<u>Bài 1:</u> Cho 7 chữ số: 1,2 ,3,4,5,6,7. Hỏi từ 7 chữ số trên lập được bao nhiêu số :

a) **có 5 chữ số .**
b) **Có 5 chữ số khác nhau đôi một.**
c) **Có 5 chữ số mà chữ số đầu tiên là 3.**
d) **Có 5 chữ số khác nhau không tận cùng bằng chữ số 4.**

<u>Giải</u>:

Gọi số cần lập dạng: $\overline{abcde}$.

Gọi A=$\{1,2,3,4,5,6,7\}$

a) Mỗi chữ số a, b,c,d,e đều có thể chọn một trong 7 chữ số trong tập hợp A nên có 7 cách chọn . Vậy ta có: 7.7.7.7.7= 16807 số.

b) Cách 1:

Ta có a$\in$ A nên a có 7 cách chọn.

b$\in A\setminus\{a\}$ nên b có 6 cách chọn.

c$\in A\setminus\{a,b\}$ nên c có 5 cách chọn.

d$\in A\setminus\{a,b,c\}$ nên d có 4 cách chọn.

e$\in A\setminus\{a,b,c,d\}$ nên e có 3 cáh chọn.

Vậy có: 7.6.5.5.3= 2520 số.

<u>Cách 2</u>: Số các số gồm 5 chữ số được lấy từ 7 chữ số đã cho là số chỉnh hợp chập 5 của 7, nghĩa là có: $A_7^5 = 2520$ số.

c) Ta có a=3 nên a có 1 cách chọn.

Các chữ số b,c,d,e đều được lấy từ tập A có 7 phần tứ nên mỗi phần tử đều có 7 cách chọn.

Vậy có: 1.7.7.7.7= 2401 số.

d) <u>Cách 1</u>:Ta có: e$\neq$ 4 nên e có 6 cách chọn.

a$\in A\setminus\{e\}$ nên a có 6 cách chọn.

b có 5 cách chọn.

c có 4 cách chọn.

d có 3 cách chọn.

Vậy có: 6.6.5.4.3 = 2160 số

<u>Cách 2:</u>Ta có: e$\neq$ 4 nên e có 6 cách chọn.

Chọn 4 chữ số trong 6 chữ số còn lại(khác e) xếp vào 4 vị trí còn lại nên có: A_6^4 cách chọn.

Vậy có: 6. A_6^4= 6.6.5.4.3= 2160 số.

<u>Bài 2:</u> **Cho 7 chữ số: 1,2,3,4.5.6.7.Hỏi từ 7 chữ số đó có bao nhiêu số gồm:**

a) **4 chữ số đôi một khác nhau.**
b) **Trong các số ở câu a) có bao nhiêu số luôn có mặt chữ số 7.**
c) **Trong các số ở câu a) có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ.**
d) **Trong các số ở câu a) có bao nhiêu số luôn có mặt chữ số 7 và chữ số hàng ngàn là chữ số 1.**

<u>Giải:</u>

Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcd}$

a)Số các số gồm 4 chữ số được lấy từ 7 chữ số đã cho là số chỉnh hợp chập 4 của 7, nghĩa là có: $A_7^4 = 840$ số.

b) Chọn chữ số 7 xếp vào 4 vị trí a,b,c,d có 4 cách chọn.

Chọn 3 trong 6 chữ số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có: A_6^3 cách chọn.

Vậy có: 4. A_6^3= 480 số.

c) Ta có d$\in\{2,4,6\}$ nên e có 3 cách chọn.

a có 6 cách chọn.
b có 5 cách chọn.
c có 4 cách chọn

Vậy có : 3.6.5.4= 360 số

<u>Cách 2</u>: 3. A_6^3 = 360 số.

Số các số lẻ: 840-360= 480 số.

d) Tacó a=1 nên a có 1 cách chọn.

Chọn chữ số 7 xếp vào 3 vị trí b,c,d còn lại nên có 3 cách chọn.

Chọn 2 trong 5 chữ số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_5^2 cách chọn.

Vậy có: 1.3. A_5^2 = 60 số

<u>Bài 3:</u> <u>:</u> Từ chín chữ số1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau và mỗi số đều chứa chữ số 5.Trong các số đó có bao nhiêu số không chia hết cho 5.

<u>Giải</u>: Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcdef}$

Chọn chữ số 5 xếp vào 6 vị trí có 6 cách chọn

Chọn 5 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 5 vị trí còn lại có A_8^5 cáh chọn.

Vậy có: 6. A_8^5 =40320 số.

<u>* Phương pháp gián tiếp:</u>Tính số các số chia hết cho 5:

Ta có f=5 nên f có 1 cách chọn.

Chọn 5 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 5 vị trí còn lại có A_8^5 cách chọn.

Vậy số các số chia hết cho 5 là: A_8^5 số

Suy ra số các số không chia hết cho 5 là: 6. A_8^5 - A_8^5 =5. A_8^5 =33600 số.

*<u>Tính trực tiếp</u>: f$\neq$ 5 nên chữ số 5 có thể xếp vào 5 vị trí có 5 cách chọn.

Chọn 5 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 5 vị trí còn lại có A_8^5 cáh chọn.

Vậy số các số trong câu a) không chia hết cho 5 là: 5. A_8^5 =33600 số.

<u>Bài 4</u>: Với 4 chữ số 1,2,3,4 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt.

Giải: Số các số gồm 1 chữ số: có A_4^1 số.

Số các số gồm 2 chữ số khác nhau có A_4^2:

Số các số gồm 3 chữ số khác nhau có A_4^3:

Số các số gồm 4 chữ số khác nhau có A_4^4:

Vậy số các số cần tìm là: $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4$ =64 số

<u>Bài 5</u>: Từ 7 chữ số 1,2,3,4,5,6,7 có thể lập được:

a)Bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 2.

b)Bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 2 và chia hết cho 5

HD: a) Chọn chữ số 2 vào 5 vị trí có 5 cách chọn.

Chọn 4 trong 6 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_6^4 cách chọn.

Vậy có: 5. A_6^4 = 1800 số.

b) Chọn chữ số 5 xếp vào vị trí hàng đơn vị có 1 cách chọn

Chọn chữ số 2 xếp vào 4 vi trí còn lại có 4 cách chọn.

Chọn 3 trong 5 chữ số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_5^3

Vậy có: 1.4. A_5^3 = 240 số

<u>Bài 6</u>: Với 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,67,8,9 có thể lập được bao nhiêu số:

a) gồm 5 chữ số khác nhau đôi một.
b) Trong các số ở câu a) có bao nhiêu số chẵn.

c) **Trong các số ở câu a) có bao nhiêu số chia hết cho 5.**
d) **Gồm 5 chữ số trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau.**

Giải:Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcde}$ (a$\neq$ 0)

a)Ta có a$\neq$ 0 nên a có 9 cách chọn

Chọn 4 trong 9 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_9^4 cách chọn.

Vậy có : 9. A_9^4= 27216 số.

b) Do số cần tìm là số chẵn nên e$\in\{0,2,4,6,8\}$.

TH1: e=0 nên e có 1 cách chọn.

Chọn 4 trong 9 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_9^4 cách chọn.

Trong trường hợp này có: A_9^4 số.

TH2: e$\in\{2,4,6,8\}$ nên e có 3 cách chọn.

Do a$\neq$ 0,e nên a có 6 cách chọn.

Chọn 4 trong 8chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách chọn.

Trong trường hợp này có: 3.6. A_8^4 số.

Vậy có cả thảy: A_9^4+3.6. A_8^4= số.

c) TH1: e=0 có A_9^4 số.

TH2: e=5 có 8. A_8^3 số.

Vậy có: A_9^4+8. A_8^3 = số.

d) Đặt E=$\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Ta có a được chọn từ E\$\{0\}$ nên a có 9 cách chọn.

b được chọn từ E\$\{a\}$ nên b có 9 cách chọn.

c được chọn từ E\$\{b\}$ nên c có 9 cách chọn

d được chọn từ E\$\{c\}$ nên d có 9 cách chọn

e được chọn từ E\$\{d\}$ nên e có 9 cách chọn **Vậy có: 9.9.9.9.9=59049 số.**

Bài 7: **Với các chữ số 0,1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số :**

a) **gồm 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 5 có mặt đúng 4 lần, các chữ số khác cómặt đúng một lần.**
b) **Gồm 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, còn các chữ số khác có mặt đúng một lần.**

Giải:

a)* Số các số có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 5 có mặt đúng 4 lần, các chữ số khác có mặt đúng một lần(kể cả những số có chữ số 0 đứng tận cùng bên trái).

Số cách chọn 4 trong 10 vị trí để xếp chữ số 5 là C_{10}^4.

Số cách sắp xếp 6 chữ số còn lại vào 6 vị trí còn lại là P_6.

Trong trường hợp này có: C_{10}^4.P_6 số

*Số các số có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 5 có mặt đúng 4 lần, các chữ số khác có mặt đúng một lần,chữ số 0 đứng tận cùng bên trái là : C_9^4.P_5 số.

Vậy số các số cần tìm là: : C_{10}^4.P_6 - C_9^4.P_5 =136080 số.

b) TH1: $C_{10}^3.C_7^2.P_5$

TH2: $C_9^3.C_6^2.P_{45}$

Số các số cần tìm là: $C_{10}^3.C_7^2.P_5 - C_9^3.C_6^2.P_{45}$ = 272160 số.

Bài 8: **Với các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lậo được bao nhiêu số:**

a) **chẵn gồm 4 chữ số khác nhau.**
b) **Chia hết cho 5, có 3 chữ số khác nhau,**
c) **Chia hết cho 9 có 3 chữ số khác nhau.**

HD: a) 156 số
b) 36 số
c) Gọi $\overline{abc}$ (a$\neq$ 0) là số gồm 3 chữ số khác nhau chia hết cho 9.

Suy ra $\{a,b,c\}$ có thể là: $\{0,4,5\},\{1,3,5\},\{2,4,5\}$

Do đó có: 2.2+ 3!+3!= 16 số.

<u>Bài 9</u>: Với các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 0.

<u>Giải:</u> Gọi số cần tìm dạng: $\overline{abcde}$ (a$\neq$ 0)

C1:) <u>Tính gián tiếp</u>:Số các số gồm 5 chữ số khác nhau là: 5. A_5^4= 600 số.

Số các số không có mặt chữ số 0 là: P_5=120 số

Số các số cần tìm là: 600-120=480 số.

C2:) Tính trực tiếp: Do a khác 0 nên 0 có 4 vị trí xắp xếp nên có 4 cách chọn.

Chọn 4 trong 5 chữ số xếp vào 4 vị trí còn lại có A_5^4 cách chọn.

Vậy có: 4. A_5^4= 480 số.

<u>Bài 10</u>:Với các chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một trong mỗ trường hợp sau:

a) **Là số chẵn.**
b) **Một trong 3 chữ số đầu tiên phải là chữ số 1.**

Hd: a) Có 840+2160=3000 số.

b)TH1:a=1 có A_7^4 =840 số.

TH2: 1 ở vị trí b hoặc c nên có 2 cách chọn.
a khác 0 và khác 1 nên a có 6 cách chọn.
Chọn 3 trong 6 chữ số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_6^3 cách chọn.

TH này có 2.6. A_6^3= 1440 số

Vậy có: 840+1440 = 2280 số.

<u>Bài 11</u>: Với 5 chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số :

a) **phân biệt.**
b) **Phân biệt và không bắt đầu bởi chữ số 1.**
c) **Phân biệt và không bắt đầu bởi 123.**

Giải: a) P_5=5!=120 số.

b)Tính gián tiếp: Tính số các số gồm 5 chữ số phân biệt bắt đầu bởi chữ số 1.

a=1 nên a có 1 cách chọn.

Chọn4 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có P_4 cách chọn.

Th này có: P_4=24 số

Vậy có: 120-24= 96 số.

c) $\overline{123de}$ có P_2=2 số

Vậy có: 120-2= 118 số.

<u>Bài 12:</u> Với 5 chữ số 1,2,5,7,8 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt và thỏa mãn điều kiện:

a) **Là một số chẵn.**
b) **Là một số nhỏ hơn hoặc bằng 276.**
c) **Là một số chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng 276.**

<u>Giải:</u> Gọi số cần lập có dạng $\overline{abc}$

a) c có thể nhận 2 hoặc 8 nên có 2 cách chọn.

Chọ 2 trong 4 chữ số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách chọn.

Vậy có: 2. A_4^2 = 24 số.

b) Do $\overline{abc} \leq 278$ nên a=1 hoặc a=2

TH1: a=1 có A_4^2=12 số.

TH2: a=2 thì b=1;5

Với b nhận 1hoặc 5 có 2 cách chọn.

Khi đó c có 3 cách chọn

TH này có: 2.3=6 số

TH3: a=2,b=7thì ccó thể nhận 1 hoặc 5 nên có 2 số.

Vậy có: 12+6+2=20 số.

c) TH1: a=1, c=2;8, nên b có thể chọn 3 chữ số còn lại là có 3 cách chọn

Th này có 3.2 =6 số

TH2: a=2, c=8, nên b có thể nhận 1 hoặc 5 nên có 2 cách chọn

TH này có 2 số.

Vậy có: 6+2 =8 số.

<u>Bài 13</u>:Với 5 chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và thỏa mãn điều kiện:

a) Mỗi số nhỏ hơn 40000.

b) Mỗi số nhỏ hơn 45000 .

ĐS: a) 3.P_4=72 số.

c) Chia 2 trường hợp a=1;2;3 và a=4, tổng có:3.P_4+1.3.P_3=90 số.

<u>Bài 14</u>: Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số có 9 chữ số khác nhau.Trong các số đó, có bao nhiêu số mà các chữ số 1 và 7 :

a) đứng cạnh nhau.

b) Không đứng cạnh nhau.

Giải:Số các số gồm 9 chữ số đôi một khác nhau được viếttừ 9 chữ số đã cho là hoán vị của 9 phần tử.

Ta có: P_9=9!=362880 số.

a) Số cách chọn 1 trong 2 chữ số 1 và 7 sao cho chữ số 1 đứng trước chữ số 7 hoặc chữ số 7 dứng trước chữ số 1 là 2.

Có 8 cách chọn 2 chữ số 1 va7 đứng cạnh nhau mà chữ số 1 đứng trước chữ số 7 trong 1 số có 9 chữ số khác nhau.

Chọn 7 chữ số còn lại xếp vào 7 vị trí còn lại có P_7 cách chọn.

Vậy có: 2.8.P_7=80640 số

<u>Bài 15:</u> Hỏi từ 10 chữ số: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các số đó có mặt chữ số 1 và 0

.

<u>Giải:</u> Gọi số cần lập có dạng $\overline{abcdf}$ (a$\neq$0)

<u>Cách 1</u>: Do a$\neq$0 nên chọn chữ số 0 xếp vào 5 vị trí còn lại có 5 cách chọn.

Chọn chữ số 1 xếp vào 5 vị trí còn lại có 5 cách chọn.

Chọn 4 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách chọn.

vậy có: 5.5. A_8^4=42000số.

<u>Cách 2</u>: TH1: a tùy ý:

Chọn 2 trong 6 vị trí để sắp 2 chữ số 1và 0 có: C_6^2=15 cách chọn

Sắp 2 chữ số 0và 1 vào 2 vị trí có 2!=2 cách.

Chọn 4 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách chọn.

TH này có: 15.2. A_8^4=50400số.

TH2: a=0 .
Chọn chữ số 1 sắp vào 5 vị trí còn lại có 5 cách chọn
Chọn 4 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách chọn.
TH này có: 5. A_8^4=8400 cách
Vậy số các số cần tìm là: 50400-8400 =42000 số.

<u>Bài 16</u>:-Người ta viết các số có 6 chữ số bằng các chữ số 1,2,3,4,5 như sau: Trong mỗi số được viết có một chữ số xuất hiện 2 lần còn các chữ số còn lại xuất hiện 1 lần. Hỏi có bao nhiêu số như vậy.

Giải:Chọn 1 chữ số trong 5 chữ số có C_5^1cách.
Chọn 2 vị trí trong 6 vị trí để xếp 1 chữ số có C_6^2 cách.
Chọn 4 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có P_4 cách.
Vậy có: $C_5^1.C_6^2$.P_4=1800 số.

<u>Bài 17</u>:Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ 5 chữ số: 0,1,2,3,4.

<u>Giải:</u> Số tự nhiên nhỏ hơn 10000 là những số tự nhiên có nhiều nhất 4 chữ số được viết từ các chữ số đã cho.
Số các số tự nhiên có 1 chữ số: có 5 số.
Số các số tự nhiên có 2 chữ số: có4.5 =20 số
Số các số tự nhiên có 3 chữ số: có 4.5.5=100 số
Số các số tự nhiên có 1 chữ số: có 4.5.5.5=500 số
Vậy có cả thảy: 625 số.

<u>Bài 18</u>:Xét những số gồm 9 chữ số trong đó có 5 chữ số 1 và 4 chữ số còn lại là: 2,3,4,5. Hỏi có bao nhiêu số như thế :

a) **Có 5 chữ số 1 được viết cạnh nhau.**
b) **Các chữ số được xếp tùy ý.**

Giải:

a) Năm chữ số 1 được xếp cạnh nhau có thể xem là 1 phần tử hợp với 4 phần tử còn lại 2,3,4,5 thành tập hợp gồm 5 phần tử: 1,2,3,4,5.
Số cách sắp xếp là: 5!=120 số.
b)Số cách sắp xếp chữ số 1 vào 5 vị trí trong 5 vị trí là C_9^5 cách
Số cách sắp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại có P_4 cách.
Vậy có: C_9^5.P_4=3024 số.

<u>Bài 19:</u>Cho 8 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7. Từ 8 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau đôi một và không chia hết cho 10.

<u>Giải</u>: Giải sử số cần lập dạng: $\overline{abcd}$ (a$\neq$ 0)
Số không chia hết cho 10 nên d $\neq$ 0, do đó d có 7 cách chọn.
a khác 0 và khác d nên a có 6 cách chọn.
Chọn 2 trong 6 chữ số còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_6^2 cách chọn.
Vậy số các số cần tìm là: 7.6. A_6^2=1260 số.

<u>Bài 20:</u> Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10.

ĐS: 1. A_9^5=3024 số.

<u>Bài 21</u>: Cho 4 chữ số 1,2,3,4.
a) Có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau.
b) Tính tổng các số tìm được ở câu a.

Giải: a) 24 số

b) Ứng với mỗi số tồn tại 1 số viết theo thứ tự ngược lại(ví dụ 1234 và 4321) nên tổng của hai số này là 5555.

Vậy tổng các số được viết là:12.5555=66660 .

<u>Bài 22:</u> a)Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên phải là chữ số lẻ.

b)Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ ,3 chữ số chẵn.

<u>Giải</u>: Gọi số cần lập dạng $\overline{abcdef}$ ($a \neq 0$)

a) a là chữ số lẻ nên a có 5 cách chọn.

Do số cần lậ là số chẵn nên f có 5 cách chọn.

Còn 8 chữ số xếp vào 4 vị trí nên có A_8^4 cách chọn

Suy ra số các số cần tìm là: ` 5.5. A_8^4=42000 số.

b)TH1: a tùy ý:

Chọn 3 trong 5 chữ số lẻ có C_5^3 cách chọn.

Chọn 3 trong 5 chữ số chẵn có C_5^3 cách chọn.

Với một bộ 6 chữ số (3 chữ số chẵn và 3 chữ só lẻ) xếp vào 6 vị trí có P_6 cách.

Th này có $C_5^3 . C_5^3 .P_6$= 72000 số.

TH2: a=0

Chọn 3 trong 5 chữ số lẻ có C_5^3 cách chọn.

Chọn 2 trong 5 chữ số chẵn có C_5^2 cách chọn.

Với một bộ 5 chữ số (2 chữ số chẵn và 3 chữ só lẻ) xếp vào 5 vị trí có P_5 cách.

Th này có $C_5^3 . C_5^2 .P_5$= 7200 số.

Vậy số các số cần tìm là: 72000-7200=64800 số.

<u>Bài 23</u>: Tìm số các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó, chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước .

Giải: Ta có chữ số đầu tiên phải khác 0.Theo bài ra, ta suy ra các chữ số đều khác 0 và khác nhau. Từ 9 chữ số: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 chọn ra 5 chữ số khác nhau, với 5 chữ số này ta chỉ lập được một số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó số các số cần tìm là số tổ hợp chập 5 của 9 phần tử: C_9^5 =126 số.

<u>Bài 24</u>: Có bao nhiêu số khác nhau gồm 7 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số đều là 1 số chẵn.

Giải: Nhận thấy với mỗi số có 6 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ($a_1 \neq 0$) ta lập được 10 số có 7 chữ số dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ mà trong đó chỉ có 5 số có tổng các chữ số là một số chẵn.Vì nếu $a_1 + a_2 + ... + a_6$ là số lẻ thì có 5 cách chọn a_7. Nếu $a_1 + a_2 + ... + a_6$ là số chẵn thì cũng có 5 cách chọn a_7.

Ta thấy a_1 có 9 cách chọn, còn a_2, …, a_6 thì mỗi chữ số có 10 cách chọn.

Do đó, số các số thỏa mãn ycbt là: $9.10^5.5= 45.10^5$ số.

<u>Bài 25</u>: Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số khác nhau đôi một được lập từ 7 chữ số: 1,2,3,4,5,7,9 sao cho 2 chữ số chẵn không nằm kề nhau.

Giải: Số các số có 7 chữ số khác nhau đôi một được viết từ 7 chữ số đã cho là 7!=5040 số.

Số các số có 7 chữ số khác nhau đôi một được viết từ 7 chữ số đã cho sao cho 2 chữ số 2 và 4 đứng cạnh nhau là 2!.6!=1440 số.

Do đó số các số cần tìm là: 5040-1440 số.

<u>Bài 26:</u> Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau đôi một và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng 3 chữ số cuối 1 đơn vị.

Giải: Giả sử số tự nhiên cần lập có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ($a_1 \neq 0$).

Theo bài ra ta có: $a_1+a_2+a_3=a_4+a_5+a_6 -1$

$\Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+ a_4+a_5+a_6 = 2(a_4+a_5+a_6)-1$

$\Leftrightarrow 21=2(a_4+a_5+a_6)-1$

$\Leftrightarrow (a_4+a_5+a_6)=11 \Rightarrow a_1+a_2+a_3=10$(*)

Vì a_1, a_2, a_3 đều thuộc tập có 6 phần tử là: 1, 2, 3, 4, 5, 6 nên (*) thỏa mãn chỉ có 3 khả năng sau:
KN1: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$
KN2: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$
KN3: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$
Với mỗi bộ 3 là a_1, a_2, a_3 nêu trên ta có thể tạo ra 3! Hoán vị và mỗi hoán vị đó được ghép với 3! Hoán vị của bộ số a_4, a_5, a_6
Do đó số các số cần timg là: 3.3!.3!= 108 số.

<u>Bài 27</u>: Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3.

Giải: Ta có thể coi cặp (2,3) chỉ là một phần tử và hợp với 4 phần tử còn lại ta được một tập hợp gồm 5 phần tử.
Chữ số 2 và 3 có thể hoán vị cho nhau trong một số nên có 2!= 2 cách.
TH1: chữ số tận cùng bên trái tùy ý, khi đó với 5 phần tử trên xếp vào 5 vị trí có 5! cách.
TH này có: 2!.5! số.
TH2: chữ số tận cùng bên trái là 0.
Chọn 4 phần tử còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có 4! Cách.
TH nay có: 2!.4! số.
Vậy số các số cần tìm là: 2!.5! -2!.4! = 192 số.

<u>Bài 28</u>: Từ 9 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8 có thể lập được bao nhiêu số chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau.

<u>Bài 29</u>: Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau thỏa mãn điều kiện chữ số hàng trăm ngàn khác 0 và phải có mặt chữ số 2.

Giải: Số các số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau: (chia 2 TH) có: 9. $A_8^4 + 4.8.A_8^4$ =41 A_8^4 số.

Số các số chẵn có 6 chữ số không có mặt chữ số 2 là: $8.A_{47}^4 + 3.7.A_7^4 = 29.A_7^4$

Vậy số các số cần tìm là: 41 A_8^4 - $29.A_7^4$ = 44520 số.

<u>Bài 30</u>:Từ các chữ số 1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số thỏa mãn điều kiện: Chữ số 4 xuất hiện 2 lần và các chữ số khác xuất hiện 1 lần.

ĐS: $C_6^2.P_4$ số.

<u>Bài 31:</u> Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000.

Giải: Giả sử số tự nhiên cần lập có dạng n= $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ($a_1 \neq 0$).

Vì n < 600000 nên $a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

TH1: Nếu $a_1 \in \{1, 3, 5\}$ thì a_1 có 3 cách chọn
a_6 có 4 cách chọn

Chọn 4 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách.

TH này có: 3.4. A_8^4=20160 số.

TH2: Nếu a_1 nhận 2 hoặc 4 nên a_1 có 2 cách chọn.
a_6 lẻ nên có 5 cách chọn.

Chọn 4 trong 8 chữ số còn lại xếp vào 4 vị trí còn lại có A_8^4 cách.

TH này có: 2.5. A_8^4=168000 số.

Vậy có cả thảy: 20160 + 168000 = 36960 số.

<u>Bài 32:</u> Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số sao cho tổng các chữ số của mỗi số là một số lẻ.

Giải: Giả sử số tự nhiên cần lập có dạng n = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ($a_1 \neq 0$).

Để n là một số lẻ thì có 2 khả năng:
KN1: Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ chẵn thì a_5 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
KN2: Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ lẻ thì a_5 $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Do đó với mỗi số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ cho ta 5 số có 5 chữ số mà tổng các chữ số là 1 số lẻ.
Mà có 9. 10^3 số có 4 chữ số .
Vậy có: 5.9. 10^3 = 45000 số.

<u>Bài 33</u>: Có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9.

Giải:

Ta thấy rằng : Các số có 6 chữ số chia hết cho 9 là:
100017, 100026, 100035, ….., 999999.
Các số lẻ có 6 chữ số chia hết cho 9 lập thành một cấp số cộng với u_1 = 100017; u_n = 999999 và công sai d = 18.
Ta có: 100017+(n - 1)16 = 999999
n = 5000
Vậy số các số cần tìm 5000.

<u>Bài 34</u>: Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ só khác nhau đôi một trong đó 2 chữ số kề nhau không cùng là chữ số lẻ.

Giải: Giả sử số tự nhiên n cần lập có dạng n = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ($a_1 \neq 0$).
Vì n có 6 chữ só khác nhau đôi một trong đó 2 chữ số kề nhau không cùng là chữ số lẻ nên trong n chỉ có thể có 1hoặc 2 hoặc 3 chữ số lẻ.
TH1: Nếu n chỉ có 1 chữ số lẻ.
- Với a_1 là chữ số lẻ thì các chữ số còn lại là chữ số chẵn.
Khi đó a_1 có 5 cách chọn.Chọn 5 chữ số chẵn xếp vào 5 vị trí còn lại có 5! Cách
Do đó ta có: 5.5!= 600 số.
- Với $a_1$là chữ số chẵn ($a_1 \neq 0$) nên a_1 có 4 cách chọn.
Chọn 1 trong 5 chữ số lẻ có 5 cách chọn.
Với mỗi chữ số lẻ đã chọn có 5 vị trí để xếp nên có 5 cách chọn.
Xếp 4 chữ số chẵn còn lại vào 4 vị trí còn lại có 4! cách
Suy ra, ta có:4. 5.5.4! = 2400 số.
Vậy TH này có: 600 + 2400 = 3000số.
TH2: Nếu n có 2 chữ số lẻ.
- Với a_1 là chữ số lẻ nên a_1 có 5 cách chọn
a_2 chẵn nên a_2 có 5 cách chọn.
Chọn 1 trong 4 chữ số lẻ có 4 cách chọn.
Với 1 chữ số lẻ đã chọn xếp vào 1 trong 4 vị trí còn lại có 4 cách chọn.
Chọn 3 trong 4 chữ số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_4^3 cách.
Suy ra, ta có: 5.5.4.4. A_4^3 = 9600 số.
- Với a_1 chẵn thì a_1 có 4 cách chọn.
Có 6 cách chọn hai vị trí để xếp hai chữ số lẻ không kề nhau .
Chọn 2 trong 5 chữ số lẻ có C_5^2 cách , với mỗi cặp 2 chữ số lẻ có thể hoán vị vị trí cho nhau nên có 2! cách.
Chọn 3 trong 4 chữ số chẵn còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có A_4^3 cách.
Suy ra, ta có: 4.6. C_5^2 .2!. A_4^3 = 11520 số.
Vậy trường hợp này có: 9600 + 11520 = 21120 số.
TH3: Nếu n có 3 chữ số lẻ:
- Với a_1 lẻ có 5 cách chọn.
Khi đó a_2 phải chẵn nên có 5 cách chọn.
Có 3 cách chọn 2 vị trí không kề nhau của 2 chữ số lẻ trong 4 vị trí còn lại.
Chọn 2 trong 4 chữ số lẻ còn lại sau đó hoán vị vị trí của 2 chữ số đó có $C_4^2P_2 = A_4^2$ cách
Chọn 2 trong 4 chữ số chẵn còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách.

Suy ra, ta có: 5.5.3. $A_4^2 . A_4^2$=10800 số.
- Với a_1 chẵn thì a_1 có 4 cách chọn.
Khi đó có 1 cách chọn 3 vị trí để sắp 3 chữ số lẻ để 3 chữ số đó không kề nhau.
Chọn 3 trong 5 chữ số lẻ sau đó hoán vị vị trí của chữ số đó có $C_5^3 P_3 = A_5^3$ cách
Chọn 2 trong 4 chữ số chẵn còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách.
Suy ra, ta có: 4.1. $A_5^3 . A_4^2$ = 2880 số.
Vậy TH này có: 10800 + 2880 = 13680 số.
Vậy có cả thảy: 3000 + 21120 + 13680 = 37800 số.

<u>Bài 35</u>: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và có tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.
Giải: Giả sử số tự nhiên n cần lập có dạng n = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ ($a_1 \neq 0$).
Theo giả thiết: $a_4 + a_5 + a_6 = 8$
Ta có: 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 8. Vậy có 2 cách chọn nhóm 3 chữ số để làm các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn.
Chọn 3 trong 9 chữ số để có $a_4 + a_5 + a_6 = 8$ có 2 cách chọn.
Với một bộ 3 chữ số ở trên có số cách sắp thứ tự 3 chữ số đó vào 3 vị trí a_4, a_5, a_6 là 3!.
Chọn 3 trong 6 chữ số còn lại xếp vào 3 vị trí còn lại có: A_6^3 cách.
Vậy số các số thỏa mãn là: 2.3!. A_6^3 = 1440 số.
NÂNG CAO: Từ các chữ số 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và có tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.
<u>Bài 36:</u> Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau mà mỗi số đều nhỏ hơn 25000.
ĐS: 360 số.
<u>Bài 37:</u> Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau.
Giải: Giả sử số tự nhiên n cần lập có dạng n = $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ($a_1 \neq 0$).
TH1: a_1 lẻ nên có 3 cách chọn.
a_2 phải lẻ và khác a_1 nên có 2 cách chọn.
Chọn 3 trong 4 chữ số chẵn sắp thứ tự vào 3 vị trí còn lại có A_4^3 cách.
Vậy TH này có: 3.2. A_4^3 = 144 số.
TH2: a_1 chẵn và khác 0 nên có 3 cách chọn.
Do n là số chẵn nên a_5 phải chẵn nên có 3 cách chọn.
Số cách chọn 2 trong 3 vị trí còn lại để xếp 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau là 2 cách.
Chọn 2 trong 3 chữ số lẻ và hoán vị 2 chữ số đó có A_3^2 cách.
Chọn 2 trong 2 chữ số chẵn còn lại xếp vào 2 vị trí còn lại có 2! = 2 cách.
Vậy TH này có: 3.2. A_3^2 .2 = 216 số.
Vậy có cả thảy: 144 + 216 = 360 số.
<u>Bài 38:</u> Tìm số các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó:
a) chữ số đứng sau nhỏ hơn chữ số đứng liền trước .
b) là số lẻ và chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước .
Giải:a) Với cách chọn 5 chữ số trong 10 chữ số đã cho thì chỉ có một cách sắp theo thứ tự tăng dần, nghĩa là chỉ có 1 số.Vậy số các số cần tìm chính là số tổ hợp chập 5 của 10 phần tử , vì thế số đó là: C_{10}^5 = 252 số.
b) Giả sử số tự nhiên n cần lập có dạng n=$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ($a_1 \neq 0$).

Do n lẻ và $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 > 0$ nên có 3 TH sau:

TH1: n=$\overline{a_1a_2a_3a_4 5}$ ($a_1 \neq 0$).

Khi đó a_4, a_3, a_2, a_1 chỉ lấy được trong tập hợp gồm 4 phần tử: 1, 2, 3, 4

Do đó chỉ có C_4^4=1 số thỏa mãn .

TH2: n=$\overline{a_1a_2a_3a_4 7}$ ($a_1 \neq 0$).

Khi đó a_4,a_3,a_2,a_1 chỉ lấy được trong tập hợp gồm 6 phần tử: 1, 2, 3, 4 , 5, 6

Do đó số các số trong TH này là: C_6^4=15 số.

TH3: n=$\overline{a_1a_2a_3a_4 7}$ ($a_1 \neq 0$).

Khi đó a_4,a_3,a_2,a_1 chỉ lấy được trong tập hợp gồm 8 phần tử: 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7, 8.

Do đó số các số trong TH này là: C_8^4=70 số.

Vậy có cả thảy: 1 + 15 + 70 = 86 số.

<u>Bài 39:</u> Với 6 chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số:

a) có 4 chữ số và chia hết cho 4.

b) Có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 4.

Giải: a)Ta đã biết một số có từ 2 chữ số trở lên chia hết cho 4 thì điều kiện cần và đủ là số có hai số cuối của số đó phải chia hết cho 4.

Từ 6 chữ số đã cho có thể chọn ra các số sau chia hết cho 4 là: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64.

Chọn 2 chữ số cuối theo trên có 9 cách chọn

Chọn chữ số hàng trăm có 6 cách chọn.

Chọn chữ số hàng nghìn có 6 cách chọn.

Vậy có: 9.6.6 = 324 số.

b) Từ 6 chữ số đã cho có thể chọn ra các số có các chữ số khác nhau sau chia hết cho 4 là: 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64.

Chọn 2 chữ số cuối theo trên có 8 cách chọn

Chọn chữ số hàng trăm có 4 cách chọn.

Chọn chữ số hàng nghìn có 3 cách chọn.

Vậy có: 8.4.3 = 96 số.

<u>Bài 40</u>: Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho số 1 có mặt tối đa 5 lần, các chữ số 2, 3, 4 mỗi số có mặt tối đa 1 lần.

Giải: Vì các chữ số 2, 3, 4 cómặt tối đa 1 lần nên ta phải lập ra số có 6 chữ số tứ 1, 2, 3, 4, nên chữ số 1 phải có mặt tối thiểu 3 lần.

TH1: Chữ số 1 xuất hiện đúng 3 lần(khi đó mỗi chữ số 2, 3, 4 có mặt đúng một lần)

Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để xếp 3 chữ số 1 có C_6^3 cách.

3 vị trí còn lại sắp 3 chữ số 2,3,4 có 3! cách

TH này có: $C_6^3.3!=120$ số.

TH2: Chữ số 1 xuất hiện đúng 4 lần

Chọn 4 vị trí trong 6 vị trí để xếp 4 chữ số 1 có C_6^4 cách.

2 vị trí còn lại sắp2 trong 3 chữ số 2,3,4 có A_3^2 cách

TH này có: $C_6^4 . A_3^2$=90 số.

TH3: Chữ số 1 xuất hiện đúng 5 lần

Chọn 5 vị trí trong 6 vị trí để xếp 5 chữ số 1 có C_6^5 cách.

1 vị trí còn lại sắp 1 trong 3 chữ số 2,3,4 có A_3^1 cách

TH này có: $C_6^5 . A_3^1$=18 số.

Vậy có cả thảy: 120 + 90 +18 = 228 số.

<u>Bài 41:</u> Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) Chữ số hàng vạn là một số chẵn.
b) Đó là số không chia hết cho 5.
c) Các chữ số ở hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục phải đôi một khác nhau.

Giải: Giả sử số tự nhiên n cần lập có dạng n=$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ ($a_1 \neq 0$).

Do a_3 là một số chẵn nên có 5 cách chọn.

Do n không chia hết cho 5 nên a_7 khác 0 và 5.có 8 cách chọn.

Do a_1 khác 0 nên a_1 có 9 cách chọn.

a_4 có 10 cách chọn.

Chọn 3 trong 10 chữ số sắp thứ tự vào 3 vị trí còn lại có A_{10}^3 cách

Theo qui tắc nhân số các số cần tìm là: 5.8.9.10. A_{10}^3=2592000 số.

<u>Bài 42</u>: Chứng minh

a. $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{1}{2}$

b. $C_n^0C_n^k - C_n^1C_{n-1}^{k-1} + C_n^2C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k C_n^kC_{n-k}^0 = 0$ với k, n nguyên dương và $1 \le k \le n$

c. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0$

d. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

<u>Bài giải</u>:

<u>Câu a</u>: Ta có

$$\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{n}{k!(n-k)!}\frac{(k+1)!(n+1)!}{(n+k+2)!} = \frac{n!(n+1)!(k+1)}{(n-k)!(n+k+2)!}$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{n!(n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!} - \frac{n!(n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}] = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{(2n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!}}{\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}} - \frac{\frac{(2n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}}{\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{C_{2n+1}^{n-k} - C_{2n+1}^{n-k-1}}{C_{2n+1}^n}\right) \quad (1)$$

Đẳng thức (1) đúng với mọi k = 0, 1, 2,…, n-1

Vậy $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{C_{2n+1}^n}\sum_{k=0}^{n-1}(C_{2n+1}^{n-k} - C_{2n+1}^{n-k-1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{C_{2n+1}^n}.(C_{2n+1}^n - C_{2n+1}^0)$

Suy ra VT = $\frac{1}{2C_{2n+1}^n}(C_{2n+1}^n - C_{2n+1}^0) + \frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2C_{2n+1}^n} + \frac{1}{C_{2n+2}^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{n!(n+1)!}{2(2n+1)!} + \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}$

$= \frac{1}{2} - \frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2n+2}) = \frac{1}{2}$

<u>Câu b</u>: Ta có $(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1x + C_k^2x^2 + ... + C_k^kx^k$ (1)

Nhân hai vế của đẳng thức (1) với C_n^k ta có

$C_n^k(1+x)^k = C_n^kC_k^0 + C_n^kC_k^1x + C_n^kC_k^2x^2 + ... + C_n^kC_k^kx^k$ (2)

Vì $C_n^kC_k^m = \frac{n!}{(n-k)!k!}.\frac{k!}{(k-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = C_n^mC_{n-m}^{k-m}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra với mọi x có

$C_n^k(1+x)^k = C_n^0C_n^k + C_n^1C_{n-1}^{k-1}x + C_n^2C_{n-2}^{k-2}x^2 + ... + C_n^kC_{n-k}^0x^k$ (4)

Thay x = -1 ta được $C_n^0C_n^k - C_n^1C_{n-k}^{k-1} + C_n^2C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^kC_n^kC_{n-k}^0 = 0$ (đpcm)

<u>Câu c</u>: Ta có

$(x-1)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k.x^{m-k}$ (1)

Thay x = 1 vào (1) thì được $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k = 0$ (2)

Lại có $(-1)^k kC_n^k = (-1)^k k\frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = (-1)^k n.C_{n-1}^{k-1}$ (3)

Từ (3) suy ra $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kC_n^k = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1} = (-n)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_{n-1}^{k-1} = (-n)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{n-1}^k$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$ (đpcm)

<u>Câu d</u>: Ta có

$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Vậy $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1}\left[(\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k) - C_n^0\right] = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

<u>Bài 43</u>:Cho n và k là hai số nguyên sao cho $0 \le k < n$. Chứng minh

a. $C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + C_n^2C_n^{k+2} + ... + C_n^{n-k}C_n^n = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}$

b. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2} = (C_{2n}^n)^2$

c. $\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^1 \vdots 4^{n-1}$ Với n ≥ 2

<u>Bài giải</u>:

<u>Câu a</u>: Ta có

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$

$(1+\frac{1}{x})^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{x} + C_n^2(\frac{1}{x})^2 + ... + C_n^n(\frac{1}{x})^n$

$(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n = [C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n][C_n^0 + C_n^1\frac{1}{x} + C_n^2(\frac{1}{x})^2 + ... + C_n^n(\frac{1}{x})^n]$ (1)

Hệ số của x^k là $C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + C_n^2C_n^{k+2} + ... + C_n^{n-k}C_n^n$ (*)

Mặt khác $(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}(1+x)^{2n} = \frac{1}{x^n}(C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + ... + C_{2n}^{n+k}x^{n+k} + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n})$ (2)

Hệ số của x^k là C_{2n}^{n+k} (**)

Từ (*) và (**) suy ra $C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + C_n^2C_n^{k+2} + ... + C_n^{n-k}C_n^n = C_{2n}^{n+k} = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}$

<u>Câu b</u>:

Ta có $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2} = \frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2[(n-k)!]^2} = C_{2n}^n\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$ (1)

Từ kết quả câu a thay k = 0 có $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+...+(C_n^n)^2=\frac{(2n)!}{n!n!}=C_{2n}^n$ (2)

Thay (2) vào (1) được ó $\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2}=C_{2n}^n\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^kC_{2n}^k=(C_{2n}^k)^2$ (đpcm)

<u>Câu c</u>: Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-k)}C_{n-k}^1=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_{2n+1}^{2(n-k)}=\sum_{k=0}^{n-1}kC_{2n+1}^{2k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n+1)!k}{(2k)!(2n-2k+1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k(2n+1)!}{2(2k)!(2n-2k+1)!}$$

$$=\frac{2n+1}{2}\sum C_{2n}^{2k-1}\quad(1)$$

Mặt khác $(1+1)^{2n}-(1-1)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2k-1}=4^n$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n+1}^{2(n-k)}C_{n-k}^1=\frac{2n+1}{2}.\frac{1}{2}4^n=(2n+1).4^{n-1}$ suy ra điều phải chứng minh.

<u>Bài 44</u>:

Chứng minh: $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+C_{n-3}^{k-1}+,,,+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}=C_n^k$ với mọi k, n nguyên dương và $k\le n$

Bài giải: Áp dụng công thức $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$ ta có

$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k$

$C_{n-2}^{k-1}+C_{n-2}^k=C_{n-1}^k$

$C_{n-3}^{k-1}+C_{n-3}^k=C_{n-2}^k$

.....

$C_k^{k-1}+C_k^k=C_{k+1}^k$

Cộng các đẳng thức trên theo từng vế ta có: $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+C_{n-3}^{k-1}+,,,+C_k^{k-1}+C_k^k=C_n^k$

Thay $C_k^k=C_{k-1}^{k-1}$ ta có điều cần phải chứng minh.

<u>Bài 45</u>: Cho đa thức $P(x)=(1+x)^9+(1+x)^{10}+(1+x)^{11}+(1+x)^{12}+(1+x)^{13}+(1+x)^{14}$

Khai triển và ước lược các số hạng đồng dạng được $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{13}x^{13}+a_{14}x^{14}$

Tìm hệ số a_9.

<u>Bài giải</u>:

Ta có

$$a_9=C_9^9+C_{10}^9+C_{11}^9+C_{12}^9+C_{13}^9+C_{14}^9=1+\frac{10!}{9!1!}+\frac{11!}{9!2!}+\frac{12!}{9!3!}+\frac{13!}{9!4!}+\frac{14!}{9!5!}$$

$$=1+10+55+220+715+2002=3003.$$

<u>Bài 46</u>: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $(2x^3-\frac{5}{x^2})^{20}$

<u>Bài giải</u>:

Áp dụng công thức nhị thức Niu-tơn ở trên với n = 20 , $a=2x^3, b=-\frac{5}{x^2}$ ta có số hạng thứ k+1 của khai triển là $T_{k+1}=C_{20}^k(2x^3)^{20-k}(-\frac{5}{x^2})^k=C_{20}^k2^{20-k}(-5)^kx^{60-5k}$

Số hạng T_{k+1} không phụ thuộc x khi $60-5k=0\Leftrightarrow k=12$

Với k = 12 thì số hạng cần tìm là $T_{13}=C_{20}^{12}2^85^{12}$.