CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

I.**Điểm, đường thẳng, mặt phẳng**

1/ Điểm.

a/ Hình ảnh : Dấu chấm , đỉnh của ngòi bút,...

b/ Ký hiệu thường dùng : A, B, C,...

2/ Đường thẳng.

a/ Hình ảnh: Phần chung của hai vách tường, Sợi dây căng, ...

b/ Ký hiệu thường dùng : a, b, c,...

3/ Mặt phẳng.

a/ Hình ảnh: vách tường, tấm bảng , ...(trải ra vô tận)

b/ Tên thường dùng: α , β ,....,(P),(Q),(R),....(Minh hoạ là hình bình hành)

4/ Hình biểu diễn của hình không gian

- Nét khuất : Chỉ những đoạn thẳng không thấy (bị khuất bởi một mặt phẳng trước nó)
- Nét đậm : Chỉ đoạn thẳng gần người vẽ hình đó
- Tam giác bất kỳ :Chỉ cho mọi tam giác (vuông , cân , đều ,... và chú thích giả thiết).
- Hình bình hành : Chỉ cho hình bình hành và các hình đặc biệt của nó
- Tính song song được bảo toàn
- Tỷ số hai đoạn thẳng được bảo toàn

II.Các quan hệ giữa điểm, đường, mặt.

- Điểm A thuộc đường thẳng d, ta viết $A\in d$
- Điểm A không thuộc đường thẳng d, ta viết $A\notin d$

  (Tương tự cho quan hệ giữa điểm và mặt phẳng)
- Đường thẳng d chứa trong mặt phẳng (P), ta viết: $d\subset (P)$.

(Đường thẳng d không chứa trong mặt phẳng (P) ta viết : $d \not\subset (P)$)

Chú ý: 1/ Điểm xem như phần tử 2/ Đường thẳng xem tập hợp điểm

III.Các tính chất thừa nhận. (Xem như khẳng định đúng)

1/ Có một và chỉ một đường thẳng qua hai điểm phân biệt

2/ Có một và chỉ một mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng. Mặt phẳng qua ba điểm A, B, C. Ký hiệu: (ABC) hay mp(ABC)

3/ Nếu một đường thẳng có hai điểm nằm trong mặt phẳng thì tất cả các điểm còn lại của đường thẳng đó đều thuộc mặt phẳng đã cho.

(A , B phân biệt có: $A\in (P)$ và $B\in (P)$ thì $AB \subset (P)$) ($M\in d$, $d\subset (P) \Rightarrow M\in (P)$)

4/ Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung , thì chúng còn có điểm chung khác nữa.

(Kết hợp 3: Hai mặt phẳng phân biệt nếu có điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng; Đường thẳng này gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đã cho)

5/ Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng

6/ Có ít nhất bốn điểm không đồng phẳng

IV. Xác định đường thẳng , mặtphẳng.

Thông thường thấy có ba cách xác định mặt phẳng:

- Mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng (mặt phẳng qua ba điểm A, B, C.Ký hiệu:(ABC))
- Mặt phẳng qua điểm A và đường thẳng d không qua A. Ký hiệu: (A ; d)

- Mặt phẳng chứa hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Ký hiệu: (d ; d')

Một số dạng toán cơ bản

I/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau

Chú ý:

- Cho mặt phẳng (ABC) thì: A, B, C $\in$ (ABC) ; AB , BC, CA $\subset$ (ABC)
- M $\in$ d , d $\subset$ (P) $\Rightarrow$ M$\in$ (P)
- A $\in$ (P) và A $\in$ (Q) thì A $\in$ (P) $\cap$ (Q)
- A $\in$ (P) $\cap$ (Q) và B $\in$ (P) $\cap$ (Q) thì AB = (P) $\cap$ (Q)

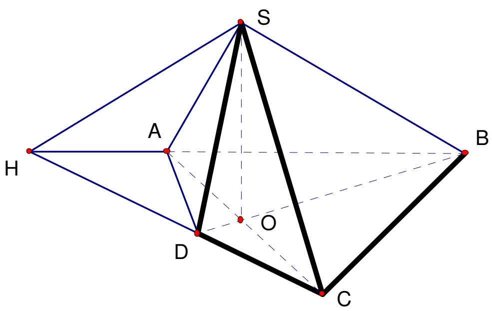
Bài **1**/ Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác ABCD có AB và CD không song song, S là điểm ở ngoài (P).

1/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD)

2/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SDC)

3/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)

Bài giải



1/ $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SAD) \\ A \in (SAB) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow SA = (SAB) \cap (SAD)$

2/ S $\in$ (SAB) $\cap$ (SDC) (1)

Gọi H = AB $\cap$ CD

$\begin{cases} H \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow H \in (SAB) \\ H \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow H \in (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ H $\in$ (SAB) $\cap$ (SDC) (2) .

(1) và (2) suy ra: SH = (SAB) $\cap$ (SDC)

3/ S $\in$ (SAC) $\cap$ (SBD) (3)

Gọi O = AC $\cap$ BD , $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ O $\in$ (SAC) $\cap$ (SBD) (4) . (3) và (4) suy ra: SO = (SAC) $\cap$ (SBD)

Bài **2**/ Cho tứ diện ABCD. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của AD và BC

1/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (JBC) và (KAD)

2/ Gọi M là điểm trên đoạn AB, N là điểm trên đoạn AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (JBC) và (DMN)

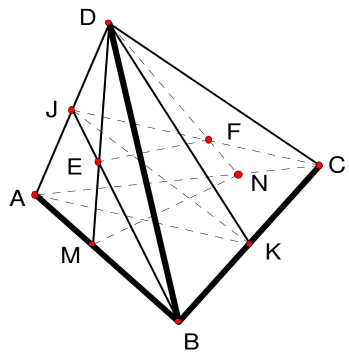
1/ $\begin{cases} J \in (JBC) \\ J \in AD, AD \subset (KAD) \Rightarrow J \in (KAD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ J $\in$ (JBC) $\cap$ (KAD) (1)

$\begin{cases} K \in (KAD) \\ K \in BC, BC \subset (JBC) \Rightarrow K \in (JBC) \end{cases}$

$\Rightarrow$ K $\in$ (JBC) $\cap$ (KAD) (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ JK = (JBC) $\cap$ (KAD)



2/ Gọi E = DM $\cap$ JB và F = DN $\cap$ JC

$\begin{cases} E \in DM, DM \subset (DMN) \Rightarrow E \in (DMN) \\ E \in JB, JB \subset (JBC) \Rightarrow E \in (JBC) \end{cases}$ Suy ra: E $\in$ (DMN) $\cap$ (JBC) (3)

$\begin{cases} F \in DN, DN \subset (DMN) \Rightarrow F \in (DMN) \\ F \in JC, JC \subset (JBC) \Rightarrow F \in (JBC) \end{cases}$ Suy ra: F ∈ (DMN) ∩ (JBC) (4)

(3) và (4) suy ra: EF = (DMN) ∩ (JBC)

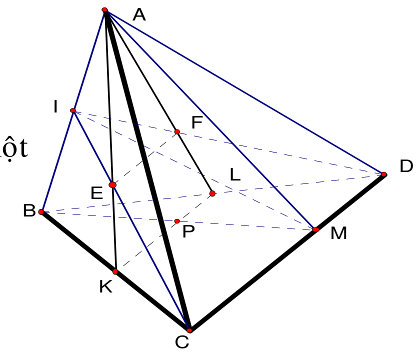
Bài **3**/ Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh AB, M là điểm thay đổi trên cạnh CD, P là trung điểm của BM

1/ Chứng minh rằng IM và AP mỗi đường luôn nằm trong một mặt cố định

1/ I ∈ (ICD).M∈ CD , CD ⊂ (ICD) .

Vậy: IM ⊂ (ICD) cố định phẳng cố định khi M thay đổi

2/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cố định trên



Gọi K, L lần lượt là trung điểm BC, BD. P∈ KL, KL ⊂ (AKL) ⇒ P∈ (AKL).

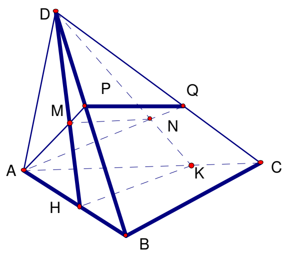
A, P ∈ (AKL) ⇒ AP ⊂ (AKL) cố định

2/ Gọi E = AK ∩ IC và F = AL ∩ ID

$\begin{cases} E \in AK, AK \subset (AKL) \Rightarrow E \in (AKL) \\ E \in IC, IC \subset (ICD) \Rightarrow E \in (ICD) \end{cases}$ Suy ra: E ∈ (AKL) ∩ (ICD) (1)

$\begin{cases} F \in AL, AL \subset (AKL) \Rightarrow F \in (AKL) \\ F \in ID, ID \subset (IDC) \Rightarrow F \in (IDC) \end{cases}$ Suy ra: F ∈ (AKL) ∩ (IDC) (2)

(1) và (2) suy ra: EF = (AKL) ∩ (IDC)



Bài **4**/ Cho tứ diện DABC. Gọi M là điểm trong tam giác DAB và N là điểm trong tam giác DAC

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (DBC)

b/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (ABC)

Giải

a/ Gọi P = AM∩DB và Q = AN∩DC

$\begin{cases} P \in AM, AM \subset (AMN) \Rightarrow P \in (AMN) \\ P \in BD, BD \subset (DBC) \Rightarrow P \in (DBC) \end{cases} \Rightarrow P \in (AMN) \cap (DBC)$ (1)

$\begin{cases} Q \in AN, AN \subset (AMN) \Rightarrow Q \in (AMN) \\ Q \in CD, CD \subset (DBC) \Rightarrow Q \in (DBC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (AMN) \cap (DBC)$ (2)

(1) và (2) suy ra: $PQ = (AMN) \cap (DBC)$

b/ Gọi H = DM∩AB và K = DN∩AC

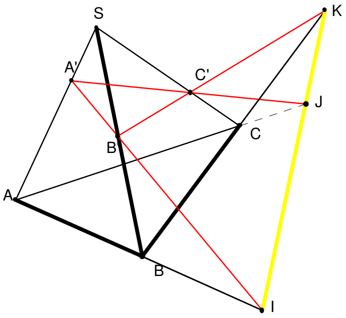
$\begin{cases} H \in DM, DM \subset (DMN) \Rightarrow H \in (DMN) \\ H \in AB, AB \subset (ABC) \Rightarrow H \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow H \in (DMN) \cap (ABC)$ (1)

$\begin{cases} K \in DN, DN \subset (DMN) \Rightarrow K \in (DMN) \\ K \in CA, CA \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow K \in (DMN) \cap (ABC)$ (2)

(1) và (2) suy ra: $HK = (DMN) \cap (ABC)$

II / Chứng minh ba điểm thẳng hàng: Là chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt

Bài 1/ Cho tứ diện SABC. Trên các đoạn SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Gọi I = $A'B'$ ∩ AB, J = $A'C'$ ∩ AC, I = $B'C'$ ∩ BC.Chứng minh I, J, K thẳng hàng



$$\begin{cases} I \in AB, AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC) \\ I \in A'B', A'B' \subset (A'B'C') \Rightarrow I \in (A'B'C') \end{cases}$$

Suy ra: I ∈ (ABC) ∩ (A'B'C') (1)

$$\begin{cases} J \in AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow J \in (ABC) \\ J \in A'C', A'C' \subset (A'B'C') \Rightarrow J \in (A'B'C') \end{cases}$$

Suy ra: J ∈ (ABC) ∩ (A'B'C') (2)

$$\begin{cases} K \in BC, BC \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC) \\ K \in B'C', B'C' \subset (A'B'C') \Rightarrow K \in (A'B'C') \end{cases}$$

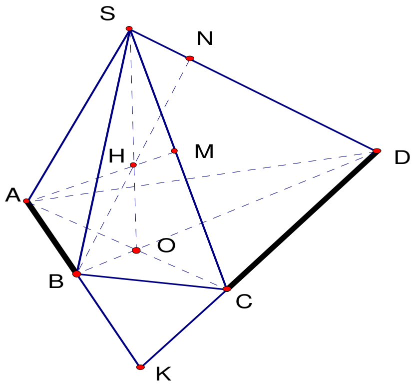
Suy ra: K ∈ (ABC) ∩ (A'B'C') (3)

(1) , (2) , (3) suy ra I, J , K thẳng hàng

Bài 2/ Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. M là điểm trên đoạn SC.

1/ Tìm giao điểm N của SD với mặt phẳng (ABM)

2/ Giả sử K = AB ∩ CD. Chứng minh M, N, K thẳng hàng



1/ Gọi O = AC ∩ BD, H = AM ∩ SO ⇒ N = BH ∩ SD

2/ M ∈ (ABM) ∩ (SCD) (1)

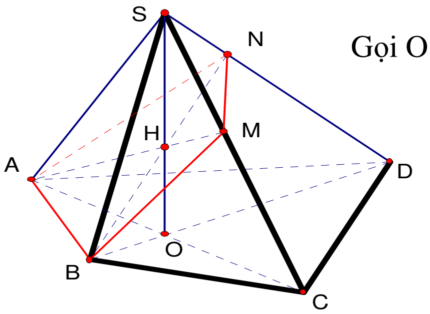
N ∈ (ABM) ∩ (SCD) (2)

K ∈ (ABM) ∩ (SCD) (3)

(1), (2) và (3) suy ra M, N, K thẳng hàng

III / Thiết diện: Một mặt phẳng cắt hình chóp (hình đa diện) thì cắt các mặt của hình chóp theo các đoạn giao tuyến, các đoạn giao tuyến này nối tiếp nhau tạo thành một đa giác.Đa giác này gọi là thiết diện hay mặt cắt

Bài tập 1/ Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. M là điểm trên đoạn SC.Tìm thiết diện của mặt phẳng (ABM) và hình chóp



Gọi O = AC ∩ BD, H = AM ∩ SO ⇒ N = BH ∩ SD

(ABM) ∩ (ABCD) = AB

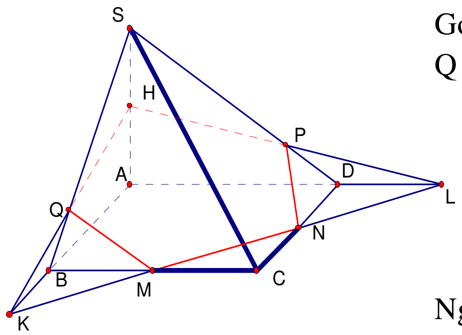
(ABM) ∩ (SBC) = BM

(ABM) ∩ (SCD) = MN

(ABM) ∩ (SAD) = NA

Vậy tứ giác ABMN là thiết diện cần tìm

Bài tập 2/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi H, M, N là lượt là trung điểm của SA, CB và CD. Tìm thiết điện của hình chóp với mặt phẳng (HMN)



Gọi L = MN ∩ AD, K = MN ∩ AB, P = HL ∩ SD và Q = HK ∩ SB

(HMN) ∩ (ABCD) = MN

(HMN) ∩ (SCD) = NP

(HMN) ∩ (SAD) = PH

(HMN) ∩ (SAB) = HQ

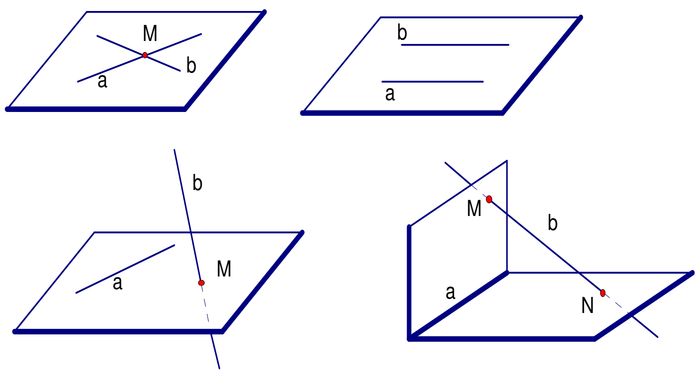
(HMN) ∩ (SBC) = QM

Ngũ giác MNPHQ là thiết diện cần tìm

Hai đường thẳng song song, hai đường thẳng chéo nhau

Vị trí của hai đường thẳng trong không gian

Có một mặt phẳng chứa a và b : cắt nhau, song song nhau , trùng nhau
(a và b đồng phẳng)



Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b(a,b không đồng phẳng hay a và b chéo nhau)

1/ Chứng minh hai đường thẳng song song

- Chỉ ra một mặt phẳng chứa a và b và giải thích a, b không có điểm chung
- Ba mặt phẳng đôi một cắt nhau thành ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó đôi một song song hoặc đồng qui
- a // b . a và b lần lượt chứa trong hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến c thì a// c hoặc b // c

có: $\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(Q)\cap(R)=b\\(R)\cap(P)=c\end{cases}$

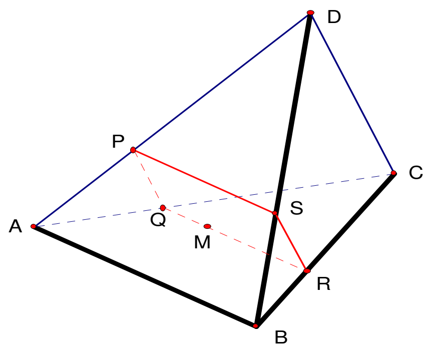
- Nếu a // b thì c // a (c //b)

- Nếu $a \cap b = M$ thì c qua M ($M \in c$) " a, b, c đồng qui tại M"
- Ta có thêm một cách tìm giao tuyến: Tìm một điểm chung và một đường thẳng song song với nó

2/ Đường thẳng song song mặt phẳng.

- $d \,//\, (P) \Leftrightarrow d \cap P = \varnothing$
- $d \not\subset (P)$. $d \,//\, a$, $a \subset (P) \Rightarrow d \,//\, (P)$
- $d \,//\, (P)$, $(Q) \supset d \Rightarrow d \,//\, a = (P) \cap (Q)$

Bài 1/ Cho tứ diện ABCD. M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB và CD. Xác định thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện



$AB \,//\, (\alpha) \Rightarrow (ABC) \cap (\alpha) = QR \,//\, AB$ (1)

($Q \in AC$, $R \in BC$)

$CD \,//\, (\alpha) \Rightarrow (DBC) \cap (\alpha) = RS \,//\, DC$ (2)

($S \in BD$)

$AB \,//\, (\alpha) \Rightarrow (DAB) \cap (\alpha) = SP \,//\, AB$ (3)

($P \in AD$)

$CD \,//\, (\alpha) \Rightarrow (ACD) \cap (\alpha) = PQ \,//\, CD$ (4)

(1) và (3) $\Rightarrow$ QR // SB (5)

(2) và (4) $\Rightarrow$ RS // PQ (6)

(5) và (6) $\Rightarrow$ PQRS là hình bình hành

Bài 2/ Cho tứ diện ABCD.Gọi M và N lần lượt là trọng tâm tam giác ABD và ACD. Chứng minh MN // (BCD) và MN // (ABC)

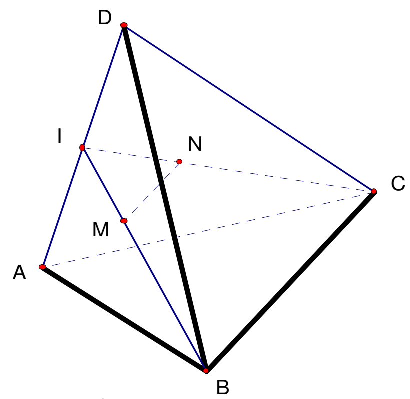
Giải

Gọi I là trung điểm AD. Ta có:

$\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{IC} \left(= \frac{1}{3} \right)$ nên MN // BC

$MN \,//\, BC$, $BC \subset (BCD) \Rightarrow MN \,//\, (BCD)$

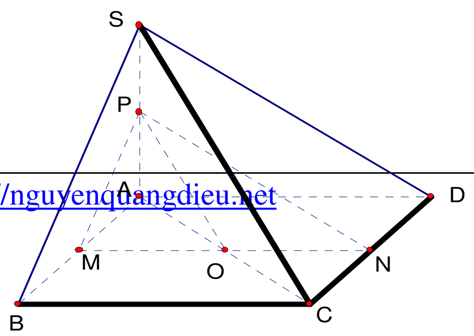
$MN \,//\, BC$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow MN \,//\, (ABC)$



Bài 3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD

1/ Chứng minh MN // (SBC) và MN // (SAD)

2/ Gọi P là trung điểm SA. Chứng minh SB // (MNP) và SC // (MNP)



1/ $MN \,//\, BC$, $BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \,//\, (SBC)$

$MN \,//\, AD$, $AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \,//\, (SAD)$

2/ $SB \,//\, PM$, $PM \subset (MNP) \Rightarrow SB \,//\, (MNP)$

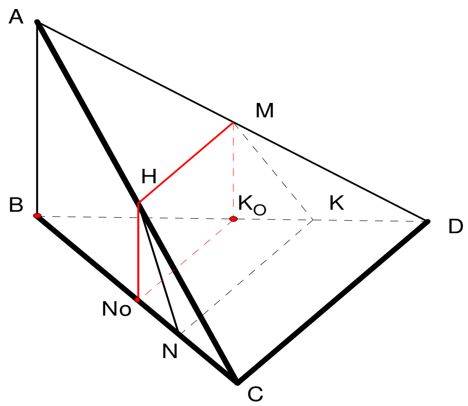
Gọi $O = AC \cap MN$

SC // OP , OP ⊂ (MNP) ⇒ SC // (MNP)

Bài 4 . Cho tứ diện ABCD, M là trung điểm AD, N là điểm trên BC. Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song CD.

a/ Xác định thiết diện của tứ diện bị cắt bởi (α)

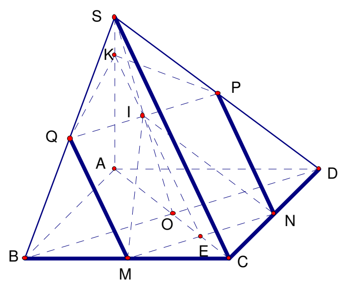
b/ Xác định vị trí của điểm N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành



a/ CD // (α) ⇒ (SCD) ∩ (α) = MH // CD (H∈ SC)

CD // (α) ⇒ (BCD) ∩ (α) = NK // CD (K∈ BD)

Suy ra: MH // NK ⇒ MHNK là hình thang



b/ MHNK là hình bình hành khi MH = NK , mà

$$MH = \frac{CD}{2} \Rightarrow NK = \frac{CD}{2}$$

Vậy NK là đường trung bình tam giác BCD, vậy N là trung điểm CD

Bài 5/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm các đoạn SO, BC và CD

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC)

b/ Xác định giao điểm K của SA và mp(IMN).

Chứng minh AK = 3 SK

c/ Xác định giao tuyến của (IMN) và (SBD)

d/ Tìm thiết diện của (IMN) cắt hình chóp

Giải

a/ Gọi E = MN∩AC. I, E là hai điểm chung của (IMN) và (SAC)

b/ K là giao điểm của IE và SA. IE là đường trung bình của tam giác SOC suy ra: IE // SC hay EK // SC. Trong tam giác SAC có: $\frac{AK}{AS} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}$ hay: 4AK = 3(AK + KS) hay AK = 3KS

c/ (IMN)∩(SBD) qua I và song song MN.

d/ Gọi P = (IMN) ∩ SD và Q = (IMN) ∩ SB. MNPKQ là thiết diện cần tìm

Quan hệ vuông góc

I . <u>Góc giữa hai đường thẳng</u>.

Góc giữa hai đường thẳng trong không gian là góc giữa hai đường thẳng lần lượt cùng phương với hai đường thẳng đã cho.

Xác định góc giữa hai đường thẳng a và b chéo nhau

- Từ một điểm A trên a, kẻ b'//b. g(a ; b) = g(a ; b')
- Từ một điểm B trên b , kẻ a'// a . g(a ; b) = g(a' ; b)
- Từ một điểm O tuỳ ý, kẻ a_1//a và b_1//b. g(a ; b) = g(a_1 ; b_1)
- $a \perp b$ khi góc giữa a và b là 90^0

II . <u>Định nghĩa đường thẳng vuông góc mặt phẳng</u> : $d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a$, $\forall a \subset (P)$

- Khi d đã vuông góc (P). Với $a \subset (P)$ thì $a \perp d$
- Vẽ đường thẳng vuông góc mặt phẳng cho trước, vẽ đường thẳng đứng
- $d \perp (P)$ thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều vuông góc d
- Chứng minh $d \perp (Q)$ là chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (Q)
- Thông thường để chứng minh $a \perp b$ ta chứng minh $a \perp$ vuông góc mặt phẳng chứa b

Định lý ba đường vuông góc

Các kiến thức cần nhớ

- Hình chiếu vuông góc (hình chiếu) của điểm M xuống mặt phẳng (P): Qua M dựng đường (d) thẳng vuông góc (P).Giao điểm của (d) và (P) gọi là hình chiếu của M lên (P)
- Cho đường thẳng (d) vuông mặt phẳng (P). Hình chiếu của đường thẳng (d) xuống (P) là một điểm (Giao điểm của d và (P))
- Cho đường thẳng (d) không vuông góc (P). Trên (d) lấy hai điểm phân biệt M , N. Gọi M' và N' lần lượt là hình chiếu của M, N lên (d). Đường thẳng d'qua M', N'gọi là hình chiếu của (d) lên (P). Nếu (d) và (P) cắt nhau tại M, ta có $M' \equiv M$
- Góc hợp bởi đường thẳng và mặt phẳng

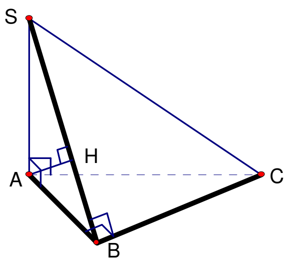
1/ (d) vuông góc (P) : Góc giữa (d) và (P) là 90^0

2/ (d) không $\perp$ (P): **Góc giữa (d) và (P) là góc giữa (d) và hình chiếu của (d) lên (P)**

Bài1/Cho tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc mặt phẳng (ABC).

a/ Chứng minh BC vuông góc (SAB)

b/ Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Chứng minh AH vuông góc SC



Giải

a/ $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên:

$BC \perp SA$, có $BC \perp AB$. Vậy: $BC \perp (SAB)$

b/ $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $AH \perp BC$ và có

$AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$ vì $SC \subset (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

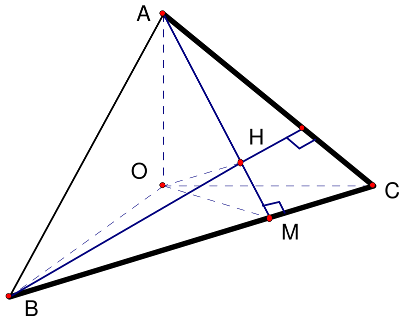
Bài 2/ Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. H là trực tâm tam giác ABC

a/ Chứng minh : BC vuông góc mặt phẳng (OAH)

b/ Chứng minh : OH vuông góc mặt phẳng (ABC)

c/ Chứng minh : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

d/ Chứng minh : $dt^2(ABC) = dt^2(OBC) + dt^2(OAB) + dt^2(OAC)$



Hướng dẫn giải

a/ $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow$ BC ⊥ OA,

có BC ⊥ AH nên BC ⊥ (OAH)

b/ Vì : BC ⊥ (OAH) nên OH ⊥ BC (1)

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow$ AC ⊥ OB,

có AC ⊥ BH nên AC ⊥ (OBH) ⇒ OH ⊥ AC (2)

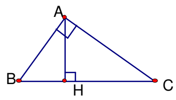
(1) và (2) ⇒ OH ⊥ (ABC)

a.

c/ Nhắc lại: 1/ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ 2/ $AB^2 = BH.BC$

3/ $AC^2 = CH.CB$ 4/ AH.BC = AB.AC

5/ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ 6/ $AH^2 = HB.HC$



Gọi M = AH ∩ BC. Tam giác AOM vuông tại O, đường cao OH và tam giác OBC vuông tại O, đường cao OM Ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OM^2}$ và $\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ suy ra đpcm

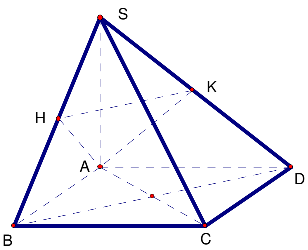
d/ $dt^2(ABC) = dt^2(OBC) + dt^2(OAB) + dt^2(OAC)$

$$dt^2(ABC) = \frac{1}{4}AM^2.BC^2 = \frac{1}{4}\left(OM^2 + OA^2\right)BC^2 = \frac{1}{4}OM^2BC^2 + \frac{1}{4}OA^2BC^2$$

$$= \frac{1}{4}OM^2BC^2 + \frac{1}{4}OA^2\left(OB^2 + OC^2\right) = \frac{1}{4}OM^2BC^2 + \frac{1}{4}OA^2OB^2 + \frac{1}{4}OA^2OC^2$$

$$= dt^2(OBC) + dt^2(OAB) + dt^2(OAC)$$

Bài 3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật,SA vuông góc mặt đáy. Kẻ đường cao AH của tam giác SAB và đường cao AK của tam giác SAD. Chứng minh SC vuông góc mặt phẳng (AHK)



Giải

SA ⊥ (ABCD) ⇒ BC ⊥ SA có BC ⊥ AB nên BC ⊥ (SAB), AH ⊂ (SAB) ⇒ AH ⊥ BC có AH ⊥ SB vậy AH ⊥ (SBC) ⇒ SC ⊥ AH (1)

SA ⊥ (ABCD) ⇒ CD ⊥ SA có CD ⊥ AD

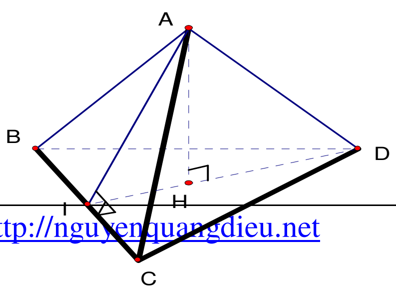
nên CD ⊥ (SAD), AK ⊂ (SAD) ⇒ AK ⊥ CD có AK ⊥ SD vậy AK ⊥ (SDC) ⇒ SC ⊥ AK (2)

(1) và (2) ⇒ SC ⊥ (AHK)

Bài 4/Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là hai tam giác cân đáy BC. Gọi I là trung điểm BC

a/ Chứng minh BC vuông góc AD

b/ Kẻ đường cao AH của tam giác ADI. Chứng minh AH vuông góc mặt phẳng (BCD)



Giải

a/ "Chứng minh BC vuông góc mặt phẳng chứa AD"

$\begin{cases} BC \perp ID \\ BC \perp IA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (IAD) \Rightarrow BC \perp AD$

b/ BC $\perp$ (IAD) $\Rightarrow$ AH $\perp$ BC và có AH $\perp$ ID nên
AH $\perp$ (BCD)

Bài 5/ Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với mặt đáy
1/ Chứng minh (SBC) $\perp$ (SAB)
2/ Cho SA = AB = a. Tính góc giữa SB và mặt phẳng (SAC)

Khoảng cách

1/ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng :

Cho điểm M và đường thẳng a. Gọi H là hình chiếu của M lên a.
Độ dài đoạn MH gọi là khoảng cách từ M đến a và ký hiệu: d(M ; a). $\boxed{\textbf{d(M ; a) = MH}}$

2/ Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:
Cho điểm M và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của M lên (P).Độ dài đoạn MH gọi là khoảng cách từ M đến (P) và ký hiệu: d(M ; (P)) $\boxed{\textbf{d(M ; (P)) = MH}}$

Chú ý. Ta có thể tìm đường thẳng d qua M và song song (P) **.** Khoảng cách từ M đến (P) là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên d đến (P)

3/ Các hệ quả

- a// (P). d(a; (P)) = d(M ; (P)) , với M $\in$ a
- (P) // (Q) . d[(P) ; (Q)] = d(M ; (Q)) , với M $\in$ (P)

4/ Đường vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

a/ Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Có duy nhất đường thẳng d cắt hai đường a,b vàvuông góc với a, b. d gọi là đường vuông góc chung của a và b

$$\begin{cases} d \perp a\,,\ M = d \cap a \\ d \perp b\,,\ N = d \cap b \end{cases}$$, MN gọi là đoạn vuông góc chung của a và b

b/ Khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b chéo nhau

- Là độ dài đoạn vuông góc chung của a và b
- Là khoảng cách từ đường thẳng a đến mặt phẳng chứa b và song song a
- Là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa a và b

Bài tập

Bài1/ Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy bằng a.

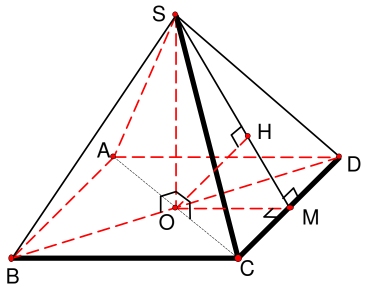
a/ Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy
b/ Tính khoảng cách từ tâm mặt đáy đến mp(SCD)

a/ Gọi: O = AC $\cap$ BD $\Rightarrow$ SO $\perp$ (ABCD). SO = d(S; (ABCD))

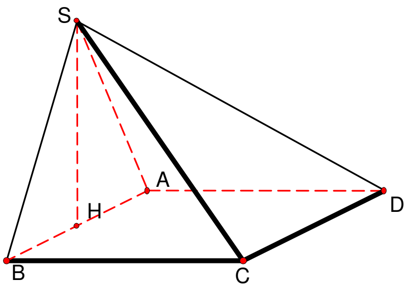
$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b/ $\begin{cases} CD \perp SM \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow (SCD) \perp (SOM)$. Kẻ đường cao OH của tam giác SOM. OH $\perp$ SM $\Rightarrow$ OH $\perp$ (SCD) $\Rightarrow$ OH = d(O ; (SCD))

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2+OS^2}=\frac{1}{\frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$



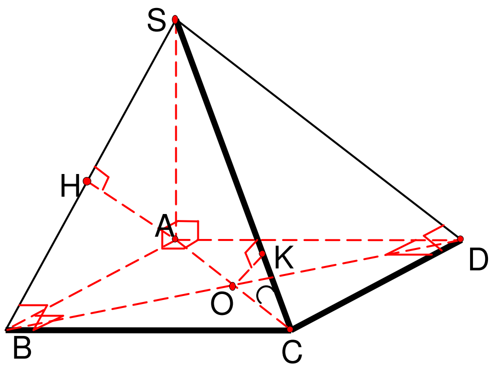
Bài 2/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt đáy. Tính khoảng cách từ S đến mặt đáy



Gọi H là trung điểm đoạn AB. (SAB) ⊥ (ABCD) , SH ⊥ AB ⇒ SH ⊥ (ABCD)

d(S; (ABCD)) = SH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 3/ Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Hai mặt (SAB) và (SAD) cùng vuông góc mặt đáy , SC tạo với đáy một góc 60^0. Tính:



a/ Khoảng cách giữa SB và AD

b/ Khoảng cách giữa SC và BD

c/ Khoảng cách giữa SB và CD

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$$

SC có hình chiếu là AC lên (ABCD) ⇒ SCA là góc giữa SC và mặt đáy ⇒

góc SCA bằng 60^0

Trong tam giác SAC vuông tại A.

- SA = ACtan60^0 = $a\sqrt{6}$

$$\begin{cases}AD\perp AB\\AD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)$$. Kẻ đường cao AH của tam giác SAB

$$\begin{cases}AH\perp SB\\AH\perp AD\end{cases}\Rightarrow$$ d(SB ; AD) = AH

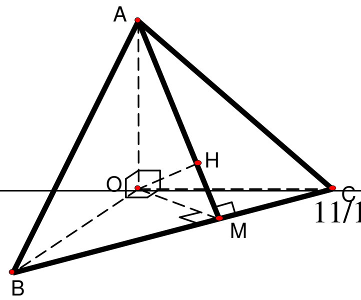
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{6a^2}=\frac{7}{6a^2}\Rightarrow AH=a\sqrt{\frac{6}{7}}$$

b/ Gọi K là hình chiếu của O lên SC

$$\begin{cases}BD\perp SA\\BD\perp AC\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$$. Ta có: BD⊥ OK và

SC ⊥ OK ⇒ d(SC; BD) = OK = OCsin60^0 = $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

c/ SB có hình chiếu là AB lên (ABCD) . BC ⊥ AB nên BC ⊥ SB có BC ⊥ CD , vậy:



d(SB ; CD) = BC = a

Bài 4/ Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau. Cho OA = 3cm, OB = 4cm và OC = 5cm.

a/ Tính diện tích tam giác ABC

b/ Tính khoảng cách từ O đến (ABC)

c/ Tính khoảng cách giữa OC và AB

Bài 5/ Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh a, cạnh bên bằng a. O = AC ∩BD.

a/ Tính khoảng cách từ S đến mặt đáy

b/ Tính khoảng cách từ O đến mặt bên

c/ Tính khoảng cách từ O đến cạnh bên

d/ Tính khoảng cách giữa SA và BD