I. Mở đầu

Giải tích tổ hợp là phần thứ ba của chương trình giải tích toán lớp 12, và là một trong những cấu thành không thể thiếu tạo nên các đề thi Toán trong các kỳ thi tốt nghiệp Trung học phổ thông, cũng như các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng.

Trong chuyên đề này chúng tôi giới thiệu với các bạn các bài toán về chỉnh hợp, tổ hợp. Các vấn đề chính sẽ được đề cập đến trong chuyên đề này là:

1. Chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức liên quan đến số tổ hợp, chỉnh hợp
2. Giải các phương trình, bất phương trình về các số tổ hợp, chỉnh hợp
3. Giải các bài toán về phép đếm bằng cách sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân

Học chuyên đề này các bạn sẽ biết cách sử dụng thành thạo các khái niệm về tổ hợp, chỉnh hợp để giải các bài toán liên quan, đặc biệt là các bài toán về phép đếm – bài toán quan trọng trong giải tích tổ hợp

1. Định nghĩa số chỉnh hợp

Giả sử E là một tập hợp có n phần tử. Cho trước số tự nhiên k $(0 \le k \le n)$. Một chỉnh hợp chập k các phần tử của E là một bộ (có kể đến thứ tự sắp xếp) k phần tử của E (hay là một cách sắp xếp thứ tự k phần tử khác nhau của E)

Số chỉnh hợp chập k các phần tử của E được kí hiệu qua A_n^k, và ta có

$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, ở đây n! = 1x2x....xn

<u>Thí dụ 1:</u> Cho tập hợp E = { 1,2,3,4,5 }. Hỏi có thể lập được bao nhiêu chữ số hàng trăm, mỗi số gồm 3 chữ số khác nhau được chọn từ tập hợp E.

Số các chữ số hàng trăm chính là số chỉnh hợp chập 3 của 5 và bằng

$$A_n^k = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ số}$$

2. Định nghĩa số hoán vị

Giả sử E là một tập hợp có n phần tử. Một hoán vị n phần tử của E là một chỉnh hợp chập n các phần tử của E (hay là một cách sắp xếp thứ tự n phần tử của E).

Số hoán vị n phần tử của E được kí hiệu qua P_n, và ta có $P_n = A_n^n = n!$

Thí dụ 2: Trong thí dụ 1, hãy tìm số các chữ số hàng vạn, mỗi số gồm năm chữ số khác nhau được chọn từ tập hợp E.

Số các chữ số hàng trăm chính là số hoán vị 5 phần tử của E và bằng

$P_5 = A_5^5 = \dfrac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$ số (lưu ý: ta quy ước 0! = 1)

3. Định nghĩa số tổ hợp

Giả sử E là một tập hợp có n phần tử. Cho trước số tự nhiên k $(0 \le k \le n)$. Một tổ hợp chập k các phần tử của E là một tập hợp con của E có k phần tử

Số tổ hợp chập k các phần tử của E được kí hiệu qua C_n^k, và ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Thí dụ 3: Một tổ học sinh có 8 em. Mỗi ngày cần 3 em trong tổ trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công trực nhật

Số cách phân công trực nhật chính là số tổ hợp chập 3 của 8 phần tử và bằng

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56$$

cách

Chú ý. Để phân biệt số chỉnh hợp với số tổ hợp ta chỉ cần lưu ý đến nhận xét sau:

+ Chỉnh hợp là cách chọn k phần tử trong n phần tử mà "quan tâm" đến thứ tự sắp xếp

+ Tổ hợp là cách chọn k phần tử trong n phần tử mà "không quan tâm" đến thứ tự sắp xếp

Việc phân biệt lúc nào sử dụng số chỉnh hợp, lúc nào sử dụng số tổ hợp là rất quan trọng. Vì nếu lựa chọn nhầm, kết quả phép tính sẽ hoàn toàn khác.

Vài tính chất cơ bản của số chỉnh hợp, số tổ hợp

Cho $0 \le k \le n$, với k, n là các số tự nhiên (trong đó n > 0) khi đó ta có

1/ $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$

2/ $C_n^0 = C_n^n = 1; A_n^0 = 1$

3/ $C_n^k = C_n^{n-k}$

4/ $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (đúng với mọi $n \ge k \ge 1$)

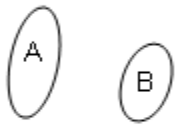
4. Hai quy tắc cơ bản của phép đếm

Để giải các bài toán về phép đếm, người ta sử dụng hai quy tắc chính sau đây:

Qui tắc cộng

+ Quy tắc cộng dựa trên sự kiện sau: Giả sử A, B là hai tập có hữu hạn phần tử và rời nhau, tức là $A \cap B = \varnothing$. Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp A. Khi đó

$|A \cup B| = |A| + |B|$



+ Phép đếm dựa vào hệ thức (1), tức là đã sử dụng "Quy tắc cộng"

Qui tắc nhân

+ Giả sử một phép chọn được thực hiện qua k bước liên tiếp. Bước thứ i có n_i cách thực hiện; i = 1,2,...,k. Khi đó có $n_1 x n_2 x ... x n_k$ cách khác nhau thực hiện phép chọn

+ Chú ý. Để giải các bài toán về phép đếm, ta cần sử dụng thành thạo hai quy tắc cộng và nhân nói trên. Trong một bài toán về phép đếm nói chung ta thường kết hợp sử dụng cả quy tắc cộng và quy tắc nhân.

1. Giải phương trình, bất phương trình liên quan đến số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị

Đây là một trong những nội dung cơ bản mà các bạn học sinh cần quan tâm đến. Để giải được các loại bài tập thuộc chuyên mục này, các bạn cần đặc biệt quan tâm đến điều say đây (điều mà nhiều bạn học sinh không chú ý nên bỏ qua): Điều kiện để một số chỉnh hợp, số tổ hợp tồn tại. Điều kiện đó như sau:

Để A_n^k, C_n^k có nghĩa, ta cần có n > 0; $n \geq k \geq 0$; n, k là các số nguyên

Khi giải các phương trình, bất phương trình liên quan đến số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị ta tiến hành theo các bước sau:

+ Đặt điều kiện để phương trình, bất phương trình có nghĩa (trong đó các bạn lưu tâm đến điều kiện để các số tổ hợp, số chỉnh hợp...trong đầu bài có nghĩa)

+ Sử dụng công thức A_n^k, C_n^k, P_n quy phương trình ban đầu về các phương trình quen thuộc (bậc hai, bậc ba...)

+ Đối chiếu với điều kiện ban đầu (chủ yếu là điều kiện về tính nguyên của nghiệm) để loại bỏ đi nghiệm ngoại lai

<u>Thí dụ 1</u> (Đề dự bị ĐH, CĐ khối A 2002)

Tìm số n nguyên dương thỏa mãn bất phương trình $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \leq 9n$

Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là

$$\begin{cases} n \geq 3 \\ n-2 \geq 0 \\ n \text{ nguyên} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n \text{ nguyên} \end{cases} \quad (1)$$

Đưa bất phương trình đã cho về dạng

$$\frac{n!}{(n-3)!} + 2\frac{n!}{(n-2)![n-(n-2)]!} \leq 9n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!} + 2\frac{(n-)!(n-1)n}{(n-2)!2!} \leq 9n$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n + (n-1)n \leq 9n \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 2n^2 - 8n \leq 0$$

Do n > 0 , nên từ (2) có

$n^2 - 2n - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq n \leq 4$ (3)

Do (1) nên từ (3) suy ra n = 3, n = 4 (4)

Vậy có hai giá trị cần tìm của n là n = 3, n = 4

<u>Thí dụ 2:</u> Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$$

- Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$n \geq 3$, n nguyên

- Viết lại phương trình đã cho dưới dạng sau đây (sử dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$)

$$C_n^2 C_n^2 + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^3 = 100$$

$$\Leftrightarrow (C_n^3 + C_n^2)^2 = 100 \quad (1)$$

Vì $C_n^3 + C_n^2 > 0$, nên (1)

$$\Leftrightarrow C_n^3 + C_n^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!3!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = 10$$

$$\Leftrightarrow n(n^2 - 3n + 2) + 3n(n-1) - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^3 - n - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n-4)(n^2 + 4n + 15) = 0 \Leftrightarrow n = 4$$

Giá trị n = 4 thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy n = 4 là giá trị duy nhất cần tìm của n

<u>Thí dụ 3:</u> Giải bất phương trình

$$\frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$$

Điều kiện để phương trình có nghĩa là:

$$\begin{cases} n+2 \geq 4 \\ n-1 > 0 \\ n+2 > 0 \\ n \text{ nguyên} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 2 \\ n \text{ nguyên} \end{cases} \quad (1)$$

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$\frac{(n+2)!}{(n+2-4)!(n+2)!} - \frac{143}{4(n-1)!} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n-2)!} - \frac{143}{4(n-1)!} < 0 \Leftrightarrow 4(n-1) - 143 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4n < 147 \Leftrightarrow n < \frac{147}{4}$$

Kết hợp với (1) suy ra $2 \leq n \leq 36$

Vậy các giá trị phải tìm là n = 2,3,4,... ,36

2. Các loại bài tập liên quan trực tiếp đến các định nghĩa của số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị

Trước hết ta xét các bài toán chứng minh các hệ thức của giải tích tổ hợp mà chỉ sử dụng các định nghĩa hoặc các tính chất cơ bản của các số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị.

Xét các thí dụ sau:

<u>Thí dụ 1:</u> Cho k, n là các số tự nhiên sao cho $n \geq k \geq 4$

Chứng minh hệ thức sau:

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$$

Áp dụng công thức: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ với

$n \geq k \geq 1$, ta có

$$C_{n+4}^k = C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1}$$
$$= \left(C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1}\right) + \left(C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}\right)$$
$$= C_{n+2}^k + 2C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}$$
$$= \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + 2\left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) + \left(C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}\right)$$
$$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$$
$$= C_n^k + C_n^{k-1} + 3\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + 3\left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right) + C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$$
$$= C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$$

Đó là đ.p.c.m

<u>Thí dụ 3</u>: Chứng minh rằng

$$P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2 = nk! A_{n+5}^5$$

Ta có:

$$P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2$$
$$= k!\frac{(n+1)!}{(n+1-2)!}\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}\frac{(n+5)!}{(n+5-2)!}$$
$$= k!\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\frac{(n+3)!}{(n+1)!}\frac{(n+5)!}{(n+3)!}$$
$$= k!\frac{(n+5)!}{(n-1)!} = nk!\frac{(n+5)!}{(n-1)!n}$$
$$= nk!\frac{(n+5)!}{n!} = nk!A_{n+5}^5$$

Đó là đ.p.c.m

<u>Thí dụ 4</u>: Chứng minh rằng

$$\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}$$

Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2^{100}} C_{100}^{50} < \frac{1}{10} \quad (1)$$

Ta có

$$\frac{1}{2^{100}} C_{100}^{50} = \frac{1}{2^{100}} \frac{100!}{(50!)(50!)}$$

$$= \frac{1.2.3...100}{(2.4.6...100)(2.4.6...100)} = \frac{1.3.5...99}{2.4.6...100}$$

(2)

Đặt $P = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}....\frac{97}{98}.\frac{99}{100}$;

$$Q = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}...\frac{98}{99}.\frac{100}{100}$$

Vì: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; ...; \frac{97}{98} < \frac{98}{99}; \frac{99}{100} < \frac{100}{100}$

Từ đó suy ra: 0 < P < Q.

Mặt khác $PQ = \frac{1}{100}$, suy ra $P^2 < PQ = \frac{1}{100} \Rightarrow P < \frac{1}{10}$

Lại có: $2P = \frac{3}{4}.\frac{5}{6}....\frac{97}{98}.\frac{99}{100}$ do $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}; \frac{5}{6} > \frac{4}{5}; ...; \frac{99}{100} > \frac{98}{99}$

$\Rightarrow 2P > Q \Rightarrow 2P^2 > PQ = \frac{1}{10} \Rightarrow P > \frac{1}{10\sqrt{2}}$ từ $\frac{1}{10} < P < \frac{1}{10\sqrt{2}} \Rightarrow$ đ.p.c.m

3. Các bài toán về phép đếm

- Để giải các bài toán về phép đếm người ta luôn luôn sử dụng hai quy tắc trong phép đếm là: quy tắc cộng và quy tắc nhân.

- Khi giải các bài toán về phép đếm người ta có hai phương pháp giải chính

1/ Phương pháp trực tiếp: Phương pháp này xuất phát từ nguyên lí "Hỏi gì, đếm nấy", tức là giải thẳng vào các yêu cầu bài toán đặt ra. Bằng cách sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân một cách hợp lí, ta sẽ giải được các bài toán đã cho

2/ Phương pháp gián tiếp: Phương pháp này xuất phát từ nguyên lí "Đếm những cái không cần đếm, để biết được những cái cần đếm", hay nói cách khác ta đã sử dụng nguyên lí "lấy phần bù"

Chú ý: rằng bài toán nào nói chung cũng có thể giải được bằng cả hai phương pháp nói trên. Dí nhiên ta sẽ sử dụng phương pháp nào ngắn gọn hơn. Tùy dạng của bài toán ban đầu mà ta lựa chọn phương pháp thích hợp.

Thí dụ 1: Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 bạn học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối đều có ít nhất 1 em được chọn.

Gọi A là tập hợp tất cả cách cử 8 học sinh dự trại hè (lựa chọn từ 18 em)

Gọi B là tập hợp tất cả cách cử 8 học sinh dự trại hè mà không đủ cả 3 khối

Gọi A là tập hợp cần tìm (tức là thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Ta có $A = B \cup C; B \cap C = \varnothing$

Vì thế theo quy tắc cộng ta có $|A| = |B| + |C|$, hay $|C| = |A| - |B|$ (1)

Tính $|A|$ Dễ thấy $|A|$ chính là số cách chọn 8 em từ 18 em (không quan tâm đến thứ tự sắp xếp), vậy

$|A| = C_{18}^{8} = \frac{18!}{10!8!} = 43758$ (2)

Tính $|B|$ Để ý rằng vì max{7,6,5} = 7< 8, do đó khi chọn 8 em học sinh thì không thể chọn chỉ trong một khối lớp. Gọi B_1, B_2, B_3 tương ứng là cách chọn 8 em học sinh trong các khối 12, 11; 12,10 ; 11,10. Như vậy $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ trong đó B_1, B_2, B_3 là ba tập hợp trong đó đôi một rời nhau. Theo quy tắc cộng ta có: $|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3|$ (3) Dễ thấy: $|B_1| = C_{13}^8 = \frac{13!}{5!8!} = 1287$; $|B_2| = C_{12}^8 = \frac{12!}{4!8!} = 495$;

$|B_3| = C_{11}^8 = \frac{11!}{3!8!} = 165$ - Từ đó thay vào (3), và có: $|B| = 1947$ (4)

- Từ (2) (4) (1) suy ra -> $|C| = 43758 - 1947 = 41811$
- Vậy số cách chọn là 41811.

Nhận xét:

- Trong bài trên ta đã sử dụng "phương pháp gián tiếp", cụ thể đến tập hợp B là tập hợp "không cần đến", rồi sử dụng phép lấy "phần bù" suy ra độ lớn của tập hợp C cần đến (ở đây xét trong "vũ trụ "A, thì C là phần bù của B)
- Qua thí dụ 1, ta thấy chúng ta đã 2 lần sử dụng "quy tắc cộng"

Thí dụ 2: Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3

Ta "gắn liền" hai số 2,3 với nhau và coi đó là "1 số _số kép". Có hai cách "gắn liền" (hoặc là gắn 23, hoặc 32). Như vậy ta có $n_1 = 2$

Bây giờ ta quy về bài toán: Từ 5 số (trong đó có "số kép") hãy lập ra các số có 5 chữ số khác nhau. Do trong 5 số này có số 0 nên

Có $n_2 = 4$ cách chọn số hàng vạn

Có $n_3 = 4$ cách chọn số hàng nghìn

Có $n_4 = 3$ cách chọn số hàng trăm

Có $n_5 = 2$ cách chọn số hàng chục

Có $n_6 = 1$ cách chọn số hàng đơn vị

Theo quy tắc nhân, số các chữ số được lập ra và thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$n = n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 = 2.4.4.3.2.1 = 192$

Vậy có tất cả 192 số cần tìm

Nhận xét: Trong thí dụ trên ta thuần túy sử dụng quy tắc nhân (cùng với kỹ thuật "ghép số")

Thí dụ 3: Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các em như vậy?

Vì chọn 6 em, trong đó chỉ có 5 học sinh nam, vậy ít nhất phải có 1 nữ, và tối đa có 3 nữ.

Gọi A_1 là cách chọn 6 em trong đó có 1 nữ, 5 nam

A_2 là cách chọn 6 em trong đó có 2 nữ, 4 nam

A_3 là cách chọn 6 em trong đó có 3 nữ, 3 nam

Gọi A là cách chọn thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta có $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, ngoài ra $A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $i \neq j$.

Theo quy tắc cộng ta có $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$ (1)

Theo quy tắc nhân thì: $|A_1| = C_7^1 C_5^5 = 7.1 = 7$; $|A_2| = C_7^2 C_5^4 = 21.5 = 105$; $|A_3| = C_7^3 C_5^3 = 35.10 = 350$

Thay lại vào (1), và có $|A| = 462$

Tóm lại có 462 cách chọn thỏa mãn yêu cầu đề bài

<u>Nhận xét:</u>

- Ta giải thích chút ít vì sao khi tính $|A_i|$ (i = 1,2,3) lại dùng quy tắc nhân. Thí dụ để tính $|A_2|$. Để chọn được 6 em trong đó có 2 nữ, 4 nam ta phải chọn theo hai bước

+ Bước 1: Chọn 2 nữ trong 7 nữ, vậy $n_1 = C_7^2 = 21$

+ Bước 2: Chọn 4 nam trong 5 nam, vậy $n_2 = C_5^4 = 5$

- Từ đó theo quy tắc nhân, ta có $|A_2| = n_1.n_2 = 21.5 = 105$

<u>Thí dụ 4:</u> Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị.

Tổng của 6 số chữ 1,2,3,4,5,6 là 1+2+3+4+5+6 = 21

Vậy tổng của 3 chữ số đều là 11. Ta thấy chỉ có các biến đổi sau:

10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+3+5

Để lập ra được số có 6 chữ số. Ta có 3 bước:

+ Bước 1: Chọn ra cặp 3 chữ số đầu. Có 3 cách chọn (như trên đề chỉ ra), vậy $n_1 = 3$

+ Bước 2: Sắp xếp 3 chữ số đầu $n_2 = 3! = 6$

+ Bước 3: Sắp xếp 3 chữ số cuối $n_3 = 3! = 6$

Theo quy tắc nhân số cách chọn ra số thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = n_1.n_2.n_3 = 3.6.6 = 108$

Tóm lại có 108 số thỏa mãn yêu cầu đề ra

<u>Nhận xét</u>: Ngoài việc dùng các kết quả của giải tích tổ hợp, ta cần biết các kiến thức về biến đổi số (cấp 1 và cấp 2)

<u>Thí dụ 5:</u> Có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6; 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5; 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác mầu vừa khác số

Để chọn được ra 3 quả cầu theo đề bài, ta tiến hành theo 3 bước

+ Bước 1: Chọn cầu vàng: có tất cả $n_1 = 4$ cách chọn

+ Bước 2: Chọn cầu đỏ: lúc này phải loại đi quả cầu mang số trùng với số của quả cầu vàng đã chọn ở Bước 1. Vì thế chỉ còn chọn cầu đỏ trong 4 quả cầu đỏ. Vì thế số cách chọn cầu đỏ ở Bước 2 là $n_2 = 4$ cách chọn

+ Bước 3: Chọn cầu xanh: lúc này phải loại đi 2 quả cầu xanh: 1 quả mang số trùng với số quả cầu vàng (chọn ở Bước 1), 1 quả mang số trùng với số quả cầu đỏ (chọn ở Bước 2). Vì thế chỉ có thể chọn quả cầu xanh trong 4 quả. Do đó số cách chọn cầu xanh ở Bước 3 là $n_3 = 4$ cách chọn

Theo quy tắc nhân, số cách chọn là $n = n_1.n_2.n_3 = 4^3 = 64$

Vậy có 64 cách chọn 3 quả cầu theo yêu cầu đề bài.

Thí dụ 6: Có 50 cháu là "cháu ngoan bác Hồ", trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 cháu trên. Có bao nhiêu cách chọn mà trong nhóm 3 em chọn ra không có cặp anh em sinh đôi nào?

Gọi A là tập hợp cách chọn 3 em từ 50 em một cách tùy ý

Gọi B là tập hợp cách chọn 3 em từ 50 em trong đó có cặp sinh đôi

Gọi C là tập hợp cách chọn 3 em thỏa mãn điều kiện đầu bài

Ta có $A = B \cup C; B \cap C = \varnothing$

Theo quy tắc cộng ta có $|A| = |B| + |C|$,

hay $|C| = |A| - |B|$ (1)

Tính $|A|$ Dễ thấy $|A|$ chính là số cách chọn 3 em từ 50 em

$$|A| = C_{50}^{3} = \frac{50!}{47!3!} = 19600$$

Tính $|B|$ Vì chọn 3 em, mà lại phải có cặp sinh đôi, nên trong 3 em sẽ có 1 cặp sinh đôi và 1 em khác. Vì thế chọn 3 em theo bước

+ Bước 1: Chọn cặp sinh đôi: Có $n_1 = 4$ cách chọn (vì có 4 cặp sinh đôi)

+ Bước 2: Chọn em còn lại trong 48 em, có $n_2 = 48$

Vậy theo quy tắc nhân $|B| = n_1.n_2 = 4.48 = 192$

Thay lại vào (1) có $|C| = 19600 - 192 = 19408$

Vậy có 19408 cách chọn 3 em học sinh

* Nhận xét:

- Trong thí dụ này ta lại một lần nữa sử dụng "phương pháp gián tiếp" để giải các bài toán về phép đếm

Thí dụ 8: Cho hình thập giác lồi. Có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó cũng là đỉnh của thập giác, nhưng cạnh của nó không phải là cạnh của thập giác.

Gọi A là tập hợp tất cả các tam giác mà đỉnh của nó cũng là đỉnh của thập giác

Gọi B là tập hợp tất cả các tam giác mà đỉnh của nó cũng là đỉnh của thập giác và có ít nhất một cạnh của nó cũng là cạnh của thập giác

Gọi C là tập hợp tất cả các tam giác cần tìm

Ta có $A = B \cup C; B \cap C = \varnothing$

Theo quy tắc cộng ta có $|A| = |B| + |C|$, hay

$|C| = |A| - |B|$ (1)

Tính $|A|$: dễ thấy $|A| = C_{10}^3 = \dfrac{10!}{7!3!} = 120$ (2)

Tính $|B|$: Có hai loại tam giác:

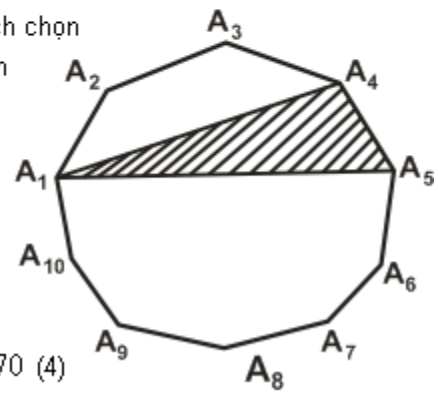
+ Tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của lục giác, và 1 cạnh là cạnh của thập giác. Gọi B_1 là tập hợp này

+ Tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của lục giác, và 2 cạnh là cạnh của thập giác. Như thế

$B = B_1 \cup B_2; B_1 \cap B_2 = \varnothing$ nên $|B| = |B_1| + |B_2|$ (3). Để tính $|B_1|$ ta tiến hành theo 2 bước:

+ Chọn 1 cạnh của thập giác làm cạnh của tam giác. Có $n_1 = 10$ cách chọn

+ Chọn đỉnh còn lại của thập giác để cùng với cạnh đã chọn tạo thành tam giác chỉ có 1 cạnh là cạnh của thập giác. Ứng với nữa cạnh như vậy chỉ còn lại 6 đỉnh của thập giác có thể chọn. Vậy $n_2 = 6$.



Theo quy tắc nhân thì $|B_1| = 10.6 = 60$

Dễ thấy (sau khi định hướng và quay chỉ lệ thuộc vào bên đường lối A_1A_2) thì các tam giác cần tìm thuộc tập B_2 là:

$A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, \ldots, A_9A_{10}A_1, A_{10}A_1A_2$

Từ đó có ngay $|B_2| = 10$, vì thế thay vào (3), và có $|B| = 60 + 10 = 70$ (4)

Thay (4) (2) vào (1), đi đến $|C| = 120 - 70 = 50$. Vậy có 70 tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài.

<u>Thí dụ 9:</u> Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n

Các tam giác có được thuộc hai tập hợp:
A là tập hợp các tam giác có 1 đỉnh trên d_1

và 2 đỉnh trên d_2

B là tập hợp các tam giác có 2 đỉnh trên d_1

và 1 đỉnh trên d_2

Rõ ràng $A \cap B = \varnothing$. Theo quy tắc cộng thì

$|A| + |B|$ là số tam giác cần tìm

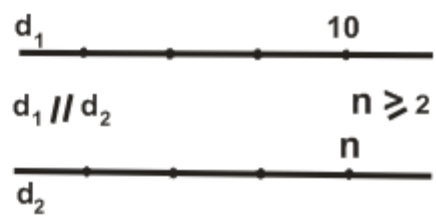
Tính $|A|$ theo hai bước:

+ Chọn 1 đỉnh trên d_1: có tất cả $n_1 = 10$
cách chọn

+ Chọn 2 đỉnh trên d_2: đây là chọn 2 đỉnh trong n đỉnh ($n \geq 2$), nên có tất cả

$n_2 = C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{(n-1)n}{2}$ cách chọn

Theo quy tắc nhân thì $|A| = n_1 n_2 = 10\dfrac{n(n-1)}{2} = 5n(n-1)$



Tính $|B|$ theo hai bước:

+ Chọn 1 đỉnh trên d_2: có tất cả $n_1 = n$ cách chọn

+ Chọn 2 đỉnh trên d_1: có $n_2 = C_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!2!} = 45$ cách chọn

Theo quy tắc nhân thì $|B| = n_1 n_2 = 45n$

Vậy số tam giác có được là $|A| + |B| = 5n(n-1) + 45n = 5n^2 + 40n$

Theo bài ra ta có phương trình $5n^2 + 40n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0$
Do n nguyên ≥ 2, nên suy ra n = 20. Vậy trên đường thẳng d_2 có 20 điểm

4. Sơ lược về phép đếm có lặp

- Trong phần 3, ta chỉ quan tâm đến các phép đếm không lặp, tức là các cách chọn k phần tử đôi một khác nhau trong n phần tử đã cho.

Phép đếm có lặp là phép đếm trong đó mỗi phần tử trong quá trình chọn, có thể được chọn lặp đi lặp lại nhiều lần.

<u>Thí dụ</u> Từ các số 1,2,3,4 . Hỏi có thể lập được bao nhiêu chữ số hàng nghìn, trong đó số 1 có thể có mặt tối đa 2 lần, các số khác tối đa 1 lần

- Để giải được các bài toán đếm có lặp, ta vẫn sử dụng hai quy tắc cơ bản: quy tắc cộng và quy tắc nhân, và cách giải không có gì khác lắm so với cách giải mà chúng ta đã trình bày trong mục 3. Tất nhiên ta phải chú ý đến giả thiết có thể lặp lại các phần tử trong quá trinhg chọn, để tính cho hết tất cả các trường hợp có thể xảy ra

Xét các thí dụ minh họa sau:

<u>Thí dụ 1</u> Cho tập hợp E = {1,2,3,4,5,6}
Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số (các chữ số này chọn từ tập hợp E), sao cho mỗi số hàng nghìn tạo thành đều chia hết cho 4.
Ta nhớ lại để một số chia hết cho 4, thì hai số tận cùng phải là số chia hết cho 4.
Từ tập hợp E ta có thể thấy chọn ra các số sau chia hết cho 4: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64.
Để chọn được các số hàng nghìn thỏa mãn yêu cầu đầu bài (có thể lặp đi lặp lại nhiều lần), ta thấy cần tiến hành qua các bước sau:

+ Bước 1: Chọn 2 số cuối. Theo trên số cách chọn $n_1 = 9$

+ Bước 2: Chọn số hàng trăm: Số cách chọn $n_2 = 6$ vì $|E| = 6$

+ Bước 3: Chọn số hàng nghìn: Số cách chọn $n_3 = 6$

Theo quy tắc nhân số các số phần tử tìm là $n = n_1 n_2 n_3 = 9.6.6 = 324$. Vậy có 324 cách chọn
<u>Nhận xét:</u> Thí dụ trên là một minh họa cho phép đếm có lặp. Nếu như bài toán đổi thành:
Với tập hợp E = {1,2,3,4,5,6} Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau chọn từ E, sao cho mỗi số hàng nghìn tạo thành đều chia hết cho 4. Đây là phép đếm không lặp
Từ tập hợp E chọn được các số có 2 chữ số khác nhau và chia hết cho 4 là
12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64 (chú ý so với thí dụ 1 ta đã loại đi số 44)
Bài toán được giải qua 3 bước sau:

+ Bước 1: Chọn 2 số cuối. Theo trên số cách chọn $n_1 = 8$

+ Bước 2: Chọn số hàng trăm: Do đã chọn 2 chữ số cuối vậy số hàng trăm chỉ được chọn trong 4 số còn lại , vậy $n_2 = 4$

+ Bước 3: Chọn số hàng nghìn: tương tự bước 2 ta có $n_3 = 3$

Theo quy tắc nhân số các số phần tử tìm là $n = n_1 n_2 n_3 = 8.4.3 = 96$. Vậy có 96 số

<u>Bình luận:</u>
Nếu phép đếm không lặp đáp số là 96
Nếu cho phép các số lặp đi lặp lại (phép đếm có lặp) đáp số là 324
Cách giải trong hai trường hợp về cơ bản hoàm toàn giống nhau và đều đơn giản

<u>Bài 1:</u> (Đề thi Đại học, Cao đẳng khối B 2004)
Trong một môn học, thày giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ cả 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2

Gọi A là tập hợp các đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu khó, 1 câu trung bình
Gọi B là tập hợp các đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình
Gọi C là tập hợp các đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu khó, 2 câu trung bình

Khi đó A,B,C đôi một không giao nhau, nên theo quy tắc cộng, thì $|A|+|B|+|C|$ là số các đề kiểm tra thỏa mãn yêu cầu đề ra

Theo quy tắc nhân ta có $|A| = C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1 = \frac{15!}{12!3!}.10.5 = 22750$

$|B| = C_{15}^2 C_{10}^1 C_5^2 = \frac{15!}{13!2!}.\frac{5!}{3!2!}.10 = 10500$

$|C| = C_{15}^2 C_{10}^2 C_5^1 = \frac{15!}{13!2!}.\frac{10!}{8!2!}.5 = 23625$

Vậy $|A|+|B|+|C|$= 56875 là số các đề kiểm tra thỏa mãn yêu cầu đề ra

<u>Bài 2</u>: (Đề thi Đại học, Cao đẳng khối B 2005)

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ

Gọi 3 tỉnh đó là tỉnh A, tỉnh B, tỉnh C, bài toán có 2 bước

Bước 1: Phân công 4 nam, 1 nữ cho tỉnh A, theo quy tắc nhân ta có $n_1 = C_{12}^4 C_3^1 = \frac{12!}{8!4!}.3 = 1485$

Bước 2: Phân công 4 nam (trong 8 nam còn lại), 1 nữ (trong 2 nữ còn lại) cho tỉnh B, theo quy tắc nhân ta có $n_2 = C_8^4 C_2^1 = \frac{8!}{4!4!}.2 = 140$

Theo quy tắc nhân, số cách phân công là n = 1485 .140 = 207900

<u>Bài 3</u> (Đề thi Đại học, Cao đẳng khối D 2005)

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$

Biết rằng $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$

Ta viết lại hệ thức đã cho dưới dạng sau:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + 2\frac{(n+2)!}{n!2!} + 2\frac{(n+3)!}{(n+1)!2!} + \frac{(n+4)!}{(n+2)!2!} = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2\frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+3)(n+4)}{2} = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + 2(n^2 + 3n + 2) + 2(n^2 + 5n + 6) + n^2 + 7n + 12 = 298$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 + 24n - 270 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0$$

Do n nguyên > 0 , ta có n = 5

Thay vào biểu thức M, ta đi đến $M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{360+180}{720} = \frac{3}{4}$

<u>Bài 4</u> (Đề thi Đại học, Cao đẳng khối D 2006)

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy

Gọi X là tập hợp cách chọn 4 học sinh từ một lớp

Goi Y là tập hợp cách chọn 4 học sinh từ hai lớp

Theo quy tắc cộng thì $|X|+|Y|$ chính là số cách chọn thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Có 1 cách chọn 4 học sinh gồm toàn lớp B (lớp B có 4 học sinh). Có $C_5^4 = 5$ cách chọn 4 học sinh gồm toàn lớp A. Vậy $|X| = 1+5 = 6$ (1)

Ta tính $|Y|$ như sau

Số cách chọn 4 học sinh từ hai lớp A, B là $C_9^4 - (1+5) = 126 - 6 = 120$

Số cách chọn 4 học sinh từ hai lớp C, B là $C_7^4 - 1 = 35 - 1 = 34$

Số cách chọn 4 học sinh từ hai lớp A, C là $C_8^4 - 5 = 70 - 5 = 65$

Vậy $|Y|$= 120 + 34 + 65 = 219 (2)

Từ (1) (2) suy ra có 225 cách chọn 4 học sinh thỏa mãn đầu bài

<u>Bài 5</u> (Đề thi Đại học, Cao đẳng khối B 2002) (Hình vẽ 3)

Cho đa giác đều $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ ($n \geq 2$) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n

Số tam giác là $C_{2n}^3 = \dfrac{2n!}{(2n-3)!3!} = \dfrac{(2n-2)(2n-1)2n}{6} = \dfrac{n(2n-2)(2n-1)}{3}$ (1)

Đa giác đều 2n cạnh , thì có n đường chéo xuyên tâm. Cứ 2 đường chéo xuyên tâm ta có 1 hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật theo yêu cầu đề bài là $C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{n(2n-2)(2n-1)}{3} = 20\dfrac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(2n-2)(2n-1)}{3} = 10(n-1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n-1}{3} = 5 \Leftrightarrow 2n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy đa giác đều có 16 cạnh

<u>Bài 6</u> (Đề thi Đại học, Cao đẳng khối B 2006)

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1,2,...,n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất

Số tập con có 4 phần tử của A là C_n^4

Số tập con có 2 phần tử của A là C_n^2

Theo bài ra ta có $C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!4!} = 20\frac{n!}{(n-2)!2!} \Leftrightarrow \frac{1}{24(n-4)!} = \frac{20}{2(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{24} = \frac{10}{(n-3)(n-2)} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 = 240 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow n = 18$

Số các tập hợp con gồm k phần tử là C_{18}^k (k = 0,1,2...,18)

Ta xét tỉ số $a_k = \frac{C_{18}^{k+1}}{C_{18}^k}$, và có $a_k = \frac{\frac{18!}{(18-k-1)!(k+1)!}}{\frac{18!}{(18-k)!k!}} = \frac{k!}{(k+1)!}.\frac{(18-k)!}{(18-k-1)!} = \frac{18-k}{k+1}$

Vì $a_k = \frac{18-k}{k+1}$, nên suy ra $a_k > 1 \Leftrightarrow 18-k > k+1 \Leftrightarrow 8,5 > k \Leftrightarrow k \le 9$

$a_k < 1 \Leftrightarrow 8,5 > k \Leftrightarrow k \le 8$

Vì lẽ ấy ta có $C_{18}^0 < C_{18}^1 < ... < C_{18}^9 > C_{18}^{10} > C_{18}^{11} > ... > C_{18}^{18}$

Như vậy $C_{18}^9 = \max C_{18}^k$ $(0 \le k \le 18)$

Tóm lại khi k = 9 thì tập con gồm 9 phần tử là lớn nhất