góc).

Lấy M là trung điểm của AD. Dễ thấy tứ giác $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM = AB = a = \frac{AD}{2} \Rightarrow \Delta ACM$ vuông tại C, nói cách khác: $CD \perp AC$ (ĐPCM).

Ví dụ 4. [CĐABD09] Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD, BC. Chứng minh $MN \perp SP$.

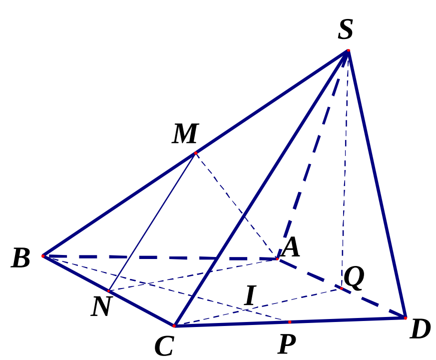
Giải



Ta có $MN//AD//BC \Rightarrow MN//BC$ (1). Mặt khác: ΔABC cân tại S nên trung tuyến SP đồng thời là đường cao $\Rightarrow SP \perp BC$ (2). Từ (1), (2) suy ra $SP \perp MN$ (ĐPCM).

Ví dụ 5. [ĐHA07] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Mặt bên SAD là tam giác cân tại S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SB, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

Giải



Lấy N, Q lần lượt là trung điểm của BC, AD.

* Ta có: MN là đường trung bình của ΔBSC $\Rightarrow$ $MN//SC$ (1). Hơn nữa: tứ giác $ANCQ$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $AN//CQ$ (2). Từ (1), (2) suy ra $(AMN)//(CQS)$ (3).

* SQ là trung tuyến của tam giác cân SAD $\Rightarrow$ $SQ \perp AD$. Mặt khác: AD là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc (SAD) và $(ABCD)$ nên $SQ \perp (ABCD)$. Lại có $BP \subset (ABCD)$. Từ đó suy ra $BP \perp SQ$ (4).

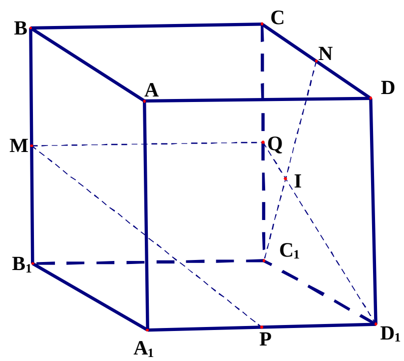
$\Delta BCP = \Delta CDQ$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{CBP} = \widehat{DCQ}$. Đặt $I = BP \cap CQ$. Ta có $\widehat{CIP} = 180^\circ - \left(\widehat{DCQ} + \widehat{BPC}\right) = 180^\circ - \left(\widehat{CBP} + \widehat{BPC}\right) = \widehat{BCP} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $BP \perp CQ$ (5).

Từ (4), (5) suy ra: $BP \perp (CQS)$ (6).

* Từ (3), (6) suy ra: $BP \perp (AMN)$, hơn nữa $MA \subset (AMN)$ $\Rightarrow$ $PB \perp MA$ (ĐPCM).

Ví dụ 6. [ĐHD02] Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1. Chứng minh $MP \perp C_1N$.

Giải



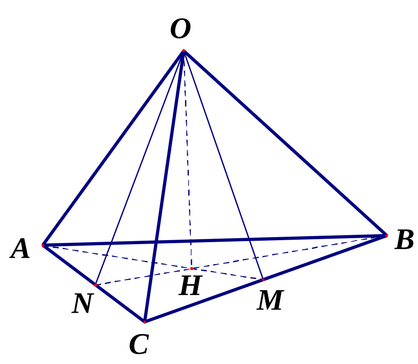
* Ta thấy $PD_1 \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow D_1$ là hình chiếu vuông góc của P lên (CDD_1C_1) (1). Gọi Q là trung điểm của CC_1 $\Rightarrow MQ \perp (CDD_1C_1)$. Do đó: Q là hình chiếu vuông góc của M lên CC_1 (2). Từ (1), (2) suy ra QD_1 là hình chiếu vuông góc của MP lên (CDD_1C_1) (3).

* Lại có $\Delta NCC_1 = \Delta QC_1D_1$ (c.g.c) $\widehat{CC_1N} = \widehat{C_1D_1Q}$. Đặt $I = NC_1 \cap QD_1$. Ta có $\widehat{QIC_1} = 180^\circ - \left(\widehat{CC_1N} + \widehat{D_1QC_1}\right) = 180^\circ - \left(\widehat{C_1D_1Q} + \widehat{D_1QC_1}\right) = \widehat{QC_1D_1} = 90^\circ \Rightarrow C_1N \perp QD_1$ (4).

* Từ (3), (4) suy ra $C_1N \perp MP$ (ĐPCM).

Ví dụ 7. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Chứng minh rằng H là trực tâm ΔABC khi và chỉ khi $OH \perp (ABC)$.

Giải



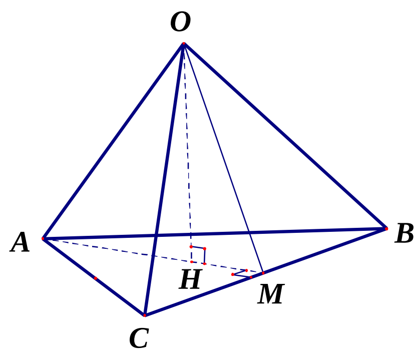
Đặt $M = AH \cap BC$, $N = BH \cap CA$.

* ***Phần thuận:*** giả sử H là trực tâm ΔABC. Từ giả thiết của phần thuận suy ra $BC \perp AM$ (1). Từ giả thiết của bài toán: $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ $\Rightarrow OA \perp mp(OBC)$, lại có $BC \subset mp(OBC)$, từ đây suy ra $BC \perp OA$ (2). Từ (1), (2) suy ra $BC \perp mp(OAM)$, lại có $OH \subset mp(OAM)$, từ đây suy ra $OH \perp BC$ (3). Một cách tương tự, ta cũng có $OH \perp CA$ (4). Từ (3), (4) suy ra $OH \perp mp(ABC)$.

* ***Phần đảo:*** giả sử $OH \perp mp(ABC)$ (5). Gọi H' là trực tâm của ΔABC. Từ chứng minh phần thuận ta có $OH' \perp mp(ABC)$ (6). Từ (5), (6) suy ra $H \equiv H'$ hay H là trực tâm của ΔABC.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$, gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Chứng minh H là trực tâm của ΔABC khi và chỉ khi $OC \perp (OAB)$.

Giải



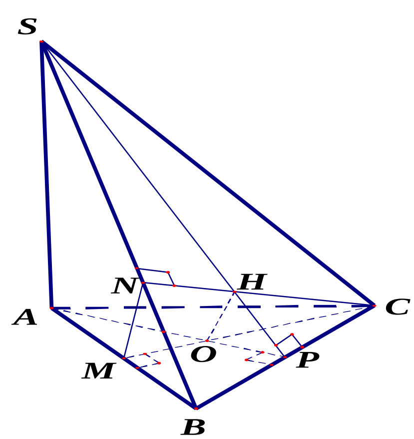
Đặt $M = AH \cap BC$.

* ***Phần thuận:*** giả thiết thì H là trực tâm ΔABC. Từ giả thiết này, ta có $BC \perp AM$ (1). Từ $OH \perp mp(ABC)$, $BC \subset mp(ABC)$ suy ra $BC \perp OH$ (2). Từ (1), (2) suy ra $BC \perp mp(OAM)$, mà $OA \subset mp(OAM)$. Từ đó suy ra $OA \perp BC$ (3). Theo giả thiết thì $OA \perp OB$ (4). Từ (3), (4) suy ra $OA \perp mp(OBC)$, lại có $OC \subset mp(OBC)$. Từ đây suy ra $OA \perp OC$ (5). Một cách tương tự, ta cũng chỉ ra được $OA \perp OB$ (6). Từ (5), (6) suy ra $OA \perp mp(OBC)$.

* ***Phần đảo:*** giải thiết $OA \perp (OBC)$. Theo bài 3 thì H là trực tâm ΔABC.

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, O là trực tâm của ΔABC, $SA \perp mp(ABC)$, $H \in mp(SBC)$. Chứng minh H là trực tâm ΔSBC khi và chỉ khi $OH \perp mp(SBC)$.

Giải



* ***Phần thuận:*** giả thiết thì H là trực tâm ΔSBC. Đặt $M = CO \cap AB$, $N = CH \cap SB$. Từ giả thiết suy ra: $CN \perp SB$, $CM \perp AB$. Gọi P là trung điểm của BC. Vì ΔABC đều, ΔSBC cân tại S nên SH và AO đều đi qua P. Vì AP và SP lần lượt là SP là các đường cao của các tam giác ABC và SBC nên AP và SP đều vuông góc với BC. Từ đó suy ra $BC \perp mp(SAP)$. Lại có: $OH \subset mp(SAP)$. Từ đó suy ra $OH \perp BC$ (1). AB là hình chiếu của SB lên $mp(ABC)$. Lại có: $MC \subset mp(ABC)$, $MC \perp AB$. Từ đó suy ra: $MC \perp SB$ hay

$SB \perp MC$ (2). Lại có: $SB \perp NC$ (3). Từ (2), (3) suy ra: $SB \perp mp(CMN) \Rightarrow OH \perp SB$ (4).

Từ (3), (4) suy ra $OH \perp mp(SBC)$.

* ***Phần đảo:*** giải thiết $OH \perp mp(SBC)$. Gọi H' là trực tâm ΔSBC. Từ phần thuận suy ra $OH' \perp mp(SBC)$. Từ đó suy ra $H' \equiv H$. Vậy H là trực tâm ΔABC.

❖ Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Chứng minh $SA \perp BC$.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a ($a > 0$). Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = 8a$, $CD = 6a$, $MN = 5a$ ($a > 0$). Chứng minh $AB \perp CD$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Gọi H và M lần lượt là trung điểm của SB và SD. Chứng minh $OM \perp (AHD)$.

Bài 5. [ĐHB12] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH).

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và DBC là hai tam giác cân chung đáy BC. Gọi I là trung điểm BC.

1) Chứng minh $BC \perp AD$.

2) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy là tam giác vuông tại B.

1) Chứng minh $BC \perp SB$

2) Từ A lần lượt kẻ hai đường cao AH, AK của các tam giác SAB và SAC. Chứng minh $AH \perp (SBC)$ và $SC \perp (AHK)$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh

1) $SO \perp (ABCD)$.

2) $AC \perp SD$.

Bài 9. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Gọi H là trực tâm BCD. Chứng minh

1) $AH \perp (BCD)$.

2) $AD \perp BC$.

Bài 10. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông với đáy, tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh:

1) $BC \perp (SAM)$.

2) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống SM. Chứng minh $AH \perp SB$.

Bài 11. Cho hình chóp $O.ABC$ có cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Kí hiệu K, M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Gọi E là điểm đối xứng của O qua K và I là giao điểm của CE với mặt phẳng (OMN).

1) Chứng minh rằng CE vuông góc với mặt phẳng (OMN).

2) Tính diện tích của tứ giác $OMIN$ theo a.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1) Tính các cạnh của tam giác SIJ theo a. Chứng minh rằng SI vuông góc với mặt phẳng (SCD) và SJ vuông góc với mặt phẳng (SAB).

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh rằng SH vuông góc với AC.

Dạng 2. Hai mặt phẳng vuông góc

❖ Phương pháp giải toán

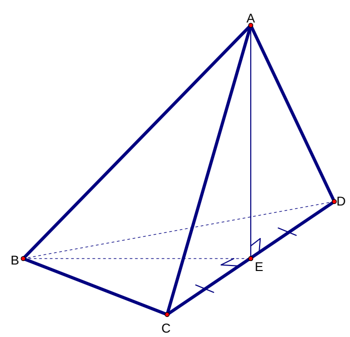
Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta thường sử dụng các phương pháp sau đây:

- ***Sử dụng định nghĩa:*** chứng minh một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.
- ***Sử dụng góc giữa hai mặt phẳng:*** chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90°.

❖ Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có mặt ACD và BCD là các tam giác đều cạnh a. Biết $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, chứng minh $(ACD) \perp (BCD)$.

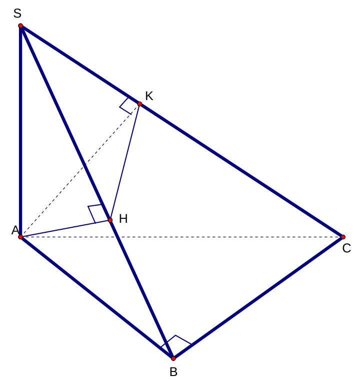
Giải



Lấy E là trung điểm của CD. AE là trung tuyến của tam giác cân ACD nên đồng thời là đường cao, do đó: $CD \perp AE$ (1). Tương tự, ta cũng chứng minh được $CD \perp BE$ (2). Từ (1), (2) suy ra: góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) chính là góc $\widehat{AEB}$. Ta thấy $AE^2 + BE^2 = 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2$. $\Rightarrow$ ΔAEB vuông tại E $\Rightarrow$ $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (ĐPCM).

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Chứng minh $(SAC) \perp (AHK)$.

Giải



* Theo giả thiết thì $SC \perp AK$ (1).

* Ta chứng minh $SC \perp HK$:

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $\begin{cases} SH.SB = SA^2 \\ SK.SC = SA^2 \end{cases} \Rightarrow SH.SB = SK.SC$. Từ đây suy ra $HKBC$ là tứ giác nội tiếp (2).

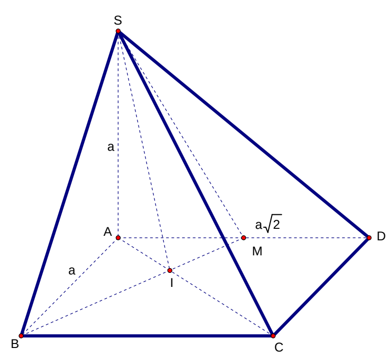
Lại có: $CB \perp AB$ (giả thiết), $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$) $\Rightarrow SB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp SB$ (3).

Từ (2), (3) suy ra $SC \perp HK$ (4).

Từ (3), (4) suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SAC) \perp (AHK)$ (ĐPCM).

Ví dụ 3. [ĐHB06] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AD. Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Giải



Đặt $I = AC \cap BD$. Áp dụng định lý Pitago, tính được: $AC = a\sqrt{3}$, $BM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vì hai tam giác IAM và ICB đồng dạng nên

$$\frac{IA}{AM} = \frac{IC}{BC} = \frac{IA + IC}{AM + BC} = \frac{AC}{AM + BC}$$

$$\Rightarrow IA = \frac{AM.AC}{AM + BC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tương tự: $IM = \dfrac{AM.BM}{AM + BC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

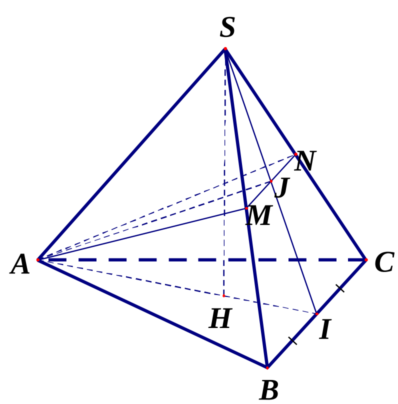
Ta có: $IA^2 + IM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = AM^2 \Rightarrow \Delta IAM$ vuông tại I hay $BM \perp AC$ (1).

Lại có $SA \perp mp(ABCD)$, $BM \subset mp(ABCD) \Rightarrow$ $BM \perp SA$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BM \perp mp(SAC) \Rightarrow$ $mp(SMB) \perp mp(SAC)$ (ĐPCM).

Ví dụ 4. [ĐHA02] Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SB, SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Giải



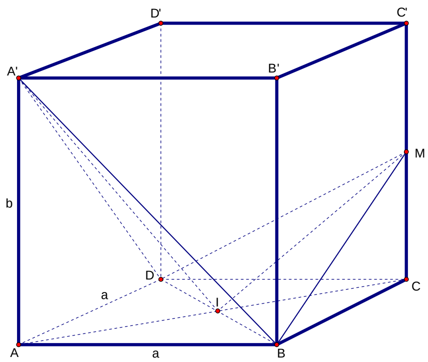
* Lấy I là trung điểm của BC. ΔABC đều $\Rightarrow$ $AI \perp BC$, ΔSBC cân $\Rightarrow$ $SI \perp BC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAI)$ (1). Lại có $MN \parallel BC$ (2). Từ (1), (2) suy ra $MN \perp (SAI)$ $\Rightarrow \begin{cases} MN \perp SI \\ MN \perp AJ \end{cases}$ ($J = SI \cap MN$) $\Rightarrow$ (SI, AJ) chính là góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBC) $\Rightarrow$ $\widehat{AJI} = 90^\circ$.

* Dễ thấy J là trung điểm của SI $\Rightarrow$ ΔSAI cân tại A $\Rightarrow$ $SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Lại có $AH = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)a.\frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$

Ví dụ 5. [ĐHA03] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các đáy là hình vuông cạnh a, $AA' = b$, M là trung điểm của CC'. Xác định tỷ số $\frac{a}{b}$ sao cho $(A'BD) \perp (MBD)$.

Giải



Đặt $I = AC \cap BD$. Ta thấy $\Delta A'BD$ cân tại A nên trung tuyến $A'I$ đồng thời là đường cao. Như vậy $A'I \perp BD$ (1).

Tương tự ta cũng chứng minh được $MI \perp BD$ (2).

Từ (1), (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) chính là góc giữa hai đường thẳng $A'I$ và MI.

Áp dụng định lý Pitago, ta tính được: $A'M^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{4}$, $A'I^2 = \frac{a^2}{2} + b^2$, $MI^2 = A'I^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4}$.

Thành thử $(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \widehat{A'IM} = 90^\circ \Leftrightarrow A'M^2 = A'I^2 + MI^2 \Leftrightarrow$ $2a^2 + \frac{b^2}{4} = \left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$.

❖ Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Các tam giác SAC và tam giác SBD là các tam giác cân tại S. Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

Bài 2. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy.

1) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$.

2) Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh $(SAC) \perp (SBM)$.

Bài 3. Hai tam giác ACD và BCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau . Biết $AC = AD = BC = BD = a$ và $CD = 2x$. Xác định x theo a sao cho $(ABC) \perp (ABD)$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm BC, D là điểm đối xứng của A qua I. Dựng đoạn $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với (ABC). Chứng minh

1) $(SAB) \perp (SAC)$.

2) $(SBC) \perp (SAD)$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

1) Chứng minh $(SBC)\perp(SAC)$.

2) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh $(ABI)\perp(SBC)$.

Bài 6. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính diện tích tam giác AMN theo a biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh $(ACC'A')\perp(A'BD)$.

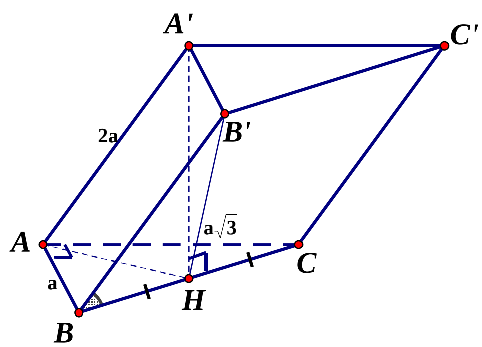
Bài 8. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khi nào $(AA'C'C)\perp(BB'D'D)$.

Dạng 3. Góc

❖ Một số ví dụ

Ví dụ 1. [ĐHA08] Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Giải



Vì $AA' \parallel BB'$ và $B'C' \parallel BC$ nên góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ chính là góc $\widehat{B'BH}$. Xét tam giác $B'BH$, ta có

+) $BB' = AA' = 2a$.

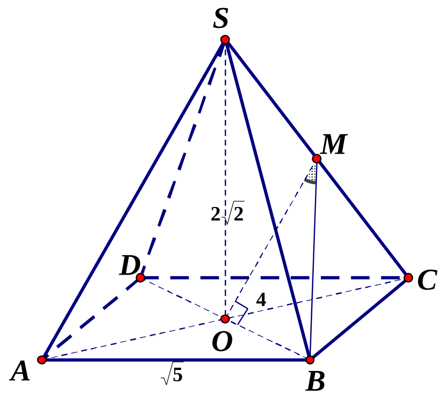
+) $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$.

+) Tam giác $A'AH$ vuông tại H nên $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'B'H$ vuông tại A' nên $B'H = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Do đó $\cos\widehat{B'BH} = \frac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2BB' \cdot BH} = \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2 \cdot 2a \cdot a} = \frac{1}{4}$. Vậy cô-sin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ bằng $\frac{1}{4}$.

Ví dụ 2. [ĐHA04] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$, $AC = 4$ và chiều cao của hình chóp là $SO = 2\sqrt{2}$, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SC. Tìm góc giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải



Ta thấy $MO \parallel SA$ $\Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng SA và BM chính là góc $\widehat{BMO}$. Ta thấy

$$\begin{cases} BD \perp OC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp OM \Rightarrow \text{tam giác } MBO \text{ vuông tại } O.$$

Ta có

$$OB^2 = AB^2 - OA^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow OB = 1,$$

$$OM = \frac{SA}{2} = \frac{\sqrt{SO^2 + AO^2}}{2} = \frac{\sqrt{8+4}}{2} = \sqrt{3}.$$

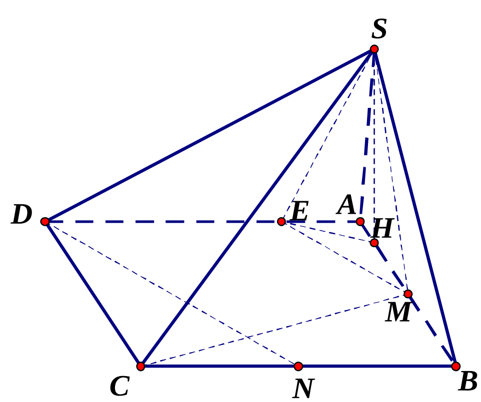
Suy ra

$$\tan \widehat{BMO} = \frac{OB}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BMO} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SA và BM bằng 30°.

Ví dụ 3. [ĐHB08] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN.

Giải



Từ giả thiết về độ dài các đoạn thẳng SA, SB và AB suy ra tam giác SAB vuông tại S. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ S lên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$ và

$$AH = \frac{SA^2}{AB} = \frac{a}{2}, \quad SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$BH = AB - AH = \frac{3a}{2}.$$

Dựng $ME \parallel DN$, $E \in AD$. Ta có góc giữa hai đường thẳng SM và DN chính là góc $\widehat{SME}$.

Ta tính các cạnh của tam giác SEM :

+) SM là trung tuyến ứng với cạnh huyền AB của tam giác vuông SAB nên $SM = \frac{1}{2}AB = a$.

+) Hai tam giác AEM và CND đồng dạng nên

$$\frac{AE}{CN}=\frac{AM}{CD}=\frac{1}{2} \Rightarrow EA=\frac{1}{2}CN=\frac{a}{2}.$$

Tam giác SHE vuông tại H nên

$$SE^2=SH^2+EH^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{2}=\frac{5a^2}{4} \Rightarrow SE=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

+) $EM^2=AE^2+AM^2=\dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow EM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

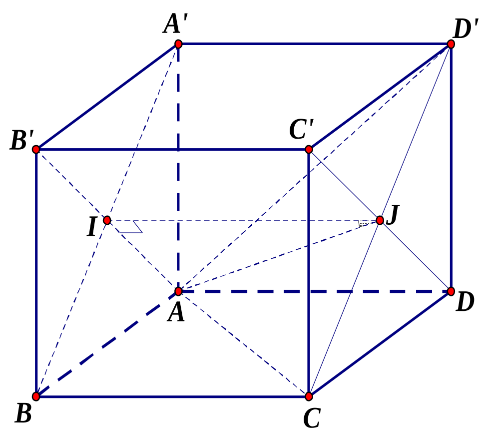
Suy ra

$$\cos\widehat{SME}=\frac{SM^2+EM^2-SE^2}{2\cdot SM\cdot SE}=\frac{a^2+\frac{5a^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}{2\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó cô-sin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

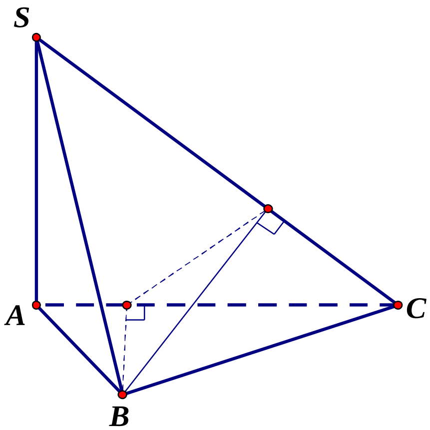
Ví dụ 4. [ĐHA03] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(D'AC)$.

Giải



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=h$ và vuông góc với đáy. Biết tam giác ABC vuông tại C, $\widehat{CAB}=60^\circ$ và $AB=2a$. Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) theo a và h. Xác định h theo a để góc giữa hai mặt phẳng nói trên bằng 60°.

Giải



❖ Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA cũng có độ dài bằng a và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của đoạn SA, hãy tính góc giữa đường thẳng SB và DM .

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M , N là trung điểm AB và AC .

1) Tính cô-sin của góc giữa các mặt phẳng (SAC) và (SBC).

2) Tính cô-sin của góc giữa các mặt phẳng (SMN) và (SBC).