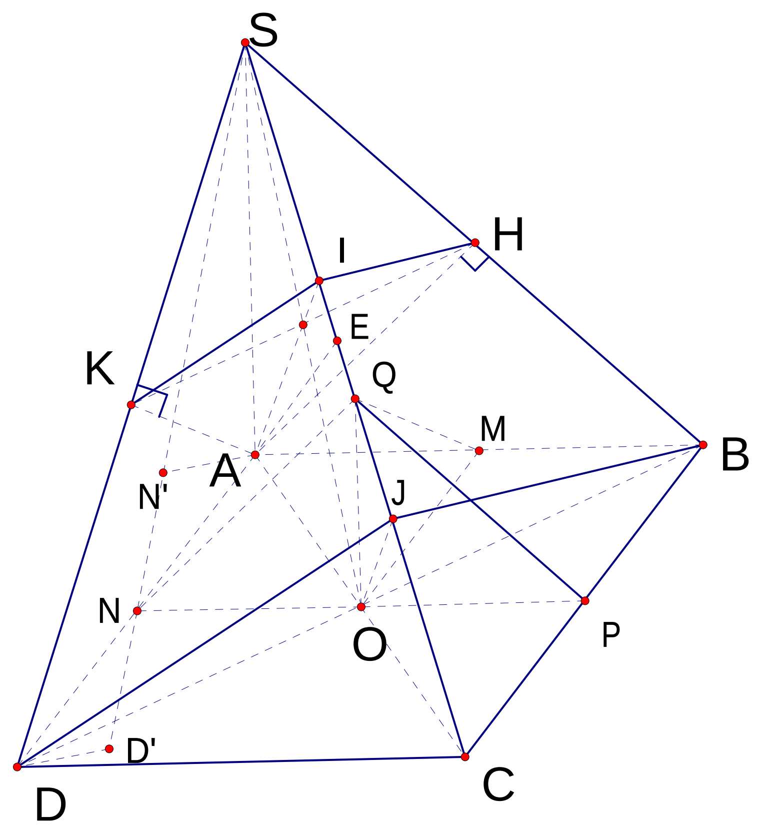
Đề bài: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. SA $\perp$ (ABCD), SA = $a\sqrt{3}$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD và J là hình chiếu của B trên SC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AD, BC, SC.



A. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng				
1) BC $\perp$ (SAB)	**2)** CD $\perp$ (SAD)	**3)** AH $\perp$ (SBC)	**4)** AK $\perp$ (SCD)	**5)** SC $\perp$ (AHK)
6) BD $\perp$ (SAC)	**7)** SC $\perp$ (AIK)	**8)** HK $\perp$ (SAC)	**9)** OM $\perp$ (SAB)	**10)** ON $\perp$ (SAD)
11) BC $\perp$ (OPQ)	**12)** AB $\perp$ (OMQ)	**13)** AD $\perp$ (ONQ)	**14)** SC $\perp$ (JBD)	

B. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc				
1) BC $\perp$ SB	**2)** CD $\perp$ SD	**3)** BD $\perp$ SO	**4)** BD $\perp$ SC	**5)** AH $\perp$ SC
6) AK $\perp$ SC	**7)** AI $\perp$ HK	**8)** DJ $\perp$ SC		

C. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc				
1) (SBC) $\perp$ (SAB)	**2)** (SCD) $\perp$ (SAD)	**3)** (AHK) $\perp$ (SBC)	**4)** (AHK) $\perp$ (SCD)	**5)** (SBD) $\perp$ (SAC)
6) (AHK) $\perp$(SAC)	**7)** (OQM) $\perp$(SAB)	**8)** (OQN) $\perp$(SAD)	**9)** (OPQ) $\perp$ ((SBC)	**10)** (SAC) $\perp$ (JBD)
11) (SBC) (JBD)	**12)** (SCD) $\perp$(JBD)			

D. Tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng				
1) C; (SAB)	**2)** C; (SAD)	**3)** A; (SBC)	**4)** A; (SCD)	**5)** A; (SBD)
6) O; (SAB)	**7)** O; (SAD)	**8)** O; (SBC)	**9)** O; (SCD)	**10)** S; (AHK)
11) S; (JBD)	**12)** Q; (ABCD)			

E. Tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng				
1) A; SC	**2)** O; SC	3)O;SB	**4)O;SD**	**5)**

F. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng				
1) AD; SC	**2)** AB; SC	**3)** BC; SA	**4)** CD; SA	**5)** AB; SO
6) CD; SO	**7)** BC; SD	**8)** AD; SB		

G. Tính góc giữa 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng				
1) SB; (ABCD)	**2)** SC; (ABCD)	**3)** SD; (ABCD)	**4)** SO; (ABCD)	**5) SC; (SAB)**
6) SC;(SAD)	**7)SO;(SAB)**	**8)SO;(SAD)**	**9) SA;(SCD)**	**10)SA;(SBC)**

H. Tính góc giữa 2 mặt phẳng				
1) (SBC); (ABCD)	**2)** (SCD); (ABCD)	**3)** (SBD); (ABCD)	**4)** (SBC); (SAB)	**5)** (SCD); (SAD)
6) (SCD); (SAB)	**7)** (SBC); (SCD)	**8)** (SBD); (SCD)	**9)** (SBD); (SBC)	

K.Các câu hỏi mang tính tổng hợp
Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. SA $\perp$(ABCD), SA = $a\sqrt{3}$. Gọi H, I, K, lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD và J là hình chiếu của B trên SC. Chứng minh rằng
1) AH,AK,AI cùng nằm trên một mặt phẳng.
b) Tứ giác AKIH có hai đường chéo vuông góc
2)Tính diện tích thiết diện cắt hình chóp bởi mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC
3) Tính thể tích khối chóp S.AKIH
4)Tính diện tích thiết diện cắt bởi hình chóp và mặt phẳng đi qua BD và vuông góc với SC tại J.
5) Tính thể tích khối chóp S.BDJ
6) Gọi G là giao điểm của BN và AC.Tính thể tích khối chóp QAGB.
8)Tính thể tích tứ diện C.JDB 9) Giả sử các mặt phẳng (ASB),(ASD) và (ABD) lần lượt tạo với mặt phẳng (SBD) các góc a,b.c. Chứng minh rằng: $a)\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1.$ $b)S^2_{\Delta SBD}=S^2_{\Delta ASB}+S^2_{\Delta ASD}+S^2_{\Delta ABD}$

LỜI GIẢI

A. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng				
1) BC $\perp$ (SAB)	**2)** CD $\perp$ (SAD)	**3)** AH $\perp$ (SBC)	**4)** AK $\perp$ (SCD)	**5)** SC $\perp$ (AHK)
6) BD $\perp$ (SAC)	**7)** SC $\perp$ (AIK)	**8)** HK $\perp$ (SAC)	**9)** OM $\perp$ (SAB)	**10)** ON $\perp$ (SAD)
11) BC $\perp$ (OPQ)	**12)** AB $\perp$ (OMQ)	**13)** AD $\perp$ (ONQ)	**14)** SC $\perp$ (JBD)	

1) BC $\perp$ AB (g/t hình vuông), BC $\perp$ SA (SA $\perp$ (ABCD),BC $\subset$ (ABCD)) $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAB)
2) CD $\perp$ AD (g/t hình vuông), CD $\perp$ SA (SA $\perp$ (ABCD),CD $\subset$ (ABCD)) $\Rightarrow$ CD $\perp$ (SAD)
3) AH $\perp$ SB (gt), AH $\perp$ BC (BC $\perp$ (SAB) (câu 1)) $\Rightarrow$ AH $\perp$ (SBC)
4) AK $\perp$ SD (gt), AK $\perp$ CD (CD $\perp$ (SAD) (câu 2)) $\Rightarrow$ AK $\perp$ (SCD)
5) AH $\perp$ (SBC) (do câu 1) $\Rightarrow$ AH $\perp$ SC,AK $\perp$ (SCD) (do câu 2) $\Rightarrow$ AK $\perp$ SC$\Rightarrow$ SC $\perp$ (AHK)
6) BD $\perp$ AC (g/t hình vuông), BD $\perp$ SA (SA $\perp$ (ABCD),BD $\subset$ (ABCD)) $\Rightarrow$ BD $\perp$ (SAC)

7) AK ⊥ (SCD) (do câu 2) ⇒ AK ⊥ SC, AI ⊥ SC (GT) ⇒ SC ⊥ (AIK)

8) Δ SAB = Δ SAD (c.g.c) ⇒ SB = SD và $\widehat{ASB} = \widehat{ASD}$, AH ⊥ SB và AK ⊥ SD (cmt) ⇒ có Δ SAH = Δ SAK (cạnh huyền, góc nhọn) ⇒ SH = SK ⇒ $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD}$ ⇒ HK // BD.Mặt khác ta lại có BD ⊥ (SAC) (câu 6) nên HK ⊥ (SAC)

9) OM là đường trung bình của tam giác ABC nên OM // BC, BC ⊥ (SAB) (cmt) ⇒OM⊥(SAB).

10) ON là đng trung bình của tam giác ABD nên ON// AB //CD, CD ⊥ (SAD) (cmt) ⇒ON⊥(SAD).

11) OP là đng trung bình của tam giác BDC ⇒ OP // CD,BC ⊥ CD (gt hình vuông) ⇒ BC ⊥ OP
OQ là đng trung bình của Δ SAC ⇒ OQ // SA,SA ⊥ (ABCD) ⇒ OQ ⊥ (ABCD) ⇒ BC ⊥ OQ
BC ⊥ (OPQ)

Hoặc có thể chứng minh:
OQ và PQ lần lượt là các đường trung bình của các tam giác SAC và SBC nên đồng thời có OQ // SA VÀ PQ // SB ⇒ (OPQ) // (SAB) mà BC ⊥ (SAB) (câu 1) ⇒ BC ⊥ (OPQ).

12) AB ⊥ AD (gt hv), AB ⊥ SA (SA ⊥ (ABCD) ⇒ AB ⊥ (SAD)
OQ và OM lần lượt là các đường trung bình của các tam giác SAC và ABC nên đồng thời có OQ // SA VÀ OM // BC//AD ⇒ (OMQ) // (SAD) lại có AB ⊥ (SAD) (cmt) ⇒ AB ⊥ (OMQ)

13) AD ⊥ AB (gt hv), AD ⊥ SA (SA ⊥ (ABCD) ⇒ AD ⊥ (SAB)
OQ và ON lần lượt là các đường trung bình của các tam giác SAC và ABD nên đồng thời có OQ // SA VÀ ON//AB ⇒ (ONQ) // (SAB) lại có AD ⊥ (SAB) (cmt) ⇒ AB ⊥ (OMQ)

14) SC ⊥ (AHK) (câu 5)) ⇒ A,H,I,K đồng phẳng ⇒ (AHIK) ⊥ SC ⇒ SC ⊥ IH .
⇒Trong mp (SBC) có HI ⊥ SC, BJ ⊥ SC ⇒ BJ // HI, lại có BD // HK ⇒ (JBD) // (AHIK), ta lại có (AHIK) ⊥ SC (cmt) nên SC ⊥(JBD).

B. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc				
1) BC ⊥ SB	**2)** CD ⊥ SD	**3)** BD ⊥ SO	**4)** BD ⊥ SC	**5)** AH ⊥ SC
6) AK ⊥ SC	**7)** AI ⊥ HK	**8)** DJ ⊥ SC		

1) BC ⊥ (SAB) (câu 1 phần A), SB ⊂ (SAB) ⇒ BC ⊥ SB.
2) CD ⊥ (SAD) (câu 2 phần A), SD ⊂ (SAD) ⇒ CD ⊥ SD.
3) BD ⊥ (SAC) (câu 6 phần A), SO ⊂ (SAC) ⇒ BD ⊥ SO
4) BD ⊥ (SAC) (câu 6 phần A), SC ⊂ (SAC) ⇒ BD ⊥ SC
5) AH ⊥ (SBC) (câu 3 phần A), SC ⊂ (SBC) ⇒ AH ⊥ SC
6) AK ⊥ (SCD) (câu 4 phần A), SC ⊂ (SCD) ⇒ AK ⊥ SC
7) AI ⊂ (SAC) , HK ⊥ (SAC) (câu 8 phần A) ⇒ HK ⊥ AI
8) SC ⊥ (JDB) (câu 14 phần A), DJ ⊂ (JDB) ⇒ DJ ⊥ SC.

C. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc				
1) (SBC) ⊥ (SAB)	**2)** (SCD) ⊥ (SAD)	**3)** (AHK) ⊥ (SBC)	**4)** (AHK) ⊥ (SCD)	**5)** (SBD) ⊥ (SAC)
6) (AHK) ⊥(SAC)	**7)** (OQM) ⊥(SAB)	**8)** (OQN) ⊥(SAD)	**9)** (OPQ) ⊥ ((SBC)	**10)** (SAC) ⊥ (JBD)
11) (SBC) (JBD)	**12)** (SCD) ⊥(JBD)			

1) BC ⊥ (SAB) (câu 1 phần A), BC ⊂ (SBC) ⇒ (SBC) ⊥(SAB)
2) CD ⊥ (SAD) (câu 2 phần A), CD ⊂ (SCD) ⇒ (SCD) ⊥(SAD)
3) AH ⊥ (SBC) (câu 3 phần A), AH ⊂ (AHK) ⇒ (AHK) ⊥(SBC)
4) AK ⊥ (SCD) (câu 4 phần A), AK ⊂ (AHK) ⇒ (AHK) ⊥(SCD)
5) BD ⊥ (SAC) (câu 6 phần A), BD ⊂ (SBD) ⇒ (SBD) ⊥(SAC)

6) SC ⊥ (AHK) (câu 5 phần A), SC ⊂ (SAC) ⇒ (AHK) ⊥(SAC)
7) OM ⊥ (SAB) (câu 9 phần A), OM ⊂ (OQM)⇒ (OQM) ⊥(SAB).
8) ON ⊥ (SAD)(câu 10 phần A), ON ⊂ (ONQ) ⇒(ONQ) ⊥ (SAD).
9) BC ⊥ (OPQ)(câu 11 phần A) , BC ⊂ (SBC) ⇒ (OPQ) ⊥ (SBC).
10) SC ⊥ (JBD)(câu 14 phần A) , SC ⊂ (SAC) ⇒ (SAC) ⊥ (JBD)
11) SC ⊥ (JBD)(câu 14 phần A) , SC ⊂ (SBC) ⇒ (SBC) ⊥ (JBD).
12) SC ⊥ (JBD)(câu 14 phần A) , SC ⊂ (SCD) ⇒ (SCD) ⊥ (JBD).

D. Tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng				
1) C; (SAB)	**2)** C; (SAD)	**3)** A; (SBC)	**4)** A; (SCD)	**5)** A; (SBD)
6) O; (SAB)	**7)** O; (SAD)	**8)** O; (SBC)	**9)** O; (SCD)	**10)** S; (AHK)
11) S; (JBD)	**12)** Q; (ABCD)			

1) CB ⊥ (SAB) (câu 1 phần A) ⇒ d(C,(SAB) = CB = a.
2) CD ⊥ (SAD) (câu 2 phần A) ⇒ d(,(SAD) = CD = a.
3) AH ⊥ (SBC) (câu 3 phần A) ⇒ d(A,(SBC) = AH.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Leftrightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

4) AK ⊥ (SCD) (câu 4 phần A) ⇒ d(A,(SCD) = AK

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Leftrightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Leftrightarrow AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

5) (SAC) ⊥(SBD) (câu 5 phần C.) (SAC) ∩ (SBD) = SO , hạ AE ⊥ SO ⇒ AE ⊥ (SBD)

Δ SAO vuông tại A nên có $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AO^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow$

d(A,(SBD) = AE = $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

6)OM ⊥ (SAB) (câu 9 phần A) ⇒ d(O,(SAB)) = OM = $\frac{a}{2}$

7)ON ⊥ (SAD) (câu 10 phần A) ⇒ d(O,(SAB)) = ON = $\frac{a}{2}$

8)(OPQ) ⊥ ((SBC) (câu 9 phần C), (OPQ) ∩ ((SBC) = PQ, ΔOPQ vuông tại O nên hạ AF ⊥ PQ thì AF ⊥ (SBC) ⇒ d(O,(SBC)) = AF.

$$\frac{1}{\mathrm{AF}^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{16}{3a^2}\Rightarrow AF=\frac{a\sqrt{3}}{4},$$

9)Dễ thấy d(O,(SCD) = d(O,(SBC) = $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

10) .• Câu 1 phần A có được BC ⊥ (SAB) ⇒ (SBC) ⊥ (SAB) mà (SAB) ∩ (SBC) = SB. Trong mặt phẳng (SAB) có AH ⊥ SB ⇒ (SAB) ⊥ (SBC) ⇒ AH ⊥ SC.

• Câu 2 phần A có được CD ⊥ (SAD) ⇒ (SCD) ⊥ (SAD) mà (SAD) ∩ (SCD) = SD. Trong mặt phẳng (SAD) có AK ⊥ SD ⇒ (SAD) ⊥ (SCD) ⇒ AK ⊥ SC.

⇒ AK ⊥ (AHK)

• SC ⊥ AK, SC ⊥ AI ⇒ SC⊥ (AKI) ⇒ SC ∩ (AHK) = I ⇒ d(S, (AHK)) = SI

• Tam giác SBC vuông tại B, tam giác SHI vuông tại I, hai tam giác này đồng dạng

Tính toán SB = $\sqrt{SA^2+AB^2}=2a$, SC = $\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{3a^2+2a^2}=a\sqrt{5}$

*)SH.SB = SA^2 ⇒ SH = $\dfrac{SA^2}{SB}=\dfrac{3a^2}{2a}=\dfrac{3a}{2}$

*)Δ SIH~Δ SBC nên ta có $\dfrac{SI}{SB}=\dfrac{SH}{SC}\Leftrightarrow SI=\dfrac{SH.SB}{SC}=\dfrac{\frac{3a}{2}.2a}{a\sqrt{5}}=\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Vậy d(S,(AHK) = $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

11)Tính d(S,(JBD)?

•Δ SJB~ΔSBC nên có $SJ=\dfrac{SB^2}{SC}=\dfrac{4a^2}{a\sqrt{5}}=\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$

12) OQ là đường trung bình của Δ SAC nên OQ = $\dfrac{1}{2}SA=a$

E. Tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng				
1) A; SC	**2)** O; SC	3)O;SB	**4)O;SD**	**5)**

1) Ta có AI ⊥ SC (gt) Δ SAC vuông tại A nên hạ $AI\perp SC$

$$\Rightarrow\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{5}{6a^2}$$

Vậy d(A,SC) = AI = $\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$

2) Vì O là trung điểm AC nên d(O,SC) = OJ = $\dfrac{1}{2}d(A,SC)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

3) SO = $SA^2+AO^2=\dfrac{5a^2}{2}$ $OB^2=\dfrac{a^2}{2}$ ⇒ d(O,SB) = $\dfrac{OS.OB}{\sqrt{SO^2+OB^2}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

4) d(O,CD) = d(O,SB) = $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

F. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng				
1) AD; SC	**2)** AB; SC	**3)** BC; SA	**4)** CD; SA	**5)** AB; SO
6) CD; SO	**7)** BC; SD	**8)** AD; SB		

1) AD// BC (gt hình vuông) ⇒(SBC) //AD ⇒ d(AD,SC) = d(A , (SBC)) = AH = = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (Câu 3 phần A)

2) AB // CD ⇒ (SCD) // AB ⇒ d(AB,SC) = d(A, (SCD)) = AK = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

3) AB ⊥ SA,AB ⊥ BC nên d(BC,SA) = AB = a

4) AD ⊥ SA,AD ⊥ CD nên d(CD,SA) = AD = a

5) NP//AB⇒ SO ⊂ (SNP) //AB ⇒ d(AB,SO) = d(A, (SNP))
⇒ Hạ AN' ⊥SN ,NP // CD mà DC ⊥ (SAD) nên NP ⊥ (SAD) ⇒ AN' ⊥NP ⇒ AN' ⊥ (SNP)
⇒ d(AB,SO) = d(A, (SNP) = AN'
⇒ Tính $\frac{1}{AN'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{13}{3a^2}$ ⇒ AN=$\frac{a\sqrt{39}}{3}$

6)Hạ DD' ⊥ SN ⇒ DD' // AN' nên ΔDND' = Δ ANN' ⇒ DD' = AN'

⇒ d(CD,SO) = DD' = AN' =$\frac{a\sqrt{39}}{3}$

7)BC//AD ⇒ BC // (SAD) chứa SD ⇒d(BC,SD) = d(BC,(SAD) = d(C,(SAD)) = CD = a.

8)AD// BC (gt hình vuông) ⇒(SBC) //AD ⇒ d(AD,SB) = d(A , (SBC)) = AH = = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (Câu 3 phần A)

G. Tính góc giữa 1 đường thẳng và 1 mặt phẳng				
1) SB; (ABCD)	**2)** SC; (ABCD)	**3)** SD; (ABCD)	**4)** SO; (ABCD)	**5) SC; (SAB)**
6) SC;(SAD)	**7)SO;(SAB)**	**8)SO;(SAD)**	**9) SA;(SCD)**	**10)SA;(SBC)**

1) SA ⊥ (ABCD) (gt) ⇒ AB là hình chiếu của SB trên (ABCD) ⇒ $(\widehat{SB,(ABCD)}) =$

$\widehat{SBA}$ Þ $\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3}$ Þ $\widehat{SBA} = 60^0$

2) SA ⊥ (ABCD) (gt) ⇒ AC là hình chiếu của SC trên (ABCD) ⇒ $(\widehat{SC,(ABCD)}) =$

$\widehat{SCA}$ Þ $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{6}}{2}^{0}$

3) SA ⊥ (ABCD) (gt) ⇒ AD là hình chiếu của SD trên (ABCD) ⇒ $(\widehat{SD,(ABCD)}) =$

$\widehat{SDA}$ Þ $\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3}$ Þ $\widehat{SDA} = 60^0$

4) SA ⊥ (ABCD) (gt) ⇒ AO là hình chiếu của SO trên (ABCD) ⇒ $(\widehat{SO,(ABCD)}) =$

$\widehat{SOA}$ Þ $\tan\widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = a\sqrt{6}$

5) BC ⊥ (SAB) ⇒ SB là hình chiếu của SC trên (SAB) ⇒ $(\widehat{SC,(SAB)}) = (\widehat{SC,SB} = \widehat{CSB}$

$\tan\widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

6) CD ⊥ (SAD) ⇒ SD là hình chiếu của SC trên (SAD) ⇒ $(\widehat{SC,(SAD)}) = (\widehat{SC,SD}) = \widehat{CSD}$

$\tan\widehat{CSB} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

7) OM ⊥ (SAB) ⇒ SM là hình chiếu của SO trên (SAB) ⇒ $(\widehat{SO,(SAB)}) = (\widehat{SO,SM}) = \widehat{OSM}$

$\tan\widehat{OSM} = \dfrac{OM}{SM}$, OM = $\dfrac{a}{2}$,SM = $\sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$

8)ON ⊥ (SAD) ⇒ SN là hình chiếu của SO trên (SAD) ⇒ $(\widehat{SO,(SAD)}) = (\widehat{SO,SN}) = \widehat{OSN}$

$\tan\widehat{OSN} = \dfrac{ON}{SN}$, OM = $\dfrac{a}{2}$,SN= $\sqrt{SA^2 + AN^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$

9) AK ⊥ (SCD) ⇒ SK là hình chiếu của SA trên (SCD) ⇒ $(\widehat{SA,(SCD)}) = (\widehat{SA,AK}) = \widehat{ASK}$

$\tan\widehat{ASK} = \dfrac{AK}{SK}$, SK= $\dfrac{3a}{2}$,AK = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{ASK} = \dfrac{AK}{SK} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASK} = 30^0$

10) AH ⊥ (SBC) ⇒ SH là hình chiếu của SA trên (SBC) ⇒ $(\widehat{SA,(SBC)}) = (\widehat{SA,AH}) = \widehat{ASH}$

$\tan\widehat{ASH} = \dfrac{AH}{SH}$, SH= $\dfrac{3a}{2}$,AH = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{ASH} = \dfrac{AH}{SH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASH} = 30^0$

H. Tính góc giữa 2 mặt phẳng				
1) (SBC); (ABCD)	**2)** (SCD); (ABCD)	**3)** (SBD); (ABCD)	**4)** (SBC); (SAB)	**5)** (SCD); (SAD)
6) (SCD); (SAB)	**7)** (SBC); (SCD)	**8)** (SBD); (SCD)	**9)** (SBD); (SBC)	

1) • (SBC) ∩ (ABCD) = BC ,BC⊥ AB (gt hv) (1)

•BC⊥ SA(do SA ⊥ (ABCD) ,BC ⊥AB (gthv) ⇒ BC ⊥ (SAB) ⇒ BC ⊥ SB (2)

• Từ (1) và (2) ta có $(\widehat{(SBC),(ABCD)}) = (\widehat{AB,SB}) = \widehat{SBA}$ và tan $\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$

2) • (SCD) ∩ (ABCD) = CD ,CD⊥ AD (gt hv) (1)

•CD⊥ SA(do SA ⊥ (ABCD) ,CD ⊥AD (gthv) ⇒ CD ⊥ (SAD) ⇒ CD ⊥ SD (2)

• Từ (1) và (2) ta có $(\widehat{(SCD),(ABCD)}) = (\widehat{AD,SD}) = \widehat{SDA}$ và tan $\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0$

3) • (SBD) ∩ (ABCD) = BD ,BD⊥ AC (gt hv) (1)

• Δ SAB = ΔSAD (c.g.c) ⇒ Δ SBD cân tại S và O là trung điểm BD ⇒ SO ⊥ BD (2)

• Từ (1) và (2) ta có $(\widehat{(SBD),(ABCD)}) = (\widehat{AO,SO}) = \widehat{SOA}$ và tan $\widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AO} = \sqrt{6}$

4) • SA⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ BC, BC⊥ AB ⇒ BC ⊥ (SAB) . Lại có BC ⊂ **(SBC)** ⇒ (SBC) ⊥ (SAB) hay $(\widehat{(SAB),(SBC)}) = 90^0$.

5) • SA⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ CD, CD⊥ AB ⇒ CD ⊥ (SAD) . Lại có CD ⊂ **(SCD)** ⇒ (SCD) ⊥ (SAD) hay $(\widehat{(SAD),(SCD)}) = 90^0$.

6) • SA⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ CD, CD⊥ AB ⇒ CD ⊥ (SAD) .

Lại có AK⊥ SD, AK ⊥ CD(do CD⊥ (SAD))⇒ AK ⊥ (SCD) (1)

• SA⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ AD, AD⊥ AB ⇒ AD ⊥ (SAB)(2)

Từ (1) và (2) ta có $(\widehat{(SCD),(SAB)}) = (\widehat{AD, AK}) = \widehat{DAK}$ và do

$\tan\widehat{SDA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0 \Rightarrow \widehat{DAK} = 30^0$

7) Ta đã có (SBC) ∩ (SCD) = SC , SC ⊥ (JBD) (cmt) ⇒ $(\widehat{(SBC),(SCD)}) = \widehat{BJD} = 2\widehat{BJO}$

*) Tam giác OBJ vuông tại J có $\tan\widehat{BJO} = \dfrac{OB}{JO} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

8) AK ⊥((SCD), AE ⊥ ((SBD) ⇒ $(\widehat{(SCD),(SBD)}) = (\widehat{AK, AE}) = \widehat{EAK}$, $\cos\widehat{EAK} = \dfrac{AE}{AK} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

9) AH ⊥((SBC), AE ⊥ ((SBD) ⇒ $(\widehat{(SBC),(SBD)}) = (\widehat{AH, AE}) = \widehat{EAH}$, $\cos\widehat{EAH} = \dfrac{AE}{AH} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

K.Các câu hỏi mang tính tổng hợp

Bài 1:Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. SA ⊥(ABCD), SA = $a\sqrt{3}$. Gọi H, I, K, lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD và J là hình chiếu của B trên SC. Chứng minh rằng

1) AH,AK,AI cùng nằm trên một mặt phẳng.
2) Tứ giác AKIH có hai đường chéo vuông góc
3)Tính diện tích thiết diện cắt hình chóp bởi mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC
4) Tính thể tích khối chóp S.AKIH
5)Tính diện tích thiết diện cắt bởi hình chóp và mặt phẳng đi qua BD và vuông góc với SC tại J.
6) Tính thể tích khối chóp S.BDJ
7) Gọi G là giao điểm của BN và AC.Tính thể tích khối chóp QAGB.
8)Tính thể tích tứ diện C.JDB

Bài giải:

1)Trong phần A từ câu 1),2) 3),4) cho ta kết luận SC ⊥ AH, SC ⊥ AK nên SC ⊥ (AHK)

• Từ giả thiết ta cũng có SC ⊥ AK, SC ⊥ AI ⇒ SC ⊥ (AKI) , qua A chỉ có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với SC vậy (AKH) ≡ (AKI) ⇒ AH,AK,AI cùng nằm trêm mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

2) Ta đã chứng minh được Δ SAB = Δ SAD ⇒ SB = SD và $\widehat{ASB} = \widehat{DSB}$ sau đó chứng minh được Δ SHA = Δ SKA ⇒ SH = SK ⇒ HK // BD

Đã chứng minh BD ⊥ (SAC) nên HK ⊥ (SAC), AI ⊂ (SAC) ⇒HK ⊥ AI.

3)Vì qua A chỉ có mặt phẳng duy nhất vuong góc với SC nên (AHK) ∩ SC = I vậy thiết diện chính là tứ giác AKIH.

• SB = SD = 2a, SH = SK = $\dfrac{3a}{2}$, SC = $a\sqrt{5}$, SI = $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$,BD = $a\sqrt{2}$

$$HK = \frac{SH.BD}{SB} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Có diện tích $S_{AKIH} = \dfrac{1}{2}AI.HK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{30}}{5}.\dfrac{3a\sqrt{2}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$

4) Cách 1:

• SI = $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$, $S_{AKIH} = \dfrac{3a^2\sqrt{15}}{20}$ nên $V_{S.AKIH} = \dfrac{1}{3}.S_{AKIH}.SI = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{3a^2\sqrt{15}}{20} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{20}$

Cách 2:

• SB = SD = 2a, SH = SK = $\dfrac{3a}{2}$, SC = $a\sqrt{5}$, SI = $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

- $\dfrac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{9}{16}\Rightarrow V_{S.AHK}=\dfrac{9}{16}V_{SABD}$

$\dfrac{V_{S.IKH}}{V_{S.BCD}}=\dfrac{SI}{SC}.\dfrac{SH}{SB}.\dfrac{SK}{SD}=\dfrac{27}{20}\Rightarrow V_{S.IHK}=\dfrac{27}{20}V_{SABD}$

$V_{S.AKIH}=(\dfrac{9}{16}+\dfrac{27}{80})V_{S.ABD}=\dfrac{9}{10}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{20}$

5) Diện tích thiết diện JBD là tổng diện tích hai tam giác JOB và JOD

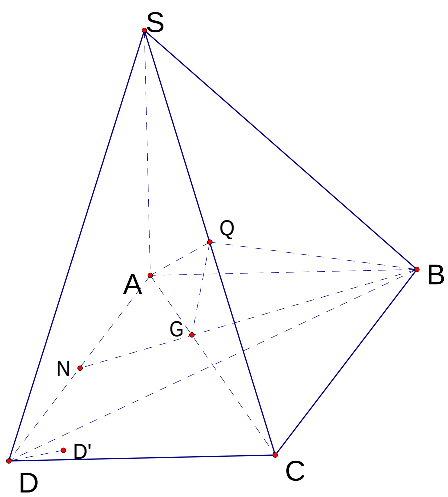
Mà OJ = $d(O,SC)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}, OD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ vậy

$S_{\Delta JOD}=\dfrac{1}{2}\text{OJ}.OD\Rightarrow S_{\Delta JBD}=\text{OJ}.OD=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$

6) Cách 1:

SJ = $\dfrac{4a^5\sqrt{5}}{5}\Rightarrow V_{S.BJD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta JBD}.SJ=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}.\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$

7) Dễ thấy G là trọng tâm của tam giác ABD



$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}a^2.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .Lại có

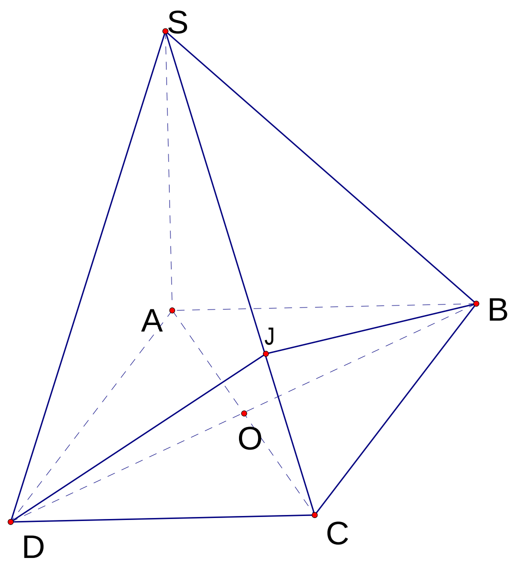
$\dfrac{V_{S.AQB}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SQ}{SC}.\dfrac{SB}{SB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.AQB}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

G là trọng tâm Δ ABD nên GO =

$\dfrac{1}{3}AO=\dfrac{1}{6}AC\Rightarrow CG=(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2})AC=\dfrac{2}{3}AC$

$\Rightarrow\dfrac{V_{C.QBG}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{CG}{CA}.\dfrac{CQ}{CS}.\dfrac{CB}{CB}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow V_{C.QBG}=\dfrac{1}{3}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_{Q.ABG}=(1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$



8)

Ta có SJ = $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$,SC = $a\sqrt{5}$ nên CJ = $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

$\frac{V_{C.JBD}}{V_{S.BCD}} = \frac{CD}{CD}.\frac{CJ}{CS}.\frac{CB}{CB} = \frac{1}{5}$, $V_{S.BCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{C.JBD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{30}$

Ta đã biết AE $\perp$ (SBD)

Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (SBD) ta có

$S_{\Delta ESB} = S_{\Delta ASB}.\cos a$ (1)

$S_{\Delta ESD} = S_{\Delta ASB}.\cos b$ (2)

$S_{\Delta EBD} = S_{\Delta ASB}.\cos c$ (3)

Mặt khác lần lượt xét các phép chiếu vuông góc lên các mặt phẳng (SAB),(SAD), (ABD) ta có

$S_{\Delta ASB} = S_{\Delta SBD}.\cos a$ (1') $\qquad$ $S_{\Delta ESB} = S_{\Delta SBD}.\cos^2 a$ (1")

$S_{\Delta ASD} = S_{\Delta SBD}.\cos b$ (2') Thế vào hệ trên ta có $S_{\Delta ESD} = S_{\Delta SBD}.\cos^2 b$ (2")

$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta SBD}.\cos c$ (3') $\qquad$ $S_{\Delta EBD} = S_{\Delta SBD}.\cos^2 c$ (3")

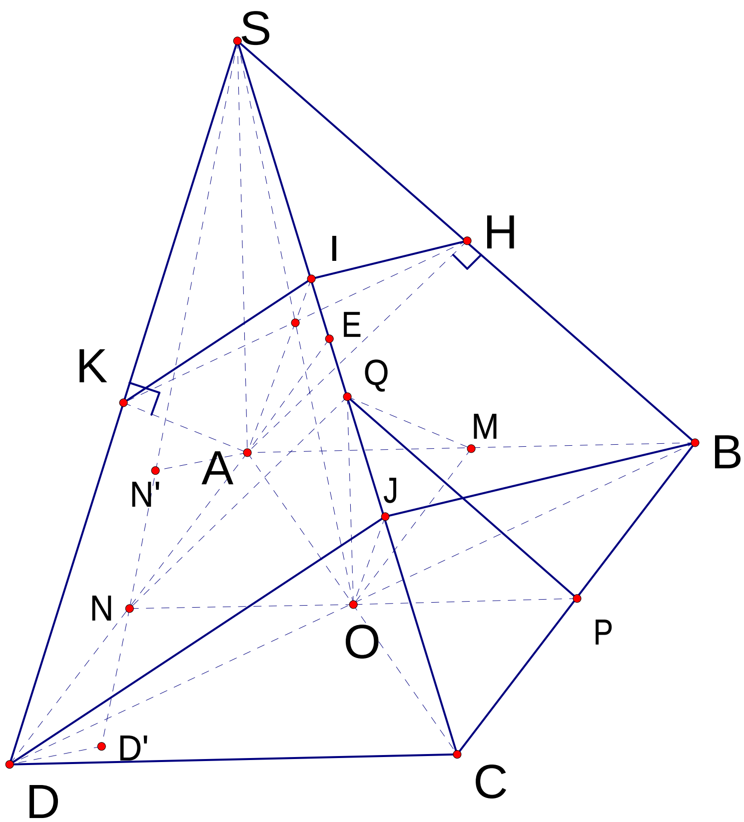
Cộng các vế của hệ cuối ta được $S_{\Delta SBD} = S_{\Delta SBD}(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) \Rightarrow \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$

b) Từ câu a) và hệ (1’),(2’),(3’) ta có

$S^2_{\Delta ASB} = S^2_{\Delta SBD}.\cos^2 a$

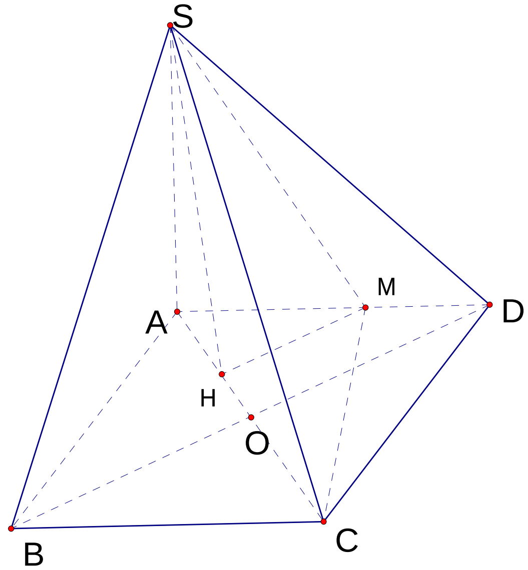
$S^2_{\Delta ASD} = S^2_{\Delta SBD}.\cos^2 b$ Cộng các vế và do kết quả câu a) ta có $b) S^2_{\Delta SBD} = S^2_{\Delta ASB} + S^2_{\Delta ASD} + S^2_{\Delta ABD}$

$S^2_{\Delta ABD} = S^2_{\Delta SBD}.\cos^2 c$



Bài 2 :Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a.Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho AM = x (0< x ≤ a).

a) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).
b) Nếu MH ⊥ AC tại H.Tìm vị trí của M để thể tích khối chóp SMCH lớn nhất.



Hạ MH ⊥ AC , do SA ⊥ (ABCD) và MH ⊂(ABCD) nên SA ⊥ MH ⇒ MH ⊥ (SAC) ⇒

D(M , (SAC)) = MH⇒ MH // OD

$$\frac{AM}{AD}=\frac{MH}{OD}\Rightarrow MH=\frac{AM.OD}{AD}=\frac{x.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a}=\frac{\mathrm{ax}\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.AOD}}=\frac{AM}{AD}.\frac{AH}{AO}=\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow V_{S.AHM}=\frac{x^2}{a^2}V_{S.AOD}$$

$$\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\frac{DS}{DS}.\frac{DC}{DC}.\frac{DM}{DA}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow V_{S.AHM}=\frac{2(a-x)}{a}V_{S.AOD}$$

$$V_{S.MHC}=V_{S.ACD}-V_{S.AHM}-V_{S.DMC}=(2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2(a-x)}{a})V_{S.AOD}$$

$$=\frac{x}{a}(2-\frac{x}{a})V_{S.AOD}\le\left(\frac{\frac{x}{a}+2-\frac{x}{a}}{2}\right)^2.V_{S.AOD}=V_{S.AOD}$$

Vậy thể tích của khối chóp S.MGC lớn nhất bằng

$V_{S.AOD}=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}a^2.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ khi và chỉ khi

$$\frac{x}{a}=2-\frac{x}{a}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=1\Leftrightarrow x=a\Leftrightarrow M\equiv D$$