BÀI TẬP ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức

1. $A=\dfrac{A_6^4+3A_5^3}{P_6}$

2. $B=C_6^2+2C_7^2+2C_8^2+C_9^2$

3. $C=\dfrac{A_n^3\sqrt{18-\sqrt{n}}}{P_n}$, với n được xác định từ hệ thức $\dfrac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}}=\dfrac{2}{3}$

4. $D=\dfrac{10!+8!}{8!}$

5. $F=\dfrac{7!-5!}{4!}$

6. $G=\dfrac{7!4!}{10!}\left[\dfrac{8!}{3!5!}-\dfrac{9!}{2!7!}\right]$

7. $H=\dfrac{6!}{m(m+1)}\cdot\dfrac{(m+1)!}{4!(m-1)!}$

8. $I=\dfrac{5!}{m(m+1)}\cdot\dfrac{(m+1)!}{3!(m-1)!}$

9. $K=\left[\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}\right]n!$

10. $L=\dfrac{P_4P_7}{P_{10}}\left(\dfrac{P_8}{P_3P_5}-\dfrac{P_9}{P_2P_7}\right)$

Bài 2.

1. Giải phương trình sau: $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12$

2. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $C_n^2C_n^{n-2}+2C_n^3C_n^2+C_n^3C_n^{n-3}=100$

3. **(TN – 07)** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn phương trình $C_n^4+C_n^5=3C_{n+1}^6$

4. **(TN – 08)** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn phương trình $3C_n^2-A_{n+1}^2-7=0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1. $P_{n+3}=720A_n^5P_{n-5}$

2. $\dfrac{A_{x+1}^{y+1}P_{x-y}}{P_{x-1}}=72$

3. $A_x^{10}+A_x^9=9A_x^8$

4. $P_xA_x^2+72=6\left(A_x^2+xP_x\right)$

5. $C_n^1+6C_n^2+6C_n^3=9n^2-14n$

Bài 4.

1. Giải bất phương trình: $A_n^3+2C_n^{n-2}\le 9$

2. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn bất phương trình $\dfrac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}}-\dfrac{143}{4P_{n-1}}<0$

3. Giải bất phương trình $\dfrac{1}{2}A_{2n}^2-A_n^2\le\dfrac{6}{n}C_n^3+10$

4. Giải bất phương trình $\dfrac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4}<\dfrac{1}{14P_3}$

5. **(TN – 03)** Giải hệ phương trình (ẩn số là x và y): $C_{x+1}^y:C_x^{y+1}:C_x^{y-1}=6:5:2$

6. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn hệ phương trình sau đây: $A_x^{y-1}:A_{x-1}^y:C_{x-1}^y=21:60:10$

7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$

Bài 5.

1. Cho $k \geq 2$ và n là các số tự nhiên. Chứng minh rằng: $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^n$

2. Cho $n \geq k \geq 2, n, k$ là các số tự nhiên. Chứng minh hệ thức $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

3. Cho $n \geq k+1 \geq 0$, n, k là các số tự nhiên. Chứng minh hệ thức $nC_n^k = (k+1)C_n^{k+1} + kC_n^k$

Bài 6.

1. Cho tập hợp A gồm n phần tử, $n \geq 7$. Tìm n biết rằng số tập hơp con gồm 7 phần tử của A bằng hai lần số tập hợp con gồm 3 phần tử của A.

2. **(B – 02)** Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ (≥ 2) nội tiếp đường tròn O. Biết rằng số tam giác có 3 đỉnh trong 2n điểm $A_1, A_2,\ldots,A_{2n}$ gấp 20 lần số hình chữ nhật có 4 đỉnh trong 2n điểm $A_1, A_2,\ldots,A_{2n}$. Tìm n.

3. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt. Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n.

4*. **(B – 06)** Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 4)$. Tìm $k \in \{1,2,...,n\}$ sao cho số tập hợp con gồm k phần tử của tập hợp A là lớn nhất, biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con gồm 2 phần tử của A.

5. Tìm k sao cho 3 số $C_7^k, C_7^{k+1}, C_7^{k+2}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Bài 7.

1. Bộ môn Toán học của một trường Đại học có 20 giáo viên nam, 15 giáo viên nữ. Có bao nhiêu cách lập một hội đồng gồm 6 ủy viên của tổ bộ môn để trong Hội đồng phải có cả nam, cả nữ và số ủy viên nam ít hơn số ủy viên nữ?

2. **(B – 04)** Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

3. Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Cần lập đoàn công tác 3 người có cả nam và nữ, có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách lập đoàn.

4. Trong một tổ học sinh của lớp 11A1 có 8 nam, 4 nữ. Thầy giáo muốn chọn 3 học sinh để làm trực nhật lớp học, trong đó phải có ít nhất 1 học sinh nam. Hỏi thầy giáo có thể có bao nhiêu cách chọn.

5. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có hai chữ số 1, 5?

6. **(B – 05)** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 13 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam, 1 nữ?

7. Trên giá sách có 10 quyển sách tiếng Việt khác nhau, 8 quyển sách tiếng Anh khác nhau và 6 quyển sách tiếng Pháp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 quyển sách với hai thứ tiếng?

8. Giữa hai thành phố A và B có 5 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B rồi trở về A mà không có đường nào được đi hai lần?

9. Một dãy có 5 ghế dành cho 3 nam sinh và 2 nữ sinh. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:

a) Ngồi chỗ nào cũng được?

b) Nam sinh và nữ sinh ngồi xen kẽ?

10. Gieo đồng thời 3 con súc sắc. Hỏi có bao nhiêu trường hợp tổng số chấm trên mặt xuất hiện của 3 con súc sắc là 9 và mỗi mặt xuất hiện số chấm khác nhau?

11. Một người có 7 áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cà vạt trong đó có 2 cà vạt màu vàng. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn bộ áo – cà vạt nếu như đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt vàng?

12. **(D – 06)** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp T, 4 học sinh lớp L và 3 học sinh lớp H. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

13. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 7 chữ số khác nhau sao cho chữ số 4 và 5 không đứng cạnh nhau?

14. Biển đăng ký xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái đầu tiên trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng ký nhiều nhất là bao nhiêu?

15. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng. Người ta lấy ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ ba màu? ĐS: 645.

Bài 8. Thực hiện khai triển:

1. $(1+x)^{10}$ 2. $(3x-4)^5$ 3. $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$ 4. $\frac{1}{27}\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^6$

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $S = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + ... + C_6^6$ 2. $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$

Bài 10.

1. Viết 3 số hạng đầu tiên theo lũy thừa tăng của x trong khai triển $(3-2x)^8$.

2. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(1-2x)^{12}$.

3. Xét khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}$. Tìm hệ số của số hạng chính x^8 trong khai triển trên.

4. Cho khai triển $(2x-3y)^{200}$. Tìm hệ số của số hạng $x^{101}y^{99}$ trong khai triển trên.

5. **(D – 04)** Xét khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7, x>0$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển trên.

6. Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

7. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển Newton $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

Bài 11.

1. **(D – 02)** Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^nC_n^n=243$

2. **(B – 07)** Tìm số nguyên dương n sao cho $C_n^0 3^n-C_n^1 3^{n-1}+C_n^2 3^{n-2}-C_n^3 2^{n-3}+...+\left(-1\right)^n C_n^n=2048$

3. Tìm số nguyên dương n sao cho số hạng thứ năm của khai triển $\left(2\sqrt[n]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k\left(2\sqrt[n]{2^{-1}}\right)^k\left(\frac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^{6-k}$ bằng 240.

4. **(A – 03)** Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7\left(n+3\right)$.

5. Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$ tìm hệ số của số hạng có số mũ a và b bằng nhau và tìm số hạng ấy.

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi n số nguyên dương ta có:

$$3^n\left[C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{3^2}C_n^2-\frac{1}{3^3}C_n^3+...+\left(-1\right)^n\frac{1}{3^n}C_n^n\right]=2^n$$

BÀI TẬP XÁC SUẤT

Bài 1. Một người đi du lịch mang 3 hộp thịt, 2 hộp quả, 3 hộp sữa. Do trời mưa nên các hộp thịt bị mất nhãn. Người đó chọn ngẫu nhiên ba hộp. Tính xác suất để trong đó có một hộp thịt, một hộp sữa, một hộp quả.

Bài 2. Trong danh sách 10 đường phố cần tu sửa ở Hà Nội, có 2 đường thuộc quận Hoàn Kiếm, 4 đường thuộc quận Ba Đình, 4 đường thuộc quận Hoàng Mai. Chọn ngẫu nhiên 4 đường để tu sửa. Tìm xác suất để một đường thuộc quận Hoàn Kiếm, 2 đường thuộc quân Ba Đình và 1 đường thuộc quận Hoàng Mai được chọn.

Bài 3. Cho 8 quả cân trọng lượng 1 kg, 2 kg, 3 kg, …, 7 kg, 8 kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân. Tính xác suất để tổng trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9 kg.

Bài 4. Từ một hộp chứa 3 bi trắng, 2 bi đỏ lấy ngẫu nhiên 2 viên bi.

1. Xây dựng không gian mẫu.
2. Xác định các biến cố A = "Hai bi cùng màu trắng"; B = "Hai bi khác màu".
3. Tính P(A); P(B).

Bài 5. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên hai người. Tìm xác suất sao cho:

1. Cả hai đều là nữ. 2. Có đúng một nữ. 3. Không có nữ nào.

Bài 6. Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối cùng và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó là phân biệt. Tính xác suất để người đó gọi một lần là đúng số cần gọi.

Bài 7. Trong 100 vé xổ số có một vé trung 100 000đ, 5 vé trúng 50 000đ và 10 vé trúng 10 000đ. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé.

1. Tìm xác suất để người mua trúng thưởng 30 000đ.
2. Tìm xác suất để người mua trúng thưởng 200 000đ.

Bài 8. Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 3.

Bài 9. Một hộp đựng 9 tấm thẻ đánh số 1, 2, 3, …, 8, 9. Rút ngẫu nhiên hai tấm thẻ và nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để tích nhận được là số lẻ.

Bài 10. Cho tập hợp $E = \{0;1;2;3;...;8;9\}$. Lấy ngẫu nhiên ra hai phần tử của E. Tìm xác suất để hai số lấy ra đều là số lẻ và tổng của chúng nhỏ hơn 10.

Bài 11. Một bình chứa 16 viên bi trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tìm xác suất để trong 3 viên bi đó có ít nhất 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen.