Chương 1

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

I. TỔ HỢP

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Giả sử công việc A có thể được tiến hành theo một trong các phương án $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Mỗi phương án có số cách thực hiện theo thứ tự là $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó x là số cách thực hiện công việc A được cho bởi *quy tắc cộng* :

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad \text{hay} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

2. Giả sử công việc A bao gồm n công đoạn liên tiếp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Mỗi công đoạn có số các cách thực hiện theo thứ tự là $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó x là số cách thực hiện công việc A được cho bởi *quy tắc nhân* :

$$x = x_1 . x_2 . \ldots . x_n \quad \text{hay} \quad x = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để tiến hành thực hiện A (A chỉ có thể được tiến hành theo một trong các phương án $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

Bước 2 : Đếm số cách chọn $x_1, x_2, \ldots, x_n$, trong các phương án $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Bước 3 : Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện A là

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad \text{hay} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

➢ Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện A (A chỉ có thể được hoàn thành sau khi thực hiện toàn bộ các công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

Bước 2 : Đếm số cách chọn $x_1, x_2, \ldots, x_n$, trong các công đoạn $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Bước 3 : Dùng quy tắc nhân ta tính được số các lựa chọn để thực hiện A là :

$$x = x_1 . x_2 . \ldots . x_n \quad \text{hay} \quad x = \prod_{i=1}^{n} x_i .$$

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Có 10 quyển sách toán khác nhau, 8 quyển sách lí khác nhau và 6 quyển sách hoá khác nhau. Một học sinh được chọn một quyển. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải

Có ba phương án :

Phương án 1 : Chọn sách toán : 10 cách chọn ;

Phương án 2 : Chọn sách lí : 8 cách chọn ;

Phương án 3 : Chọn sách hoá : 6 cách chọn.

Vậy số cách chọn là $x = 10 + 8 + 6 = 24$.

Ví dụ 2 : Cho tập hợp $X = \{1 ; 2 ; 3\}$.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tập hợp con của X ?

b) Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có những chữ số khác nhau thuộc X ?

Giải

a) Có 4 phương án riêng biệt để chọn ra một tập con của X :

Phương án 1 : Tập con có 0 phần tử : 1 cách chọn (Tập rỗng $\{\}$) ;

Phương án 2 : Tập con có 1 phần tử : 3 cách chọn ($\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$) ;

Phương án 3 : Tập con có 2 phần tử : 3 cách chọn ({1 ; 2}, {1 ; 3}, {2 ; 3}) ;
Phương án 4 : Tập con có 3 phần tử : 1 cách chọn ({1 ; 2 ; 3}).
Vậy theo quy tắc cộng ta có số cách chọn ra một tập con của tập hợp X là :

$$S = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 \text{ cách.}$$

b) Có 3 phương án riêng biệt để lập ra một số tự nhiên có những chữ số khác nhau thuộc X :
Phương án 1 : Số có 1 chữ số : 3 cách chọn (1, 2, 3) ;
Phương án 2 : Số có 2 chữ số : 6 cách chọn (12, 13, 21, 23, 31, 32) ;
Phương án 3 : Số có 3 chữ số : 6 cách chọn (123, 132, 213, 231, 312, 321).
Vậy số cách chọn là :

$$S = 3 + 6 + 6 = 15 \text{ cách.}$$

Ví dụ 3 : Một tập hợp có 30 học sinh cần cử một ban cán sự lớp gồm một lớp trưởng, một lớp phó, một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn. Biết rằng mỗi học sinh đều có thể làm không quá một nhiệm vụ trong ban cán sự.

Giải

Ta chia việc chọn ban cán sự thành 3 công đoạn liên tiếp :
Bước 1 : Chọn lớp trưởng : 30 cách ;
Bước 2 : Chọn lớp phó : 29 cách ;
Bước 3 : Chọn thủ quỹ : 28 cách.
Vậy theo quy tắc nhân, số cách chọn ban cán sự lớp là $S = 30.29.28 = 24360$.

Ví dụ 4 : Cho tập $X = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$. Từ các phần tử của X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên trong các trường hợp sau :
a) Số đó có 3 chữ số ;
b) Số đó có 4 chữ số khác nhau từng đôi một ;
c) Số đó là số chẵn và có 5 chữ số khác nhau từng đôi một.

Giải

a) Gọi số cần tìm là $\overline{x_1x_2x_3}$, ta có :
Bước 1 : Chọn x_1 : 9 cách ;
Bước 2 : Chọn x_2 : 9 cách ;
Bước 3 : Chọn x_3 : 9 cách.
Vậy số cách chọn $\overline{x_1x_2x_3}$ là $S = 9 . 9 . 9 = 729$.

b) Gọi số cần tìm là $\overline{x_1x_2x_3x_4}$, ta có :

Bước 1 : Chọn x_1 : 9 cách ;

Bước 2 : Chọn x_2 : 8 cách ;

Bước 3 : Chọn x_3 : 7 cách ;

Bước 4 : Chọn x_4 : 6 cách.

Vậy số cách chọn là $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ = 9 . 8 . 7 . 6 = 3024.

c) Gọi số cần tìm là x = $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$, ta nhận thấy : x là số chẵn $\Leftrightarrow$ x_5 là số chẵn.

Ta có :

Bước 1 : Chọn x_5 : 4 cách (2, 4, 6, 8) ;

Bước 2 : Chọn x_1 : 8 cách ;

Bước 3 : Chọn x_2 : 7 cách ;

Bước 4 : Chọn x_3 : 6 cách ;

Bước 5 : Chọn x_4 : 5 cách.

Vậy số cách chọn là x = 4 . 8 . 7 . 6 . 5 = 6720.

C. BÀI TẬP

1. Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi một người đi chợ :

a) Có mấy cách vào và ra chợ ?

b) Có mấy cách vào ra chợ bằng hai cổng khác nhau ?

2. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập bao nhiêu số :

a) Biết số đó gồm hai chữ số ;

b) Biết số đó gồm hai chữ số khác nhau ;

c) Biết số đó gồm hai chữ số và là số lẻ ;

d) Biết số đó gồm hai chữ số khác nhau và là số chẵn.

3. Tìm tổng của tất cả các số gồm 4 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

4. Trong mặt phẳng cho n điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng :

a) Hỏi có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong số các điểm trên ;

b) Hỏi có bao nhiêu tam giác có ba đỉnh là ba trong các điểm trên.

5. Cho 4 kí tự a, b, c, d. Hỏi ta có thể thành lập được bao nhiêu chữ gồm 4 kí tự (không cần có nghĩa) trong đó kí tự đầu và cuối phải là phụ âm.

6. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt.

7. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ta lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt trong đó phải có mặt chữ số 5.

8. Từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9 có thể lập được bao nhiêu :

a) Số tự nhiên có 5 chữ số ?

b) Số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau ?

c) Số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau ?

d) Số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 ?

9. Có bao nhiêu số tự nhiên có :

a) 5 chữ số mà cả 5 chữ số đều là chẵn ?

b) 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau (số có dạng $\overline{abcba}$) ?

10. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau ?

11. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số phân biệt, trong đó có chữ số 0 và chữ số 1.

12. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt không bắt đầu bởi 123.

13. Xét dãy (a_n) gồm 7 chữ số thoả : a_3 chẵn ; a_7 không chia hết cho 5 ; a_4, a_5, a_6 đôi một khác nhau. Có bao nhiêu dãy như vậy.

14. Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số phân biệt nhỏ hơn 600000.

15. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000.

16. Từ các chữ số 1, 2, 5, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt nhỏ hơn 278.

17. Cho tập hợp X = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Có bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số phân biệt thuộc X và lớn hơn 4300.

18. Có bao nhiêu số chẵn lớn hơn 5000, gồm 4 chữ số phân biệt.

19. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số phân biệt không chia hết cho 10.

20. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là số chẵn.

21. Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số chia hết cho 9.

22. Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số phân biệt chia hết cho 5.

23. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt không chia hết cho 3.

24. Có bao nhiêu số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt nhỏ hơn 547.

25. a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số và chia hết cho 5.
    b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đều là số chẵn.
    c) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau (số có dạng $\overline{abcdcba}$).

26. Một đa giác lồi n cạnh có bao nhiêu đường chéo ?

27. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số, trong đó :
    a) Có một chữ số 1 ?
    b) Có chữ số 1 và các chữ số phân biệt ?

28. Hai dãy ghế đối diện, mỗi dãy 6 ghế. Muốn xếp 6 học sinh trường A, 6 học sinh trường B. Có bao nhiêu cách, nếu :
    a) Học sinh ngồi cạnh và ngồi đối diện phải khác trường.
    b) Hai học sinh ngồi đối diện phải khác trường.

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Cho tập hợp X gồm n phần tử ($n \geq 1$). Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự ta được một *hoán vị* các phần tử của tập X (gọi tắt là một hoán vị của X), kí hiệu P_n.

2. Cho một số nguyên dương n. Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là :

$$P_n = n! = 1.2.3.....(n-1).n.$$

3. Cho tập hợp X có n phần tử và cho số nguyên k với $1 \le k \le n$. Khi lấy k phần tử của X và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một *chỉnh hợp chập k của n phần tử* của X (gọi tắt là một chỉnh hợp n chập k của X), kí hiệu A_n^k.

4. Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$. Khi đó số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là :

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) ;$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

5. ***Chú ý*** : $A_n^n = n!$.

6. Cho tập hợp X có n phần tử và cho số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của X có k phần tử được gọi là một *tổ hợp chập k của n phần tử* của X (gọi tắt là một tổ hợp chập k của X), kí hiệu C_n^k.

7. Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$. Khi đó số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

8. Với quy ước $0! = 1$, ta có $C_n^0 = 1$, $A_n^0 = 1$.

9. Hai tính chất cơ bản về tổ hợp (hằng đẳng thức Pascal) :

$$C_n^k = C_n^{n-k} \ ; \ C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Hoán vị

1. PHƯƠNG PHÁP

➢ Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng hoán vị nếu có 2 dấu hiệu sau :

* Chọn hết các phần tử của X.

* Có sắp thứ tự.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Từ tập hợp X = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}, ta có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau từng đôi một ?

Giải

Gọi số cần tìm là $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$ với $x_i \in X$, ta thấy số cần tìm là một hoán vị của các phần tử của X, vậy số cách chọn là : $P_5 = 5! = 120$.

Ví dụ 2 : Có 7 quyển sách Toán, 6 quyển sách Lí và 4 quyển sách Hoá. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách trên lên một kệ sách dài, sao cho :

a) Các quyển sách được xếp tuỳ ý.

b) Các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau.

Giải

a) Mỗi cách xếp tuỳ ý là một hoán vị của 17 phần tử. Vậy số cách chọn là :

$$S_1 = P_{17} = 17!.$$

b) Ta chia thao tác xếp thoả mãn yêu cầu của đề bài thành 4 công đoạn :

Bước 1 : Hoán vị 7 quyển sách Toán với nhau ;

Bước 2 : Hoán vị 6 quyển sách Lí với nhau ;

Bước 3 : Hoán vị 4 quyển sách Hoá với nhau ;

Bước 4 : Hoán vị 3 nhóm sách của 3 môn với nhau.

Vậy số cách chọn là $S_2 = 7! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 3!$.

Ví dụ 3 : Xét tập hợp các số tự nhiên.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số, đôi một khác nhau và các chữ số đều lớn hơn 5 ?

b) Tính tổng của tất cả các số đó.

Giải

a) Đặt X = {6 ; 7 ; 8 ; 9}. Mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau thuộc X (thoả yêu cầu đề bài) là một hoán vị của 4 phần tử của X, vậy số cách chọn là :

$$S = P_4 = 4! = 24.$$

b) Ta chia 24 số đã chọn trong câu 1 thành 12 cặp có dạng

$\left(\overline{x_1x_2x_3x_4}\ ;\ \overline{y_1y_2y_3y_4}\right)$ trong đó $x_i + y_i = 15$.

Tổng của mỗi cặp như vậy đều bằng 16665.

Vậy tổng số của tất cả các số đó là : T = 12 . 16.665 = 199980.

Ví dụ 4 : Một đoàn khách du lịch đến tham quan 10 địa điểm tại TP Hồ Chí Minh. Hỏi có bao nhiêu cách tham gia ?

Giải

Mỗi cách tham quan là một hoán vị của tập hợp 10 địa điểm. Vậy số cách chọn là $P_{10} = 10! = 3628800$.

Vấn đề 2

Chỉnh hợp

1. PHƯƠNG PHÁP

- Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau :

  * Chỉ chọn k phần tử của X ($1 \leq k < n$).

  * Có sắp thứ tự các phần tử đã chọn.

- Số các chỉnh hợp n chập k là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Có bao nhiêu cách bầu một ban cán sự gồm 3 người : 1 lớp trưởng, 1 lớp phó học tập và 1 thủ quỹ trong một lớp học có 30 học sinh (mỗi học sinh làm không quá một nhiệm vụ).

Giải

Đặt $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{30}\}$ là tập hợp các học sinh trong lớp. Ta thấy mỗi ban cán sự TPQ bao gồm lớp trưởng (T), lớp phó (P) và thủ quỹ (Q) là một chỉnh hợp 30 chập 3 của X. Vậy số cách chọn là :

$$S = A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = 28.29.30 = 24360.$$

Ví dụ 2 :

a) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau ?

b) Tính tổng của chúng.

Giải

a) Đặt X = {1 ; 2 ; ... ; 9}. Gọi $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ là số cần tìm. Ta thấy mỗi số thoả đề bài là một chỉnh hợp 9 chập 4 của tập hợp X. Vậy số cách chọn là $S = A_9^4 = 3024$.

b) Ta chia S số ở câu a thành $\frac{S}{2}$ cặp số có dạng $\left(\overline{x_1x_2x_3x_4}\ ;\ \overline{y_1y_2y_3y_4}\right)$ trong đó $x_i + y_i = 10$.

Tổng của mỗi cặp như vậy đều bằng 11110.

Vậy tổng của tất cả các số đó bằng $T = \frac{1}{2} \times A_9^4 \times 11110 = 16798320$.

Ví dụ 3 : Trong mặt phẳng cho 10 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập các điểm đã cho.

Giải

Mỗi vectơ là một chỉnh hợp 10 chập 2 của tập điểm đã cho.

Vậy số cách chọn là : $S = A_{10}^2 = 90$.

Vấn đề 3
Tổ hợp

1. PHƯƠNG PHÁP

- Khi giải bài toán chọn trên một tập hợp X có n phần tử, ta sẽ dùng tổ hợp nếu có 2 dấu hiệu sau :

  * Chỉ chọn k phần tử của X ($1 \le k < n$).

  * Không sắp thứ tự các phần tử đã chọn.

- Số các tổ hợp n chập k là $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Trong không gian cho một tập hợp X gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

a) Hỏi có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành ?

b) Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành ?

Giải

a) Mỗi đường thẳng là một tổ hợp 10 chập 2 của X. Vậy số cách chọn là

$$S_1 = C_{10}^2 = 45.$$

b) Mỗi tam giác là một tổ hợp 10 chập 3 của X. Vậy số cách chọn là

$$S = C_{10}^3 = 120.$$

Ví dụ 2 : Một lớp học có 50 học sinh, phải chọn 3 học sinh vào ban trực xe. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

Đặt X là tập hợp 50 học sinh của lớp học. Ta thấy mỗi ban trực xe là một tổ hợp 50 chập 3 của X. Vậy số cách chọn là $S = C_{50}^3 = 19600$.

Ví dụ 3 : Một chi đoàn có 8 đoàn viên nam và 4 đoàn viên nữ. Có bao nhiêu cách lập một tổ công tác gồm 7 người sao cho trong đó có đúng 2 nữ.

Giải

Ta chia công tác thành lập chi đoàn thành 2 công đoạn:

Bước 1 : Chọn 5 đoàn viên từ 8 nam đoàn viên : có C_8^5 cách.

Bước 2 : Chọn 2 đoàn viên từ 4 nữ đoàn viên : có C_4^2 cách.

Vậy số cách chọn là $S = C_8^5 \times C_4^2 = 336$.

C. BÀI TẬP

1. Có 6 bài toán Đại số, 5 bài Hình học và 4 bài Lượng giác. Từ các bài toán trên có bao nhiêu cách tạo một đề kiểm tra gồm 3 bài toán : 1 bài Đại số, 1 bài Hình học và 1 bài Lượng giác.

2. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ ($n \geq 2, n \in Z$) nội tiếp trong đường tròn (O). Tính :
   a) Số đường chéo của đa giác trên.
   b) Số tam giác có các đỉnh là ba trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$.
   c) Số hình chữ nhật có các đỉnh là bốn trong 2n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$.

3. Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một nhóm 5 người trong đó có không quá 3 nữ ?

4. Tập hợp E = {1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8}. Có bao nhiêu cách lập ra một số có 3 chữ số khác nhau lấy từ E sao cho :

a) Số tạo thành là số chẵn ?

b) Số tạo thành là một số không có chữ số 5 ?

c) Số tạo thành là một số nhỏ hơn 278 ?

5. Trong một cuộc đua ngựa có 12 con ngựa cùng xuất phát. Hỏi có bao nhiêu khả năng xếp loại :

a) Ba con ngựa về nhất, nhì, ba ?

b) Ba con ngựa về đích đầu tiên ?

6. a) Tìm số các ước số dương của số $A = 2^3.3^4.5^7.7^6$.

b) Tìm số các ước số dương của số 490000.

7. Một bàn tròn 6 chỗ ngồi được đánh số thứ tự. Hỏi có mấy cách xếp 6 người A, B, C, D, E, F sao cho A và B luôn ngồi cạnh nhau ?

8. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào 2 dãy ghế trên, có bao nhiêu cách, nếu :

a) Nam và nữ được xếp tuỳ ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế.

9. Một ghế dài 5 chỗ ngồi. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh A, B, C, D, E sao cho :

a) Bạn C ngồi giữa.

b) Bạn A và E ngồi ở 2 đầu.

10. Có bao nhiêu cách xếp 3 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 5 quyển sách Hoá vào 1 kệ dài biết rằng các quyển sách khác nhau từng đôi một và các sách cùng môn được xếp kề nhau ?

11. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt mà :

a) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

b) Các chữ số chẵn đứng cạnh nhau và các chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

12. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt ? Tính tổng các số này.

13. Tính tổng của các số có 4 chữ số phân biệt.

14. Có 10 học sinh lớp 10 và 10 học sinh lớp 12 xếp vào 4 dãy ghế, mỗi dãy 5 học sinh. Có bao nhiêu cách xếp nếu các học sinh cùng lớp ngồi nối đuôi nhau, các học sinh ngồi cạnh nhau thì khác lớp ?

15. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt, các chữ số đều lớn hơn 4. Tính tổng các số tự nhiên đó.

16. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt sao cho 1, 2, 3 luôn đứng cạnh nhau.

17. Xếp 3 bi đỏ phân biệt và 3 bi xanh giống nhau vào 7 ô trống.

a) Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách xếp nếu các bi cùng màu đứng cạnh ?

18. Xếp 3 nam, 2 nữ vào 8 ghế. Có bao nhiêu cách, nếu :

a) Nam và nữ được xếp ngồi tuỳ ý.

b) Xếp 5 người ngồi kề nhau.

c) Xếp 3 nam ngồi kề, 2 nữ ngồi kề và giữa 2 nhóm có ít nhất 1 ghế trống.

19. Xếp 4 nam và 3 nữ vào 9 ghế sao cho 3 ghế đầu tiên là nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

20. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 7, 8.

21. Xếp 5 bi trắng giống nhau và 5 bi xanh phân biệt vào 1 dãy 10 chỗ trống. Có bao nhiêu cách nếu :

a) Các bi trắng được xếp kề nhau.

b) Các bi xanh được xếp kề nhau.

22. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt có mặt đủ ba chữ số 1, 2, 3.

23. Có bao nhiêu cách chia 6 học sinh làm 3 nhóm để làm 3 công việc khác nhau, mỗi nhóm 2 học sinh ?

24. Xếp 15 cái bánh phân biệt vào 3 hộp giống nhau, mỗi hộp 5 bánh. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

25. Có bao nhiêu cách xếp 5 bi trắng, 4 bi đen thành một dãy sao cho các bi đen không đứng cạnh nhau, nếu :

a) Các bi cùng màu giống nhau.

b) Các bi cùng màu khác nhau.

26. Có 10 bông trắng, 8 bông hồng. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 bông sao cho có ít nhất 2 trắng, 3 hồng ?

27. Có 4 bi đỏ, 5 bi trắng, 6 bi vàng và tất cả các viên bi đều phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 bi không đủ 3 màu ?

28. Có 6 trái xoài, 4 trái mít, 2 trái ổi. Chọn ra 6 trái. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu :

a) Mỗi loại có đúng 2 trái.

b) Mỗi loại có ít nhất 1 trái.

29. Có 5 công việc khác nhau giao cho 3 người, mỗi người ít nhất một việc và mỗi việc chỉ cần một người làm. Hỏi có bao nhiêu cách phân công ?

30. Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số có mặt đủ 3 chữ số trên.

31. Xếp 5 nam, 3 nữ vào một dãy 8 ghế sao cho không có ít nhất 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

32. Có bao nhiêu cách phân 7 kĩ sư vào 4 xưởng, mỗi xưởng 1 hoặc 2 kĩ sư ?

33. Cho A = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7}.

a) Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt thuộc A là số chẵn.

b) Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt thuộc A có một trong 3 chữ số đầu bằng 1.

§3. NHỊ THỨC NEWTON

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Công thức nhị thức Newton :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n \ ;$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k . \qquad (*)$$

2. Nhận xét :

Công thức nhị thức Newton (*) có :

* (n + 1) số hạng ;

* Số hạng thứ k + 1 là $C_n^k a^{n-k} b^k$;

* Các hệ số của nhị thức có tính đối xứng theo tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$;

* Trong mỗi số hạng, tổng số mũ của a và b luôn bằng n.

3. Các dạng đặc biệt của nhị thức Newton :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n \ ;$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n x^n \ ;$$

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n \ ;$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \ ;$$

$$0 = (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

4. Tam giác Pascal :

* Các hệ số của $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, \ldots, (a+b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.
* Trong tam giác Pascal, có hai cạnh được ghi toàn bằng số 1, các ô còn lại được ghi theo hằng đẳng thức Pascal $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, nghĩa là giá trị của một ô bằng giá trị của ô ngay trên cộng cho ô bên trái của ô ngay trên đó (hình 1).

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Hình 1. Các dòng đầu tiên của tam giác Pascal

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

Tìm hệ số của một luỹ thừa trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$

1. PHƯƠNG PHÁP

Bước 1 : Đưa khai triển nhị thức về dạng $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Bước 2 : Xác định k bằng cách giải phương trình.

Bước 3 : Tính hệ số theo công thức tổ hợp C_n^k.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $P(x) = (2 + x)^{15}$.

Giải

Ta có $P(x) = (2 + x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k 2^{15-k} x^k$.

Với k = 10 ta được hệ số của x^{10} trong khai triển trên là $C_{15}^{10} 2^5 = 96096$.

Ví dụ 2 : Trong khai triển biểu thức $P(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{20}$. Hãy tìm số hạng

a) Không chứa x.

b) Chứa x^{10}.

Giải

Ta có $P(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{20} = \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^2\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^{-\frac{1}{2}})^{20-k} (x^2)^k$

$$= \sum_{k=0}^{20} .C_{20}^k.x^{-10+\frac{k}{2}+2k}.$$

a) Để tìm số hạng không chứa x ta giải phương trình sau :

$$-10+\frac{k}{2}+2k=0 \Leftrightarrow \frac{5k}{2}=10 \Leftrightarrow k=4.$$

Vậy hệ số của x^{10} là $C_{20}^4 = 4845$.

b) Để tìm số hạng chứa x^{10} ta giải phương trình sau :

$$-10+\frac{k}{2}+2k=10 \Leftrightarrow \frac{5k}{2}=20 \Leftrightarrow k=8.$$

Vậy hệ số của x^{10} là $C_{20}^8 = 125970$.

Ví dụ 3 : Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $P(x) = (2-x)^{19}$.

Giải

Ta có : $P(x) = (2-x)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k 2^{19-k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k 2^{19-k}(-1)^k.x^k$.

Vậy hệ số của x^9 là $C_{19}^9 2^{10}(-1)^9 = -94595072$.

Vấn đề 2

Tính tổng $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ bằng cách khai triển $(1+x)^n$ và cho x một giá trị thích hợp

1. PHƯƠNG PHÁP

Bước 1 : Khai triển $(1 + x)^n$.

Bước 2 : Dựa vào yêu cầu của đề bài ta cho x nhận một hay hai giá trị thích hợp.

2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1 : Cho n là số nguyên dương chẵn. Hãy tính giá trị các biểu thức sau :

$$A = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + ... + 3^nC_n^n;$$

$$B = C_n^0 + 3^2C_n^2 + 3^4C_n^4 + ... + 3^nC_n^n;$$

$$C = 3C_n^1 + 3^3C_n^3 + 3^5C_n^5 + ... + 3^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Giải

Đặt $F(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Ta có : $F(3) = (1 + 3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k$ (1) ;

$F(-3) = (1 - 3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 3^k$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra : $A = 4^n$; $B = \dfrac{4^n + 2^n}{2}$; $C = \dfrac{4^n - 2^n}{2}$.

C. BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}$.

2. Tính $S = 3^{17}C_{17}^0 - 4^1 3^{16} C_{17}^1 + 4^2 3^{15} C_{17}^2 - 4^3 3^{14} C_{17}^3 + ... - 4^{17} C_{17}^{17}$.

3. Tính $S = C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + ... + C_{2n}^{2n}$.

4. Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số của x^{12} trong khai triển đó ?

5. Trong khai triển nhị thức $(x^3\sqrt{x} + x)^n$, hãy tìm số hạng không phụ thuộc x, biết rằng :
$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$$

6. Tìm số hạng không chứa x của khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ với $x \neq 0$.

7. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của $\left(3x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^5$ $(x \neq 0)$.

8. Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $\left(1 + \dfrac{1}{x} + x^3\right)^{10}$ $(x \neq 0)$.

9. Cho đa thức $P(x) = \left[1 + x^2(1-x)\right]^8$. Tìm hệ số của x^8 khi khai triển P(x) thành đa thức.

10. Khai triển $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)^{10}$, ta được đa thức $a^0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$ $(a_k \in R)$.

Hãy tìm hệ số lớn nhất a_k $(0 \le k \le 10)$ trong khai triển trên.

11. Trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$, hãy tìm số hạng tự do.

12. Tính : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$.

13. Tính : $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n$.

14. Tính $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + ... + 2^5C_5^5$.

15. Chứng minh rằng : $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ... + C_{16}^{16} = 2^{16}$.

16. Chứng minh rằng :

$$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2C_{2n}^2 - 10^3C_{2n}^3 + ... - 10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = 81^n.$$

17. Rút gọn biểu thức : $A = 3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 - ... + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n\right]$.

18. Cho $A = 4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - ... + (-1)^nC_n^n$

và $B = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^nC_n^n$. Hãy chứng minh A = B.

19. Khai triển $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ thành đa thức. Hãy tìm hệ số của số hạng chứa x^4.

20. Khai triển $(1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{14}$ thành đa thức. Hãy tìm hệ số của x^9.

21. Trong khai triển $(x^3 + xy)^n$, hãy tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$.

22. Khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{\frac{-28}{15}}\right)^{n}$ thành đa thức. Tìm số hạng tự do biết :

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$$

23. Khai triển $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ thành đa thức. Hãy tìm :

a) Hệ số của x^4.

b) Tính tổng các hệ số của khai triển trên.

24. Chứng minh rằng : $C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^k$ với $k \le n$.

25. Chứng minh rằng : $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$ với $k \le n$.

26. Chứng minh rằng : $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$ với $k \le n$.

27. Chứng minh rằng : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$ với $m \le n$.

28. Chứng minh rằng : $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

29. Giải các phương trình, hệ phương trình và bất phương trình sau :

a) $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 = 0$;

b) $\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x}$;

c) $P_x.A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$;

d) $11\,C_{28}^{2n} = 225C_{24}^{2n-4}$;

e) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$;

f) $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}C_x^3 + 10$.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG 1

I. TỔ HỢP

§1. HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

1. a) Có 4 cách chọn cổng để vào chợ và có 4 cách chọn cổng để ra ngoài chợ ⇒ có 4.4 = 16 cách vào và ra chợ.

   b) Có 4 cách chọn cổng để vào chợ và ứng với mỗi cách chọn cổng vào có 3 cách chọn cổng để ra ngoài chợ ⇒ có 4.3 = 12 cách vào và ra chợ.

2. a) Gọi $x = \overline{a_1a_2}$ là số cần lập. Ta có :

   + a_1 có 5 cách chọn ;

   + a_2 có 5 cách chọn.

   Vậy có 5.5 = 25 cách lập số x.

   b) Gọi $y = \overline{a_1a_2}$ là số cần lập. Ta có :

   + a_1 có 5 cách chọn ;

   + a_2 có 4 cách chọn.

   Vậy có 5.4 = 20 cách lập số y.

   c) Gọi $z = \overline{a_1a_2}$ là số cần lập. Ta có :

   + a_2 có 3 cách chọn ;

   + a_1 có 5 cách chọn.

   Vậy có 3.5 = 15 cách lập số z.

   d) Gọi $w = \overline{a_1a_2}$ là số cần lập. Ta có :

   + a_2 có 2 cách chọn ;

   + a_1 có 4 cách chọn.

   Vậy có 2.4 = 8 cách lập số w.

3. Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số có 4 chữ số khác nhau lập được. Ta có :

   + a_1 có 5 cách chọn ;

   + a_2 có 4 cách chọn ;

   + a_3 có 3 cách chọn ;

   + a_4 có 2 cách chọn.

Vậy có 5.4.3.2 = 120 cách lập số x. Gọi E là tập gồm 120 số x lập được. Ta có :

Nếu x = $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $\in$ E thì y = $\overline{(6-a_1)(6-a_2)(6-a_3)(6-a_4)}$ cũng thuộc E $\Rightarrow$ trong E có 60 cặp số (x ; y) mà x + y = 6666 $\Rightarrow$ tổng của 120 số thuộc tập E là S = 60.6666 = 399960.

4. a) Từ một điểm ta kẻ được n – 1 đường thẳng mà mỗi đường thẳng qua hai điểm nên số đường thẳng lập được là $\frac{n(n-1)}{2}$.

b) Gọi (A ; B ; C) là bộ gồm ba điểm đôi một khác nhau trong n điểm đã cho. Ta có n cách chọn A, n – 1 cách chọn B và n – 2 cách chọn C $\Rightarrow$ số cách chọn bộ 3 điểm (A ; B ; C) là n(n – 1)(n – 2). Vì từ 6 bộ (A ; B ; C), (A ; C ; B), (B ; A ; C), (B ; C ; A), (C ; A ; B) và (C ; B ; A) ta chỉ lập được một tam giác ABC nên số tam giác lập được là $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

5. Gọi xyzt là kí tự cần lập. Ta có : t là phụ âm nên t có 3 cách chọn ; x là phụ âm nên x có 3 cách chọn ; y, z có 4 cách chọn. Do đó có tất cả là

3.3.4.4 = 144 kí tự được lập.

6. Gọi A = $\overline{abcde}$ là số gồm 5 chữ số phân biệt. Ta có :

+ a có 9 cách chọn ;

+ b có 9 cách chọn ;

+ c có 8 cách chọn ;

+ d có 7 cách chọn ;

+ e có 6 cách chọn.

Vậy có 9.9.8.7.6 = 27216 cách lập số A.

7. Ta dùng 5 ô sau để xếp số thoả yêu cầu bài toán :

TH1 : Ô 1 là số 5 :

– Ô 2 có 6 cách chọn ;

– Ô 3 có 5 cách chọn ;

– Ô 4 có 4 cách chọn ;

– Ô 5 có 3 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 6.5.4.3 = 360 (số).

TH2 : Ô 1 là số khác 5 :

– Có 4 cách xếp số 5 vào các ô còn lại ;

– Xếp một số vào ô 1 có 5 cách ;

– Xếp một số vào một trong ba ô còn lại có 5 cách ;

– Xếp một số vào một trong hai ô còn lại có 4 cách ;

– Xếp một số vào ô còn lại có 3 cách ;

$\Rightarrow$ có 4.5.5.4.3 = 1200 (số).

Vậy tất cả có 360 + 1200 = 1560 số thoả yêu cầu bài toán.

8. a) Gọi x = $\overline{abcde}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có mỗi số a, b, c, d, e đều có 5 cách chọn. Do đó có thể lập được $5^5 = 3125$ số x.

b) Gọi y = $\overline{abcde}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có : a có 5 cách chọn ; b có 4 cách chọn ; c có 3 cách chọn ; d có 2 cách chọn và e có 1 cách chọn. Vậy ta lập được 5.4.3.2.1 = 120 số y.

c) Gọi z = $\overline{abc}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có a có 5 cách chọn ; b có 4 cách chọn ; c có 3 cách chọn. Vậy lập được 5.4.3 = 60 số z.

d) Gọi m = $\overline{abc}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có a + b + c là số chia hết cho 3. Do đó a, b, c thuộc vào các tập sau : {1 ; 3 ; 5}, {1 ; 5 ; 9}, {3 ; 5 ; 7}, {5 ; 7 ; 9}. Từ mỗi tập trên ta lập được 6 số thoả yêu cầu bài toán. Do đó có 6.4 = 24 số thoả yêu cầu bài toán.

9. a) Gọi x = $\overline{abcde}$ là số có 5 chữ số mà cả 5 chữ số đều chẵn. Ta có :

– a có 4 cách chọn ;

– b, c, d, e mỗi số có 5 cách chọn ;

Vậy tất cả có $4.5^4 = 2500$ số thoả yêu cầu bài toán.

b) Gọi y là số thoả yêu cầu bài toán thì y có dạng y = $\overline{abcba}$. Ta có :

– a có 9 cách chọn ;

– b, c mỗi số có 10 cách chọn ;

Vậy tất cả có $9.10^2 = 900$ số thoả yêu cầu bài toán.

10. Gọi x = $\overline{abcde}$ là số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau.

TH1 : e = 0 :

– a có 9 cách chọn ;

– b có 8 cách chọn ;

– c có 7 cách chọn ;

– d có 6 cách chọn ;

$\Rightarrow$ lập được 9.8.7.6 = 3024 số.

TH2 : $e \neq 0$:

– e có 4 cách chọn ;

– a có 8 cách chọn ;

– b có 8 cách chọn ;

– c có 7 cách chọn ;

– d có 6 cách chọn ;

$\Rightarrow$ lập được 4.8.8.7.6 = 10752 số.

Kết luận : ta có thể lập được 3024 + 10752 = 13776 số.

11. Ta dùng 6 ô số sau để xếp số thoả yêu cầu bài toán :

* Có 5 cách xếp số 0 vào ;

* Có 5 cách xếp số 1 vào ;

* Gọi 4 ô còn lại là A, B, C, D :

– Ô A có 8 cách chọn ;

– Ô B có 7 cách chọn ;

– Ô C có 6 cách chọn ;

– Ô D có 5 cách chọn ;

Vậy có tất cả là 5.5.8.7.6.5 = 42000 số lập được.

12. * Gọi $x = \overline{abcde}$ là số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 1, 2, 3, …, 7, 8. Ta có : e có 4 cách chọn ; a có 7 cách chọn ; b có 6 cách chọn ; c có 5 cách chọn ; d có 4 cách chọn. Do đó có 4.7.6.5.4 = 3360 số x.

* Gọi $y = \overline{123de}$ là số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt được lập từ các chữ số 1, 2, 3, …, 7, 8. Ta có : e có 3 cách chọn ; d có 4 cách chọn nên được 3.4 = 12 số y.

Vậy số các số thoả yêu cầu đề bài là 3360 – 12 = 3348 số.

13. Xét dãy số thoả yêu cầu đề bài $(a_n) = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Ta có : a_1 có 10 cách chọn ; a_2 có 10 cách chọn ; a_3 có 5 cách chọn ; a_4 có 10 cách chọn ; a_5 có 9 cách chọn ; a_6 có 8 cách chọn ; a_7 có 8 cách chọn. Vậy tất cả có 10.10.5.10.9.8.8 = 2880000 dãy số thoả yêu cầu đề bài.

14. Gọi $x = \overline{abcdef}$ là số lẻ gồm 6 chữ số phân biệt và $x < 600000$.

TH1 : $a < 6$ và a lẻ :

– a có 3 cách chọn ;

– f có 4 cách chọn ;
– b có 8 cách chọn ;
– c có 7 cách chọn ;
– d có 6 cách chọn ;
– e có 5 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 3.4.8.7.6.5 = 20160 số.

TH2 : a < 6 và a chẵn :

– a có 2 cách chọn ;
– f có 5 cách chọn ;
– b có 8 cách chọn ;
– c có 7 cách chọn ;
– d có 6 cách chọn ;
– e có 5 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 2.5.8.7.6.5 = 16800 số.

Vậy ta lập được 20160 + 16800 = 36960 số thoả yêu cầu bài toán.

15. Gọi x = $\overline{abcde}$ là số gồm 5 chữ số phân biệt và x < 45000. Ta có :

* Nếu a < 4 :

– a có 3 cách chọn ;
– b có 4 cách chọn ;
– c có 3 cách chọn ;
– d có 2 cách chọn ;
– e có 1 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 3.4.3.2.1 = 72 số.

* Nếu a = 4 :

– b có 3 cách chọn (do b phải nhỏ hơn 5 và $b \neq 4$) ;
– c có 3 cách chọn ;
– d có 2 cách chọn ;
– e có 1 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 3.3.2.1 = 18 số.

Do đó ta lập được 72 + 18 = 90 số thoả yêu cầu bài toán.

16. Gọi x = $\overline{abc}$ là số gồm 3 chữ số phân biệt và x < 278. Ta có :

* a = 1 :

– b có 4 cách chọn ;

– c có 3 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 4.3 = 12 số x.

* a = 2 và b < 7 :

– b có 2 cách chọn ;

– c có 3 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 2.3 = 6 số x.

* a = 2 và b = 7 $\Rightarrow$ c có 2 cách chọn $\Rightarrow$ có 2 số x.

Vậy ta có tất cả là 12 + 6 + 2 = 20 số x.

17. Gọi x = $\overline{abcd}$ là số chẵn gồm 4 chữ số phân biệt và x > 4300.

* x = $\overline{6bcd}$:

– d có 2 cách chọn ;

– b có 4 cách chọn ;

– c có 3 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 2.4.3 = 24 số dạng $\overline{6bcd}$.

* x = $\overline{5bcd}$:

– d có 3 cách chọn ;

– b có 4 cách chọn ;

– c có 3 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 3.4.3 = 36 số dạng $\overline{5bcd}$.

* x = $\overline{4bcd}$:

– Nếu b = 6 : d có 1 cách chọn và c có 3 cách chọn $\Rightarrow$ có 1.3 = 3 số dạng $\overline{46cd}$;

– Nếu b = 5 : d có 2 cách chọn và c có 3 cách chọn $\Rightarrow$ có 2.3 = 6 số dạng $\overline{45cd}$;

– Nếu b = 3 : d có 2 cách chọn và c có 3 cách chọn $\Rightarrow$ có 2.3 = 6 số dạng $\overline{43cd}$;

Vậy tất cả có 24 + 36 + 3 + 6 + 6 = 75 số được lập.

18. Gọi x = $\overline{abcd}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có các trường hợp sau :

* a > 5 và a lẻ :

– a có 2 cách chọn ;

– d có 5 cách chọn ;

– b có 8 cách chọn ;

– c có 7 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có 2.5.8.7 = 560 số.

* $a > 5$ và a chẵn :
  – a có 2 cách chọn ;
  – d có 4 cách chọn ;
  – b có 8 cách chọn ;
  – c có 7 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có $2.4.8.7 = 64.7 = 448$ số.

* $a = 5$ và b lẻ :
  – b có 4 cách chọn ;
  – d có 5 cách chọn ;
  – c có 7 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có $4.5.7 = 140$ số.

* $a = 5$ và b chẵn :
  – b có 5 cách chọn ;
  – d có 4 cách chọn ;
  – c có 7 cách chọn ;

$\Rightarrow$ có $5.4.7 = 140$ số.

Vậy ta có thể lập được $560 + 448 + 140 + 140 = 1288$ số thoả yêu cầu bài toán.

19. Gọi $x = \overline{abcd}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có : d phải khác 0.

– d có 7 cách chọn
– a có 6 cách chọn
– b có 6 cách chọn
– c có 5 cách chọn

$\Rightarrow$ có $7.6.6.5 = 1260$ số.

20. Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ là số thoả yêu cầu bài toán. Ta có :

– a_1 có 9 cách chọn ;
– $a_2, a_3, \ldots, a_6$ mỗi số có 10 cách chọn ;
– a_7 có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $9.10^5.5$ số thoả yêu cầu bài toán.

21. Các số lẻ gồm 6 chữ số chia hết cho 9 là : 100017 ; 100035 ; ... ; 999999. Dãy số trên là một cấp số cộng có $u_1 = 100017$; $u_n = 999999$ và công sai $d = 18$. Ta có : $u_n = u_1 + (n - 1)d$

$\Rightarrow n = \dfrac{u_n - u_1}{d} + 1 = 50000$. Vậy có tất cả là 50000 số thoả yêu cầu bài toán.

22. Gọi x là số cần lập. Ta có :

TH1 : x = $\overline{abc0}$ có 9.8.7 = 504 số

TH2 : x = $\overline{abc5}$ có 8.8.7 = 448 số.

Vậy số các số lập được là 504 + 448 = 952 số.

23. Từ các chữ số trên ta lập được 5.5.4 = 100 số có 3 chữ số khác nhau. Trong đó, ta sẽ tìm số các số x = $\overline{abc}$ có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 ⇒ a, b, c thuộc các tập hợp sau đây : {0 ; 1 ; 2}, {0 ; 1 ; 5}, {0 ; 2 ; 4}, {0 ; 4 ; 5}, {1 ; 2 ; 3}, {1 ; 3 ; 5}, {2 ; 3 ; 4}, {3 ; 4 ; 5} ⇒ có 4.2.2.1 + 4.3.2.1 = 40 số chia hết cho 3.

Vậy ta có 100 – 40 = 60 số thoả yêu cầu bài toán.

24. Gọi x = $\overline{abc}$ là số cần lập. Ta có các trường hợp sau :

* a < 5 và a chẵn :
  - a có 2 cách chọn ;
  - c có 4 cách chọn ;
  - b có 8 cách chọn ;

  ⇒ có 2.4.8 = 64 số.

* a < 5 và a lẻ :
  - a có 2 cách chọn ;
  - c có 5 cách chọn ;
  - b có 8 cách chọn ;

  ⇒ có 2.5.8 = 80 số.

* a = 5 :
  - b < 4 và b chẵn : b có 2 cách chọn và c có 4 cách chọn ⇒ ta có 2.4 = 8 số.
  - b < 4 và b lẻ : b có 2 cách chọn và c có 5 cách chọn ⇒ ta có 2.5 = 10 số.

* a = 5 và b = 4 : c có 3 cách chọn ⇒ ta có 3 số.

Vậy ta có tất cả là : 64 + 80 + 8 + 10 + 3 = 165 số.

25. a) Có 9.8.7.6.5 số có dạng $\overline{abcde0}$ và 8.8.7.6.5 số có dạng $\overline{abcde5}$ ⇒ có tất cả là 28560 số.

b) Có 4.5.5 = 100 số.

c) Số cần lập có dạng $\overline{abcdcba}$ ⇒ có 9.10.10.10 = 9000 số.

26. Từ một đỉnh ta vẽ được n – 3 đường chéo mà mỗi đường chéo qua đúng hai đỉnh nên ta có số đường chéo của n giác lồi là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

27. a) Gọi x = $\overline{abcd}$ là số cần lập. Ta có :

* a = 1 : mỗi chữ số b, c, d có 7 cách chọn ⇒ có 7^3 số.
* b = 1 : a có 6 cách chọn ; c và d mỗi chữ số có 7 cách chọn ⇒ có 6.7^2 số.
* c = 1 : a có 6 cách chọn ; b và d mỗi chữ số có 7 cách chọn ⇒ có 6.7^2 số.
* d = 1 : a có 6 cách chọn ; b và c mỗi chữ số có 7 cách chọn ⇒ có 6.7^2 số.

Vậy ta có $7^3 + 3.6.7^2 = 1225$ số.

b) Gọi x = $\overline{abcd}$ là số cần lập. Ta có :

* a = 1 : mỗi chữ số b, c, d lần lượt có 7, 6, 5 cách chọn ⇒ có 7.6.5 = 210 số.
* b = 1 : a có 6 cách chọn ; c có 6 cách chọn, d có 5 cách chọn ⇒ có 6.6.5 số.
* c = 1 : a có 6 cách chọn ; b có 6 cách chọn, d có 5 cách chọn ⇒ có 6.6.5 số.
* d = 1 : a có 6 cách chọn ; b có 6 cách chọn, c có 5 cách chọn ⇒ có 6.6.5 số.

Vậy tất cả có $210 + 3.6^2.5 = 750$ số.

28. a) Ta có hai trường hợp sau đây :

A	B	A	B	A	B
B	A	B	A	B	A

B	A	B	A	B	A
A	B	A	B	A	B

Với mỗi trường hợp ta có :

Xếp chỗ cho học sinh trường A có 6.5.4.3.2.1 = 6! cách ;

Xếp chỗ cho học sinh trường B có 6.5.4.3.2.1 = 6! cách.

Vậy số cách xếp chỗ thoả yêu cầu bài toán là 2.6!.6! cách.

b) Ta có đánh số thứ tự chỗ ngồi của hai dãy bàn như sau :

D1	D2	D3	D4	D5	D6
C1	C2	C3	C4	C5	C6

* Trường hợp D_1 là học sinh trường A :

– D1 có 6 cách ; C1 có 6 cách ;

– D2 có 10 cách ; C2 có 5 cách ;

– D3 có 8 cách ; C3 có 4 cách ;

– D4 có 6 cách ; C4 có 3 cách ;

– D5 có 4 cách ; C5 có 2 cách ;

– D6 có 2 cách ; C6 có 1 cách ;

⇒ có 6.6.10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 16588800 cách xếp

* Trường hợp D_1 là học sinh trường B : tương tự trường hợp trên ta cũng có 16588800 cách xếp.

Vậy số cách xếp có thể là 16588800.2 = 33177600 cách.

Cách khác :

– Xếp 6 học sinh trường A vào một dãy, có 6! cách ;

– Xếp 6 học sinh trường B vào một dãy, có 6! cách ;

– Đổi chỗ mỗi cặp hai học sinh ngồi đối diện nhau có 2^6 cách.

Vậy tất cả có $2^6.6!.6! = 33177600$ cách xếp thoả bài toán.

§2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

1. Để tạo một đề kiểm tra ta thực hiện các bước sau :

– Bước 1 : chọn 1 bài Đại số : có 6 cách ;

– Bước 2 : chọn 1 bài Hình học : có 5 cách ;

– Bước 3 : chọn 1 bài Lượng giác : có 4 cách.

Vậy có 6.5.4 = 120 cách tạo ra một đề kiểm tra.

2. a) Cứ lấy hai điểm trong 2n điểm ta được một đường chéo hoặc một cạnh nên tổng số cạnh và đường chéo là C_{2n}^2. Vì đa giác đều trên có 2n cạnh nên số đường chéo sẽ là $C_{2n}^2 - 2n$.

b) Cứ lấy ba điểm trong 2n đỉnh ta lập được một tam giác. Vậy số tam giác lập được là C_{2n}^3.

c) Số đường chéo của 2n–giác đều đồng thời là đường kính của đường tròn là n. Ứng với hai đường chéo đồng thời là đường kính của đường tròn, ta dựng được một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật là C_n^2.

3. Ta có các trường hợp sau :

– TH1 : Tổ gồm 3 nữ và 2 nam, trường hợp này có $C_6^3.C_8^2$ cách chọn ;

– TH2 : Tổ gồm 2 nữ và 3 nam, trường hợp này có $C_6^2.C_8^3$ cách chọn ;

– TH3 : Tổ gồm 1 nữ và 4 nam, trường hợp này có $C_6^1.C_8^4$ cách chọn ;

– TH4 : Tổ gồm 0 nữ và 5 nam, trường hợp này có $C_6^0.C_8^5$ cách chọn.

Vậy số cách lập tổ là $C_6^3C_8^2 + C_6^2C_8^3 + C_6^1C_8^4 + C_6^0C_8^5$ cách.

4. a) Gọi $x = \overline{abc}$ là số cần lập. Ta có :

* c có 2 cách chọn ;

* $\overline{ab}$ có A_4^2 cách chọn.

Vậy có tất cả là $2.A_4^2$ số thoả yêu cầu bài toán.

b) Mỗi số thoả yêu cầu bài toán là một chỉnh hợp chập ba của các số sau : 1 ; 2 ; 7 ; 8 nên số các số lập được là A_4^3 số.

c) Gọi $x = \overline{abc}$ là số cần lập. Ta có :

– $a = 1$: $\overline{bc}$ có A_4^2 cách chọn $\Rightarrow$ lập được A_4^2 số.

– $a = 2$: nếu $b = 7$ thì c có 2 cách chọn $\Rightarrow$ lập được 2 số ;
nếu $b < 7$ thì b có 2 cách chọn và c có 3 cách chọn $\Rightarrow$ lập được 2.3 số.

Vậy ta lập được $A_4^2 + 2 + 2.3 = 20$ số thoả yêu cầu bài toán.

5. a) Số cách xếp loại ba con ngựa về nhất nhì ba là số chỉnh hợp chập 3 của 12 con ngựa $\Rightarrow$ có A_{12}^3 cách.

b) Số cách xếp loại ba con ngựa về đích đầu tiên là số tổ hợp chập 3 của 12 con ngựa $\Rightarrow$ có C_{12}^3 cách.

6. a) Mỗi ước số dương của A có dạng $U = 2^m.3^n.5^p.7^q$ trong đó $m, n, p, q \in Z$, $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 4$, $0 \le p \le 7$ và $0 \le q \le 6$. Do đó : m có 4 cách chọn ; n có 5 cách chọn ; p có 8 cách chọn và q có 7 cách chọn. Suy ra có 4.5.8.7 = 1120 ước số dương của A.

b) Vì $B = 490000 = 7^2.10^4 = 2^4.5^4.7^2$. Vì các ước số dương của B có dạng $U = 2^m.5^n.7^p$ trong đó $m, n, p \in Z$, $0 \le m \le 4$, $0 \le n \le 4$, $0 \le p \le 2$. Tương tự câu a, ta suy ra có 5.5.3 = 75 ước số dương của B.

7. Xếp vị trí cho A có 6 cách ; xếp vị trí cho B có 2 cách (bên trái hay bên phải A) ; xếp vị trí cho 4 người còn lại có 4! cách. Vậy có 6.2.4! cách xếp chỗ ngồi thoả yêu cầu bài toán.

8. a) Mỗi cách xếp 5 nam và 5 nữ vào 2 dãy ghế một cách tuỳ ý là một hoán vị của 10 người. Vậy có 10! cách xếp.

b) Chọn 1 dãy để xếp nam ngồi có 2 cách ; xếp 5 nam vào dãy ghế đã chọn có 5! cách ; xếp 5 nữ vào dãy ghế còn lại có 5! cách. Vậy có tất cả là 2.5!.5! cách xếp thoả điều kiện bài toán.

9. a) Vì C ngồi chính giữa nên C chỉ có 1 cách chọn ; bốn học sinh còn lại được xếp vào 4 chỗ còn lại nên ta có 4! cách xếp. Vậy có tất cả là 4! cách xếp thoả yêu cầu bài toán.

b) Chọn một đầu để xếp chỗ cho A có 2 cách ; xếp E vào đầu còn lại có 1 cách ; xếp 3 bạn còn lại vào 3 vị trí ở giữa có 3! cách. Vậy có tất cả là 2.3! cách sắp xếp thoả yêu cầu bài toán.

10. Sắp xếp 3 quyển sách Toán : có 3! cách ;

Sắp xếp 4 quyển sách Toán : có 4! cách ;

Sắp xếp 5 quyển sách Toán : có 5! cách ;

Số cách xếp ba nhóm sách lên kệ : có 3! cách.

Vậy tất cả có 3!.4!.5!.3! cách sắp xếp.

11. a) Đặt a = 024 ; b = 042 ; c = 204 ; d = 240 ; e = 420 ; f = 402.

Từ {a ; 1 ; 3 ; 5} ta lập được 3.3! = 18 số ;

Từ {b ; 1 ; 3 ; 5} ta lập được 3.3! = 18 số ;

Từ {c ; 1 ; 3 ; 5} ta lập được 4! = 24 số ;

Từ {d ; 1 ; 3 ; 5} ta lập được 4! = 24 số ;

Từ {e ; 1 ; 3 ; 5} ta lập được 4! = 24 số ;

Từ {f ; 1 ; 3 ; 5} ta lập được 4! = 24 số.

Vậy ta có tất cả là 2.18 + 4.4! = 132 số có 6 chữ số phân biệt mà các chữ số chẵn ở cạnh nhau.

b) Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Ta có các trường hợp sau :

TH1 : a_1 ; a_2 ; a_3 là số chẵn, ba số sau là các số lẻ :

* a_1 có 2 cách chọn ;

* $\overline{a_2a_3}$ có 2! cách chọn ;

* $\overline{a_4a_5a_6}$ có 3! cách chọn.

$\Rightarrow$ ta được 2.2!.3! = 24 số.

TH2 : a_1 ; a_2 ; a_3 là số lẻ, ba số sau là các số chẵn :

* $\overline{a_1a_2a_3}$ có 3! cách chọn ;

* $\overline{a_4a_5a_6}$ có 3! cách chọn.

$\Rightarrow$ ta được 3!.3! = 36 số.

Vậy ta có tất cả 24 + 36 = 60 số thoả bài toán.

12. Số các số có 5 chữ số phân biệt lập được là 5! = 120 số. Gọi E là tập hợp 120 số trên.

Ta có : nếu x = $\overline{abcde} \in$ E thì y = $\overline{(6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e)} \in$ E. Do đó trong E có 60 cặp (x ; y) thoả x + y = 66666. Vậy tổng 120 số trong E là 66666.60 = 3999960.

13. Gọi A là tập các số lập được. Trong đó :

– Có A_9^3 số có dạng $\overline{abc0}$, $8A_8^2$ số có dạng $\overline{abc1}$, ..., $8A_8^2$ số có dạng $\overline{abc9}$ $\Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng đơn vị trong các số thuộc A là

$$S_0 = 8A_8^2(1+2+...+8+9) = 20160 \text{ (đơn vị)}.$$

– Có A_9^3 số có dạng $\overline{ab0d}$, $8A_8^2$ số có dạng $\overline{ab1d}$, ..., $8A_8^2$ số có dạng $\overline{ab9d}$ $\Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng chục trong các số thuộc A là

$$S_1 = 8A_8^2(1+2+...+8+9) = 20160 \text{ (chục)}.$$

– Có A_9^3 số có dạng $\overline{a0cd}$, $8A_8^2$ số có dạng $\overline{a1cd}$, ..., $8A_8^2$ số có dạng $\overline{a9cd}$ $\Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng trăm trong các số thuộc A là

$$S_2 = 8A_8^2(1+2+...+8+9) = 20160 \text{ (trăm)}.$$

– Có A_9^3 số có dạng $\overline{1bcd}$, ..., A_9^3 số có dạng $\overline{9bcd}$ $\Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng ngàn trong các số thuộc A là

$$S_3 = A_9^3(1+2+..+8+9) = 22680 \text{ (ngàn)}.$$

Vậy tổng cần tìm là $22680*10^3 + 20160(10^2 + 10 + 1) = 24917760$.

14. TH1 : Xếp học sinh lớp 10 vào dãy 1 và dãy 3 và học sinh lớp 12 vào dãy 2 và dãy 4 :

10	12	10	12
10	12	10	12
10	12	10	12
10	12	10	12
10	12	10	12

– Số cách xếp học sinh lớp 10 là 10! ;

– Số cách xếp học sinh lớp 12 là 10!.

Vậy trường hợp này có $(10!)^2$ cách.

TH2 : Tương tự, xếp học sinh lớp 10 vào dãy 2 và dãy 4, học sinh lớp 12 vào dãy 1 và dãy 3, ta cũng có $(10!)^2$ cách.

Vậy tất cả có $2.(10!)^2$ cách xếp thoả bài toán.

15. Mỗi số thoả bài toán là một hoán vị của 5 chữ số 5, 6, 7, 8, 9 ⇒ có 5! = 120 số thoả bài toán.

Gọi E là tập gồm 120 số lập được. Ta có : $x = \overline{abcde} \in E$ thì $y = \overline{a'b'c'd'e'}$ cũng thuộc E, trong đó a' = 14 – a ; b' = 14 – b ; … ; e' = 14 – e. Vậy trong E có tất cả 60 cặp (x ; y) thoả :

$$x + y = 155554.$$

⇒ tổng các số thuộc E là S = 155554. 60 = 9333240.

16. Gọi a là số gồm ba chữ số khác nhau lập từ các số 1, 2, 3. Ta có 3! số a. Với mỗi số a, ta xét tập hợp A = {a ; 0 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}. Số thoả bài toán có dạng là $M = \overline{xyz}$ trong đó x, y, z phân biệt lấy từ A và luôn có mặt số a. Ta có các trường hợp sau :

– Nếu x = a thì $\overline{yz}$ có A_7^2 cách chọn ⇒ có A_7^2 số M ;

– Nếu y = a thì x có 6 cách chọn và z có 6 cách chọn ⇒ có 6.6 = 36 số M ;

– Nếu z = a thì x có 6 cách chọn và y có 6 cách chọn ⇒ có 6.6 = 36 số M.

Do đó từ A ta lập được $A_7^2 + 36.2 = 114$ số M.

Vậy số tất cả các số lập được là 3!.114 = 684 số.

17. a) Có A_7^3 cách chọn 3 ô xếp bi đỏ ; có C_4^3 cách chọn 3 ô trong 4 ô còn lại để xếp bi xanh. Vậy ta có $A_7^3.C_4^3 = 840$ cách xếp bi.

b) Có 3! cách phân chia các ô để xếp bi, sau đó ta có 3! cách xếp 3 bi đỏ vào 3 ô dành cho bi đỏ, có 1 cách xếp bi xanh vào ba ô dành xếp bi xanh. Vậy ta có 3!.3! = 36 cách xếp bi.

18. a) Chọn 5 ghế và xếp 5 người ngồi vào : có A_8^5 cách xếp.

b) Ta có 4 trường hợp sau :

– Ghế thứ 6, 7, 8 trống ;

– Ghế thứ 1, 7, 8 trống ;

– Ghế thứ 1, 2, 8 trống ;

– Ghế thứ 1, 2, 3 trống.

Mỗi trường hợp trên có 5! cách xếp 5 người ngồi vào. Vậy có tất cả là 4.5! cách sắp xếp.

c) Xem ba ghế nam ngồi là một nhóm ; 2 ghế nữ ngồi là một nhóm ; mỗi ghế trống là một nhóm. Ta có 5 nhóm. Chọn 2 nhóm ghế để xếp nam và nữ có A_5^2 cách. Trong số đó có 8 cách xếp nhóm nam và nhóm nữ ngồi kề nhau. Do đó ta có 20 – 8 = 12 cách chọn vị trí để xếp nam và nữ thoả bài toán. Ứng với mỗi cách xếp trên, ta có 3! cách xếp chỗ cho 3 nam vào ba ghế dành cho nam và có 2! cách xếp 2 nữ ngồi vào 2 vị trí dành cho nữ. Vậy ta có tất cả 12.3!.2! cách xếp thoả yêu cầu bài toán.

19. Chọn 3 nam xếp vào 3 ghế đầu tiên : có A_4^3 cách ;

Chọn 4 ghế trong 6 ghế còn lại xếp 1 nam và 3 nữ vào có A_6^4 cách.

Vậy ta có tất cả là $A_4^3.A_6^4$ cách sắp xếp.

20. Từ 6 chữ số trên ta lập được $A_6^5 = 720$ số có 5 chữ số khác nhau. Ta có :

– Số có dạng $\overline{abcd1}$: có A_5^4 số ;

– Số có dạng $\overline{abcd3}$: có A_5^4 số ;

– Số có dạng $\overline{abcd4}$: có A_5^4 số ;

– Số có dạng $\overline{abcd5}$: có A_5^4 số ;

– Số có dạng $\overline{abcd7}$: có A_5^4 số ;

– Số có dạng $\overline{abcd8}$: có A_5^4 số.

$\Rightarrow$ tổng các chữ số ở hàng đơn vị của 720 số trên là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8)A_5^4 = 3360.$$

Tương tự ta cũng có :

– Tổng các chữ số ở hàng chục của 720 số trên là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8)A_5^4 = 3360.$$

– Tổng các chữ số ở hàng trăm của 720 số trên là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8)A_5^4 = 3360.$$

– Tổng các chữ số ở hàng ngàn của 720 số trên là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8)A_5^4 = 3360.$$

– Tổng các chữ số ở hàng chục ngàn của 720 số trên là

$$(1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8)A_5^4 = 3360.$$

Vậy tổng của 720 số lập được là :

$$S = 3360(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 37332960.$$

21. a) Coi 5 bi trắng là một nhóm và mỗi bi xanh là một nhóm $\Rightarrow$ có 6 nhóm $\Rightarrow$ có 6! cách xếp bi thoả bài toán.

b) Chọn 5 ô kề nhau để xếp bi xanh : có 6 cách. Ứng với mỗi cách trên có 5! cách xếp 5 bi xanh vào 5 ô đã chọn và có 1 cách để xếp 5 bi trắng vào các ô còn lại $\Rightarrow$ có 6.5! = 6! cách xếp bi thoả bài toán.

22. Dùng 5 ô sau để xếp số thoả bài toán :

TH1 : Ô 1 là số 1 :

– Chọn 2 ô để xếp số 2 và 3 có A_4^2 cách ;

– Chọn 2 số trong các số {0 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9} xếp vào 2 ô còn lại có A_7^2 cách ;

$\Rightarrow$ ta có $A_4^2.A_7^2$ cách.

TH2 : Ô 1 là số 2 : tương tự, ta cũng có $A_4^2.A_7^2$ cách.

TH3 : Ô 1 là số 3 : tương tự, ta cũng có $A_4^2.A_7^2$ cách.

TH4 : Ô 1 là số khác 1, 2 và 3 :

– Chọn 3 ô xếp số 1, 2, 3 vào có A_4^3 cách ;

– Chọn một số thuộc {0 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9} xếp vào ô 1 có 6 cách ;

– Chọn một số xếp vào ô còn lại : có 6 cách ;

$\Rightarrow$ ta có $36.A_4^3$ cách.

Vậy ta có tất cả $3\,A_4^2.A_7^2 + 36A_4^3 = 2376$ số.

23. $C_6^2C_4^2C_2^2$.

24. Xem ba hộp là khác nhau ta có :

– Lấy 5 bánh bỏ vào hộp 1 có C_{15}^5 cách ;

– Lấy 5 bánh bỏ vào hộp 2 có C_{10}^5 cách ;

– Lấy 5 bánh bỏ vào hộp 3 có C_5^5 cách ;

$\Rightarrow$ có $C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5$ cách xếp. Vì các hộp như nhau nên số cách xếp bánh là $\dfrac{C_{15}^5C_{10}^5C_5^5}{3!}$ cách.

25. a) C_6^4 ; b) $C_6^4.4!5!$.

26. $C_{10}^2C_8^4 + C_{10}^3C_8^3$.

27. Cách 1 : $C_{15}^4 - (C_4^2.C_5^1.C_6^1 + C_5^2.C_4^1.C_6^1 + C_6^2.C_4^1.C_5^1) = 645$;

Cách 2 : $C_9^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 - C_4^4 - C_5^4 - C_6^4 = 645$.

28. a) $C_6^2.C_4^2.C_2^2 = 90$.

b) Cách 1 : $C_{12}^{6}-(C_{10}^{6}+C_{8}^{6}+C_{6}^{6}-1)$;

Cách 2 :

$C_2^1.C_4^1.C_6^4+C_2^1.C_4^2.C_6^3+C_2^1.C_4^3.C_6^2+C_2^1.C_4^4.C_6^1+C_2^2.C_4^1.C_6^3+C_2^2.C_4^2.C_6^2+C_2^2.C_4^3.C_6^1$.

29. $3.C_5^3.2!+3.5.C_4^2.1=150$.

30. $3.C_5^3.2!+3.5.C_4^2=150$.

31. $C_6^3.5!.3!$.

32. $C_4^3.C_7^1.C_6^2.C_4^2.C_2^2=2520$.

33. a) Cách 1 : $4.A_7^4-3.A_6^3=3000$;

Cách 2 : $A_7^4+3.6.A_6^3=3000$.

b) 2280.

§3. NHỊ THỨC NEWTON

1. Khai triển $(1-1)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-C_{2n}^5+....-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=0$

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

2. $S=(3-4)^{17}=-1$.

3. $(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+xC_{2n}^1+x^2C_{2n}^2+....+x^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+x^{2n}C_{2n}^{2n}$ (1).

Trong (1) :

Cho x = 1 ta được : $C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+....+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=2^{2n}$ (2) ;

Cho x = –1 ta được : $C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-....-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=0$ (3).

Cộng theo vế (2) và (3) ta có : $2(C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+C_{2n}^6+...+C_{2n}^{2n})=2^{2n}$

$\Rightarrow 2(1+S)=2^{2n}\Rightarrow S=2^{2n-1}-1$.

4. $\left(1+x^2\right)^n = C_n^0 + x^2C_n^1 + x^4C_n^2 + ... + x^{2k}C_n^k + ... + x^nC_n^n$ (1)

Trong (1), cho x = 1 ta được $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$.

Theo giả thiết ta suy ra $2^n = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$.

Theo (1) ta có hệ số của x^{12} tương ứng với k = 6. Do đó a = $C_{10}^6 = 210$.

5. Vì $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$ nên $n = 12$.

6. $$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k (x^{-\frac{2}{3}})^{17-k}.(x^{\frac{3}{4}})^k = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k x^{\left(\frac{2k-34}{3}+\frac{3k}{4}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k x^{\left(\frac{17k-136}{12}\right)}.$$

Số hạng không chứa x phải thoả $17k - 136 = 0 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{17}^8 = 24310$.

7. Số hạng thứ k + 1 trong khai triển của $\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$ là

$$T_{k+1} = C_5^k(3x^3)^{5-k}(-\frac{2}{x^2})^k = C_5^k.3^{5-k}.(-2)^k.x^{15-5k}.$$

T_{k+1} chứa $x^5 \Leftrightarrow 15 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển trên là $C_5^2.3^3.(-2)^2 = 1080$.

8. $$(1 + \frac{1}{x} + x^3)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k(x^{-1} + x^3)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k.\sum_{h=0}^{k} C_k^h(x^{-1})^{k-h}.x^{3h}$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\sum_{h=0}^{k} C_{10}^k.C_k^h.x^{4h-k}.$$

nên hệ số của x^2 trong khai triển trên phải thoả $4h - k = 2$.

14. $T = (2+1)^5 = 3^5$.

15. Vế trái $= (3-1)^{16} = 2^{16} =$ Vế phải.

16. Vế trái $= (1-10)^{2n} = (-9)^{2n} = 81^n =$ Vế phải.

17. $A = 3^n\left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = (3-1)^n = 2^n$.

18. $A = (4-1)^n = 3^n$; $B = (1+2)^n = 3^n$. Vậy A = B.

19. $\frac{55}{9}$.

20. Trong khai triển của $(1+x)^9$ có $C_9^9x^9$;

Trong khai triển của $(1+x)^{10}$ có $C_{10}^9x^9$;

Trong khai triển của $(1+x)^{11}$ có $C_{11}^9x^9$;

...

Trong khai triển của $(1+x)^{14}$ có $C_{14}^9x^9$.

Vậy hệ số của x^9 trong khai triển của tổng đã cho là

$C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + ... + C_{14}^9 = 3003$.

21. $(x^3 + xy)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^3)^{n-k}.(xy)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^{3n-2k}).(y^k) \Rightarrow$ số hạng trong tổng trên chứa $x^{25}y^{10}$ phải thoả $3n - 2k = 25$ và $k = 10 \Leftrightarrow k = 10$ và $n = 15$.
Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ là C_{15}^{10}.

22. $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0$

$\Leftrightarrow n = -13$ (loại) hay $n = 12$ (nhận).

Số hạng thứ k + 1 trong khai triển của biểu thức là :

$$T_{k+1} = C_{12}^k (x\sqrt[3]{x})^{12-k}\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k = C_{12}^k x^{\frac{4(12-k)}{3}}.x^{-\frac{28k}{15}} = C_{12}^k.x^{16-\frac{48k}{15}}$$

T_{k+1} không chứa $x \Leftrightarrow 16 - \frac{48k}{15} = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $T_6 = C_{12}^5 = 792$.

23. $P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x+3x^2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{h=0}^{k} C_k^h (2x)^{k-h}.(3x^2)^h$

$$= \sum_{k=0}^{10}\sum_{h=0}^{k} C_{10}^k C_k^h .2^{k-h}.3^h.x^{k+h}.$$

a) Hệ số của số hạng chứa x^4 phải thoả $\begin{cases} k+h=4 \\ 0 \le h \le k \le 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=4 \\ h=0 \end{cases} \vee \begin{cases} k=3 \\ h=1 \end{cases} \vee \begin{cases} k=2 \\ h=2 \end{cases}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển là $2^4.C_{10}^4.C_4^0 + 2^2.3.C_{10}^3.C_3^1 + 3^2.C_{10}^2.C_2^2 = 8085$.

b) $S = P(1) = 6^{10}$.

24. Áp dụng định lí Pascal $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ ta có :

Vế trái = $(C_n^k + C_n^{k-1}) + (C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) = C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1} = C_{n+2}^k$ = Vế phải.

25. *Cách 1 :* Áp dụng định lí Pascal, tương tự bài 24.

Cách 2 : Ta có $(1 + x)^n(1 + x)^3 = (1 + x)^{n+3}$ (1)

$(1 + x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2C_n^2 + .. + x^kC_n^k + ... + x^nC_n^n$

$(1 + x)^3 = C_3^0 + xC_3^1 + x^2C_3^2 + x^3C_3^3$

$\Rightarrow$ hệ số của x^k trong $(1 + x)^n(1 + x)^3$ là

$a_k = C_3^0C_n^k + C_3^1C_n^{k-1} + C_3^2C_n^{k-2} + C_3^3C_n^{k-3} = C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3}$ (2).

Mặt khác hệ số của x^k trong khai triển của $(1+x)^{n+3}$ là C_{n+3}^k (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$.

27. Theo định lí Pascal ta có $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \Rightarrow C_n^{k-1} = C_{n+1}^k - C_n^k$.

Do đó : $C_{n-1}^{m-1} = C_n^m - C_{n-1}^m$;

$C_{n-2}^{m-1} = C_{n-1}^{m} - C_{n-2}^{m}$;

$C_{n-3}^{m-1} = C_{n-2}^{m} - C_{n-3}^{m}$;

. . . .

$C_{m}^{m-1} = C_{m+1}^{m} - C_{m}^{m}$;

$C_{m-1}^{m-1} = C_{m}^{m}$.

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

28. • Hệ số của x^n trong khai triển của $(1 + x)^n(1 + x)^n$ là :

$$C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + ... + C_n^{n-1}C_n^1 + C_n^nC_n^0$$

$$= (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 \; ; \qquad (1)$$

• Hệ số của x^n trong khai triển của $(1 + x)^{2n}$ là C_{2n}^n (2)

• Vì $(1 + x)^n(1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$ nên từ (1) và (2) ta có :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

29. a) Điều kiện : $n \geq 5$ và $n \in N$.

Ta có : $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4}.\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{n-1}{24} - \frac{n-1}{6(n-4)} - \frac{5}{4(n-4)} = 0 \Leftrightarrow (n-1)(n-4) - 4(n-1) - 30 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 22 = 0$

$\Leftrightarrow n = -2$ (loại) hay $n = 11$ (nhận).

b) Điều kiện : $0 \leq x \leq 5$, $x \in N$.

Ta có : $\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x} \Leftrightarrow 5.\frac{x!(5-x)!}{5!} - 2.\frac{x!(6-x)!}{6!} = 14.\frac{x!(7-x)!}{7!}$

$\Leftrightarrow 5 - \frac{2(6-x)}{6} = \frac{14(7-x)(6-x)}{6.7} \Leftrightarrow 5 - \frac{6-x}{3} = \frac{x^2 - 13x + 42}{3}$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (nhận) hay $x = 11$ (loại).

c) Điều kiện : $x \geq 2, x \in N$.

Ta có : $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x) \Leftrightarrow (P_x - 6). A_x^2 = 12(P_x - 6)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P_x = 6 \\ A_x^2 = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x(x-1) = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 4 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$$

d) Điều kiện : $0 \leq n \leq 14, x \in N$.

Ta có : $11 C_{28}^{2n} = 225 C_{24}^{2n-4} \Leftrightarrow 11\dfrac{28!}{(2n)!(28-2n)!} = 225\dfrac{24!}{(2n-4)!(28-2n)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{11.28.27.26.25}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} = 225$$

$$\Leftrightarrow 2n(2n-3)(2n-2)(2n-1) = 11.28.3.26$$

$$\Leftrightarrow (4n^2 - 6n)(4n^2 - 6n + 2) - 24024 = 0.$$

Đặt $U = 4n^2 - 6n + 1$ ta được : $(U - 1)(U + 1) - 24024 = 0 \Leftrightarrow U^2 = 24025$

$$\Leftrightarrow U = \pm 155 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4n^2 - 6n - 154 = 0 \\ 4n^2 - 6n + 156 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \text{ (nhận)} \\ n = -\dfrac{11}{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy $n = 7$.

e) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,\ x \geq y \geq 0, x \in N, y \in N \\ \dfrac{x!}{(x-y)!y!} = \dfrac{x!}{(x-y-2)!(y+2)!} \\ \dfrac{x!}{2!(x-2)!} = 153 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,\ x \geq y \geq 0 \\ \dfrac{1}{(x-y)(x-y-1)} = \dfrac{1}{(y+1)(y+2)} \\ x(x-1) = 306 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2,\ x \geq y \geq 0 \\ (x-y)(x-y-1) = (y+1)(y+2) \\ x = 18 \vee x = -17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ (18-y)(17-y) = (y+1)(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ 36y = 304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 8. \end{cases}$$

f) Điều kiện : $x \geq 3,\ x \in N$.

Ta có : $\frac{1}{2}A_{2x}^{2} - A_{x}^{2} \leq \frac{6}{x}C_{x}^{3} + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$

$\Leftrightarrow x(2x-1) - x(x-1) \leq (x-1)(x-2) + 10 \Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$

So sánh với điều kiện, ta tìm được nghiệm của bất phương trình là :

$$x = 3 \text{ hay } x = 4.$$